数理解析研究所講究録
第 1736 巻 2011 年 33-47

飛躍型確率微分方程式に対する漸近展開定理とコールオプション価格への応用

大阪大学金融・保険教育研究センター　林 正史 (Masafumi Hayashi)
Center for the Study of Finance and Insurance
Osaka University

1 Introduction

漸近展開定理は、Watanabe[25] で示され、熱核の基本解の短時間での振舞いの研究に応用された. その後、統計学的な観点から見直され、統計学や数理ファイナンスなどに応用されている ([23],[24],[12],[13],[14],[15],[16]). この定理は確率変数の漸近展開

$$F(\epsilon) \sim f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \cdots$$

から、その密度関数や平均値 $\mathbf{E}[\phi(F(\epsilon))]$ の漸近展開を導く公式を与える. 例えば、証券価格が確率微分方程式

$$X_t^{(\epsilon)} = X_0 + r\int_0^t X_s^{(\epsilon)}\,ds + \epsilon\int_0^t \sigma(X_s^{(\epsilon)}, s)dB_s$$

に従うとするとき

$$\mathbf{E}[(X_T^{(\epsilon)} - K^{(\epsilon)})_+] \sim c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + \cdots, \tag{1.1}$$

といった近似式が導かれる（国友-高橋 [14] の第 6 章参照).

本稿では、ポアソン配置による飛躍を持つ確率微分方程式について、石川保志氏（愛媛大学）との共同研究 [9] で得られた漸近展開定理の概略を述べ、レヴィ過程 Z_t で駆動される標準型確率微分方程式

$$S_t^{(\epsilon)} = S_0 + r\int_0^t S_{s-}^{(\epsilon)}\,ds + \epsilon\int_0^t a(S_{s-}^{(\epsilon)}) \diamond dZ_s, \tag{1.2}$$

についても、国友-高橋 [14] にある近似式 (1.1) と同等の近似式が得られることを述べる. また近似式に現れる係数 c_1, c_2 の公式についても述べる.

ポアソン配置を含めた確率微分方程式に対するマリアバン解析の研究は、Bismut[2] により始められた. その後、多くの手法が提案され、漸近展開定理以外にも数理ファイナンスの分野へ多くの応用がなされている [11], [17], [5]. Bismut[2] の手法やマリアバン作用素の手法 (Bichteler, K., Gravereaux, J.B., Jacod,J [1]) ではウィーナー空間と同様の微分作用素を構成することで、部分積分の公式が定式化される. しかしながら、ウィーナー空間でのマリアバン解析に見られるような微分作用素をポアソン空間で構成する手法は一般的に知られておらず、強度測度に応じて解析の手法を選択する必要がある.

微分作用素を用いない手法として、Picard(1996) により差分作用素による解析の手法が提案された. この手法では、強度測度が特異性を持ってもよいため、幾何 CGMY 模型 ([4] 参照) や幾何安定過程模型といった重要な飛躍型確率微分方程式も扱うことができる. この解析の手法は、Ishikawa-Kunita[10] において、ウィーナー・ポアソン空間上まで一般化された. 本稿では、この Picard 及び Ishikawa-Kunita の枠組みに基づいて定式化した漸近展開について議論する.

1.1 漸近展開定理について

漸近展開定理について概要を述べる. $F(\epsilon)$ をパラメータ $\epsilon \in (0,1)$ に依存する確率変数とする. 確率変数列 $f_0, f_2, \ldots$ で

$$
\begin{aligned}
&\bullet \quad F(\epsilon), f_1, f_2, \ldots, \in \bigcap_{1\le p<\infty} \mathbf{L}^p(\Omega), \\
&\bullet \quad \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\|F(\epsilon) - \sum_{j=0}^{n} \epsilon f_j\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}}{\epsilon^{n+1}} < \infty.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

を満たすものが存在すると仮定する. すなわち $\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon f_j$ が $F(\epsilon)$ の $\mathbf{L}^p(\Omega)$ の意味での漸近展開になっていると仮定する. $\phi(x)$ を滑らかな関数とするとき、近似列 (1.3) から平均値

$$
\mathbf{E}[\phi(F(\epsilon))]
$$

の近似を与えることを考える. $\phi(x)$ の任意の導関数もすべて高々多項式の増大度であると仮定すると、テイラー展開による近似

$$
\mathbf{E}[\phi(F(\epsilon))] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \mathbf{E}[\frac{d^m\phi}{dx^m}(f_0)\ f_{i_1}\cdots f_{i_m}] \tag{1.4}
$$

が得られる. しかし $\phi(x)$ が滑らかでない場合（例えば $\phi(x) = (x-k)_+$ のような場合）は導関数 $\frac{d^n\phi}{dx^n}$ が超関数となり、右辺の近似に現れる各項

$$
\mathbf{E}[\frac{d^m\phi}{dx^m}(f_0)\, f_{i_1}\cdots f_{i_m}] \tag{1.5}
$$

は意味を持たなくなる. このような、超関数 $\frac{d^m\phi}{dx^m}$ と確率変数 f_0 の合成に数学的な定式化を与えたのが渡辺の理論 [25] である. この理論は、超関数とウィーナー汎関数の合成をウィーナー空間上の超関数として定式化するものであるが、ここではテスト関数の空間などにはこだわらず、フーリエ変換を用いて概略だけを説明する.

$\mathbf{R}$ 上の急減少関数全体がなす空間を $\mathcal{S}$ と書く. $\psi \in \mathcal{S}$ とし、関数 $\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]$ も急減少関数と仮定する. ただし、G は確率変数である. $\mathcal{F}\psi(\xi)$ で、フーリエ変換

$$
\mathcal{F}\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi x}\psi(x)\,dx
$$

を表すものとする. 急減少関数 ψ については、

$$
\psi(x) = \int \mathcal{F}\psi(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi
$$

が成り立つから、

$$\mathbf{E}[\psi(f_0)G] = \int \mathcal{F}\psi(\xi)\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]\,d\xi$$

と表すことができる. 関数 $\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]$ は急減少関数であると仮定したから、次の評価が得られる.

$$|\mathbf{E}[\psi(f_0)G]| = \left|\int \mathcal{F}\psi(\xi)\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]\,d\xi\right| \leq |\psi|_{\mathbf{H}_{-s}} \int (1+|\xi|^2)^s |\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]|^2\,d\xi \tag{1.6}$$

但し $s>0$ であり、$|\cdot|_{\mathbf{H}_{-s}}$ は

$$|\psi|_{\mathbf{H}_{-s}} = \left[\int (1+|\xi|^2)^{-s}\,|\mathcal{F}\psi(\xi)|^2\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

で与えられるノルムである. $\mathcal{S}$ をノルム $|\cdot|_{\mathbf{H}_{-s}}$ によって完備化した空間を $\mathbf{H}_{-s}$ とする. $\mathbf{H}_{-s}$ は超関数を含む空間になる. 例えば、ディラックの点測度 δ_x の（超関数の意味での）フーリエ変換は $\frac{1}{2\pi}e^{-iy\xi}$ で与えられるから、$\delta_x \in \mathbf{H}_{-1}$ となることが分かる.

$\mathbf{H}_{-s}$ に属する超関数 T に対して急減少関数の列 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n - T|_{\mathbf{H}_{-s}} = 0$$

なるものが取れることに注意して、極限をとることにより超関数 T と確率変数 f_0 との合成を定義する

$$\mathbf{E}[T\circ f_0] := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\psi_n(f_0)].$$

このような極限が存在することは、(1.6) 式から

$$\lim_{n,m\to\infty} |\mathbf{E}[\psi_n(f_0)] - \mathbf{E}[\psi_m(f_0)]| \leq \lim_{n,m\to\infty} |\psi_n - \psi_m|_{\mathbf{H}_{-s}} \int (1+|\xi|^2)^s |\mathbf{E}[e^{i\xi f_0}]|^2\,d\xi = 0$$

となることから従う. また、この近似を用いれば

$$\mathbf{E}[T\circ f_0 G] = \int \mathcal{F}T(\xi)\,\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]\,d\xi \tag{1.7}$$

を満たすことも分かる. (1.5) において、$\phi \in \mathbf{H}_{-\infty} := \cup_{s>0}\mathbf{H}_{-s}$ ならば、(1.7) を用いて (1.5) に意味を与えることができる. 例えば、ディラックの点測度 $T=\delta_x$ の場合は

$$\mathbf{E}[\delta_x \circ f_0] = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi}\,\mathbf{E}[e^{i\xi f_0}]\,d\xi = p_{f_0}(x)$$

となる. ただし、$p_{f_0}(x)$ は確率変数 f_0 の密度関数である. ここで、実際は $\delta_x\circ f_0$ は確率変数ではないため、左辺の平均は意味を持たない. そこで、$\mathbf{E}[T\circ f_0 G]$ の代わりに

$$\langle T\circ f_0, G\rangle = \int \mathcal{F}T(\xi)\,\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]\,d\xi$$

と書くことにする. このように書くのは、ウィーナー空間やポアソン空間などでは適当な位相の下で

$$G \to \langle T\circ f_0, G\rangle \tag{1.8}$$

が (確率変数で張られる、ある線形位相空間 $\mathbf{D}_\infty$ 上の) 連続線形汎関数になることが示されるからである.

この記法のもとで近似式 (1.4) を書き直すと、左辺は

$$\mathbf{E}[\phi(F(\epsilon))] = \langle \phi \circ F(\epsilon), 1\rangle = \langle \mathcal{F}\phi, \mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]\rangle$$

一方で、右辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\sum_{i_1+\cdots+i_m=n}\mathbf{E}[\frac{d^m\phi}{dx^m}\circ f_0\ f_{i_1}\cdots f_{i_m}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\sum_{i_1+\cdots+i_m=n}\langle\frac{d^m\phi}{dx^m}\circ f_0\,,\ f_{i_1}\cdots f_{i_m}\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n \sum_{m=1}^{n}\frac{(i\xi)^m}{m!}\sum_{i_1+\cdots+i_m=n}\langle\phi\circ f_0\,,\ \mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m}e^{i\xi f_0}]\rangle
\end{aligned}$$

となる. 従って、特性関数 $\mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]$ を適当な意味で漸近展開できれば、(1.4) を示すことができる.

石川保志氏との共同研究 [9] で、ウィーナー・ポアソン空間上の汎関数 $F(\epsilon)$ がある非退化性の条件 (Definition 1) を満たす時に、

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int |R_n(\xi,\epsilon)|^2\,(1+|\xi|^2)^s\,d\xi < \infty, \tag{1.9}$$

が成り立つことを示した. 但し、ここで R_n は特性関数の Taylor 展開の剰余項

$$R_n(\xi,\epsilon) = \mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}] - \sum_{l=0}^{n}\epsilon^l\sum_{m=0}^{l}\frac{(i\xi)^m}{m!}\sum_{l_1+\cdots l_m=l}\mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m}e^{i\xi f_0}]$$

である. このようにして $\phi\in\mathbf{H}_{-\infty}$ の場合に漸近展開 (1.4) が得られる.

ところが、オプション価格の価格付け $\mathbf{E}[\phi(F)]$ に現れる関数 ϕ では $\phi\in\mathbf{H}_{-\infty}$ となっていない場合がある. 例えば、$\phi(x)=(x-k_0)_+$ の場合、そのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\phi = \frac{ie^{-i\xi k_0}}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\left(\pi\delta - i\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}\right) \tag{1.10}$$

となる.　右辺の $\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}$ はコーシーの主値である. 従って $\phi\in\mathbf{H}_{-\infty}$ となっていないことがわかる. このような場合には、(1.9) を修正する必要がある. 第 2 章で、ウィーナー・ポアソン空間上のマリアバン解析について簡単に説明したあと、第 3 章において、この点の修正の方針を簡単に説明する. 第 4 章では、証券価格が (1.2) に従うヨーロピアンコールオプションの近似式の係数を具体的に与える.

2　ウィーナー・ポアソン空間上のマリアバン解析について

超関数 $T\in\mathbf{H}_{-\infty}$ と確率変数 f_0 の合成が定義されるためには、

$$\mathbf{E}[Ge^{i\xi f_0}]\in\mathcal{S} \tag{2.1}$$

を満たしている必要があった. この節ではウィーナー・ポアソン空間上の確率変数に対して、(2.1) が成り立つための十分条件を議論するため、[10] 及び [9] にあるウィーナー・ポアソン空間上のマリアバン解析について紹介する. (2.1) が成り立つ確率変数 G のクラスについても説明する. (2.1) は特性関数の無限遠点での振舞いも示しており、このことから確率変数 f_0 が密度を持つことや、その密度関数の滑らかさが分かることに注意しておく.

2.1 モデル

一次元ブラウン運動 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)\{W_t; 0 \le t \le T\}$、及び、強度測度が $ds\,\mu(dx)$ の $[0,T] \times \mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上のポアソン配置 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)\{N(A);\, A \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbf{R}\backslash\{0\})\}$ が与えられているものとする. 但し、$\mu(dx)$ は

$$\int_{\mathbf{R}\backslash\{0\}} 1 \wedge |x|^2\, \mu(dx) < \infty$$

を満たすものとする. また、

$$(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2)$$

とする. $a(x)$ を無限回連続微分可能で、その任意の導関数は有界であるような関数とする. 確率微分方程式 (1.2)

$$S_t^{(\epsilon)} = S_0 + r \int_0^t S_{s-}^{(\epsilon)}\, ds + \epsilon \int_0^t a(\, S_{s-}^{(\epsilon)}\,) \diamond dZ_s,$$

を考える. 但し、$\diamond dZ_r$ は Marcus 積分,

$$\begin{aligned}\int_0^t a(S_{s-}^{(\epsilon)}) \diamond dZ_s = &\int_0^t a(S_{s-}^{(\epsilon)}) \circ dW_s \\ &+ \int_0^t \int [\,\phi_1^z(S_{s-}^{(\epsilon)}) - S_{s-}^{(\epsilon)}\,]\tilde{N}(ds\,dz) \\ &+ \int_0^t \int [\,\phi_1^z(S_{s-}^{(\epsilon)}) - S_{s-}^{(\epsilon)} - za(S_{s-}^{(\epsilon)})1_{\{|z|<1\}}\,]\, ds\,\mu(dz),\end{aligned}$$

である. ここで、$\tilde{N}(drdz)$ は補償つきポアソン配置 (compensated Poisson random measure)、ϕ_t^z は

$$\phi_t^z(x) = x + z \int_0^t a(\phi_s^z(x))\, ds$$

で与えられるものとする. このような確率微分方程式は、Marcus の標準的確率微分方程式 (canonical stochastic differential equation) として知られている. もし、$a(x) = x$ ならば $S_t^{(1)}$ は幾何 Lévy 過程となる. この意味で、$S_t^{(\epsilon)}$ は幾何 Lévy 過程を一般化したものと考えられる.

2.2 マリアバン解析について

マリアバン解析の結果について説明するため、いくつかの記号を用意する. $h \in L^2([0,\mathrm{T}];\mathbf{R}^m)$ に対し

$$I(h) = \int_0^T h(s)dW_s.$$

と書く. $f(x_1,\ldots,x_n)$ を滑らかな有界関数とし、確率変数

$$X = f(I(h_1),\ldots,I(h_n))$$

を考える. ウィーナー空間上の微分作用素 D は次で定義される.

$$D_tX = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_l}(I(h_1),...,I(h_n))h_l(t).$$

この微分作用素は、$L^2(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mathbf{P}_1)$ 上の可閉な非有界作用素となることが知られている. (ウィーナー空間上のマリアバン解析については、[18]、[21] 参照.)

次にポアソン配置の汎関数の解析に用いる差分差用素を導入する. まずボレル集合 $A \subset [0,T] \times \mathbf{R}\backslash\{0\}$ に対し

$$N(A) \circ \varepsilon_u^+ = N(A\backslash\{u\}) + 1_A$$

とする. 次に

$$\tilde{D}_u g(N(A_1),\ldots,N(A_n)) = g(N(A_1)\circ\varepsilon_u^+,\ldots,N(A_n)\circ\varepsilon_u^+) - g(N(A_1),\ldots,N(A_n)).$$

によって差分作用素 $\tilde{D}$ を導入する. $\tilde{D}$ もまた可閉、非有界作用素となる.

ウィーナー汎関数に対しては微分作用素 D、ポアソン配置の汎関数に対しては $\tilde{D}$ を用いて解析する. 漸近展開の定義のため [10] で導入されたノルムを用いる.

$$|F|_{k,l,p} := \left(|F|^p_{\mathbf{L}^p} + \sum_{\substack{0\le k'\le k\\ 0\le l'\le l\\ 1\le k'+l'}} \mathbf{E}\left[\int_{\{(s,x);|x|<1\}^{k'}} \left(\int_{[0,\mathrm{T}]^{l'}} \left|\frac{D^{l'}_{\mathbf{t}}\tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}}F}{\gamma(\mathbf{u})}\right|^2 d\mathbf{t}\right)^{p/2} \hat{M}(d\mathbf{u})\right]\right)^{1/p},$$

ここで、以下の記号を使った

$$\begin{aligned} D^{l'}_{\mathbf{t}} &= D_{t_1}\cdots D_{t_{l'}}, \\ d\mathbf{t} &= dt_1\cdots dt_{l'}, \\ \tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}} &= \tilde{D}_{(s_1,x_1)}\cdots\tilde{D}_{(s_{k'},x_{k'})}, \\ \hat{M}(d\mathbf{u}) &= |x_1|^2\cdots|x_{k'}|^2\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_{k'}), \\ \gamma(\mathbf{u}) &= |x_1|\cdots|x_{k'}|. \end{aligned}$$

また、ソボレフ空間を次で定義する.

$$\mathbf{D}_{k,l,p} = \{F\,;\,|F|_{k,l,p} < \infty\},$$
$$\mathbf{D}_\infty = \bigcap_{p\ge 2}\bigcap_{k,l=0} \mathbf{D}_{k,l,p}.$$

2.3 非退化性条件

確率変数が条件 (2.1) を満たすための十分条件について紹介する. $F \in \mathbf{D}_\infty$ に対し

$$\Xi(\rho,\beta) = \int_0^T |D_t F|^2\, dt + \Gamma(\rho)^{-1} \int_{\{(s,x)||x|^2<\rho\}} |\tilde{D}_{(s,x)}F|^2 1_{\{|\tilde{D}_{(s,x)}F| \le \rho^\beta\}}\, ds\, \mu(dx) \tag{2.2}$$

と置く. 但し、

$$\Gamma(\rho) = \int_{\{|z|\le\rho\}} |z|^2 \mu(dz)$$

とおいた. (2.2) において、F がウィーナー汎関数にのみ依存するのであれば、これはマリアバンの共分散行列を与える. 一方で F がポアソン配置にのみ依存する場合は、$\Xi(\rho,\beta)$ は [19] の非退化性条件に現れる汎関数になる.

Theorem 1 次の二つの条件を仮定する.

(ND.1) ある $\alpha \in (0,2)$ が存在して、任意の $0 < \rho < 1$ に対し、

$$\Gamma(\rho) \ge \rho^\alpha$$

を満たす.

(ND.2) (非退化性条件) ある $\beta \in (\frac{\alpha}{2}, 1]$ が存在して、任意の $p \ge 1$, $k \ge 0$ に対して

$$\sup_{\rho\in(0,1)} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\{(s,x):|x|\le1\}^k} \left|\Xi(\rho,\beta)^{-1} \circ \varepsilon_\tau^+\right|_p < \infty$$

をみたす. 但し、$\varepsilon_\tau^+ = \varepsilon_{u_1}^+ \circ \cdots \circ \varepsilon_{u_n}^+$ とした.

このとき、$q = q(\alpha,\beta) \in (0,1)$ が存在して、任意の n、及び $G \in \mathbf{D}_\infty$ に対して

$$\sup_{|G|_{k,l,p}=1} |\mathbf{E}[Ge^{i\xi F}]| \le C(1+|\xi|^2)^{-\frac{q_0}{2}n}$$

が成り立つ.

(1.8) 式が $\mathbf{D}_\infty$ 上の連続線形汎関数となることは、この不等式と (1.6) から分かる.

漸近展開の議論をするため、パラメータつきの確率変数 $\{F(\epsilon); \epsilon \in (0,1)\}$ を考える. パラメータ付きの確率変数に対する非退化性は次のように定式化される.

Definition 1 $F(\epsilon) \in \mathbf{D}_\infty$ が一様非退化性条件を満たすとは $^\exists\beta \in (0, \frac{\alpha}{2}]$ が存在して、任意の $k, l, m \in \mathbf{Z}_+$ $p \ge 2$ に対して

$$\limsup_{\epsilon\to0} \sup_{\rho\in(0,1)} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in A(\rho)^m} |\ \Xi(\rho,\beta,\epsilon)^{-1} \circ \varepsilon_\tau^+\ |_p < \infty,$$

を満たすときに言う．但し

$$\Xi(\rho,\beta,\epsilon) :=$$
$$\int_0^T |D_t F(\epsilon)|^2\,dt + \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^T\int_{\{|x|\le\rho\}} |\tilde{D}_{(s,x)}F(\epsilon)|^2\, 1_{\{|\tilde{D}_{(s,x)}F(\epsilon)|\le\rho^\beta\}}\,ds\,\mu(dx).$$

と置いた．

Theorem 2 (ND1) を仮定する．また、$F(\epsilon)$ は一様非退化性条件を満たすとする．このとき任意の n に対して、$k,l,\in \mathbf{Z}_+$, $p>2$ が存在して十分小さい任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\sup_{|G|_{k,l,p}=1} |\mathbf{E}[Ge^{i\xi F(\epsilon)}]| \le C(1+|\xi|^2)^{-q_0\frac{n}{2}},$$

を満たす．ここで　$q_0 = q_0(\alpha,\beta)\in(0,1)$ である．

証明については [9] を参照.

3　ヨーロピアンコールオプションの近似公式について

3.1　$S_t^{(\epsilon)}$ の漸近展開について

資産価格が次の確率微分方程式

$$S_t^{(\epsilon)} = S_0 + r\int_0^t S_{s-}^{(\epsilon)}\,ds + \epsilon\int_0^t a(S_{s-}^{(\epsilon)}) \diamond dZ_s,$$

に従うものとし、ヨーロピアンコールオプションの近似公式

$$\mathbf{E}[(S_T^{(\epsilon)} - K^{(\epsilon)})_+] \sim \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \cdots \tag{3.1}$$

について考えていく．ここで

$$K^{(\epsilon)} = S_0 e^{rT} + \epsilon k_0$$

と置いた．そのため、まず $S_T^{(\epsilon)}$ の漸近展開について説明する．$S_T^{(\epsilon)}$ は ϵ を変数とする関数に値をとる確率過程とみなせる．このとき、$\epsilon\mapsto S_\cdot^{(\epsilon)}$ が $C^\infty((0,1))$ となる修正がとれ各導関数が形式的な微分

$$\begin{aligned}\frac{d^n S_T^{(\epsilon)}}{d\epsilon^n} &= r\int_0^t \frac{d^n S_{s-}^{(\epsilon)}}{d\epsilon^n}\,ds + \int_0^t \frac{d^n}{d\epsilon^n}(\epsilon a(S_{s-}^{(\epsilon)}))\circ dW_s\\ &+\int_0^t\int \frac{d^n}{d\epsilon^n}(\epsilon[\phi_1^z(S_{s-}^{(\epsilon)}) - S_{s-}^{(\epsilon)}])\tilde{N}(ds\,dz)\\ &+\int_0^t\int \frac{d^n}{d\epsilon^n}(\epsilon[\phi_1^z(S_{s-}^{(\epsilon)}) - S_{s-}^{(\epsilon)} - za(S_{s-}^{(\epsilon)})1_{\{|z|<1\}}])\,ds\,\mu(dz),\end{aligned}\tag{3.2}$$

で与えられることが Fujiwara-Kunita [6] と同様に示せる.

$$U_t^{(n)} := \left. \frac{d^n}{d\epsilon^n} S_t(\epsilon) \right|_{\epsilon=0}$$

と置くと、(3.2) から $U_t^{(1)}, U_t^{(2)}, \ldots,$ は次の線形確率微分方程式を満たすことが分かる:

$$U_t^{(0)} = S_0 + r \int_0^t U_{s-}^{(0)}\, ds = S_0 e^{rt},$$
$$U_t^{(1)} = r \int_0^t U_{s-}^{(1)}\, ds + \int_0^t a(U_{s-}^{(0)}) \diamond dZ_s, \ \ldots.$$

また、Ishikawa-Kunita [10] にあるように、任意の $k, l \in \mathbf{N}$, 及び、$p \geq 2$ に対し

$$\sup_{\epsilon \in (0,1)} \left| \frac{d^n}{d\epsilon^n} S_T^{(\epsilon)} \right|_{k,l,p} < \infty.$$

を満たすことがわかる. 従って Taylor の公式により、

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\left| S_T^{(\epsilon)} - \sum_{n=0}^{m} \frac{\epsilon^n}{n!} U_T^{(n)} \right|_{k,l,p}}{\epsilon^{m+1}} &\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{1}{m!} \left| \int_0^1 (1-\theta)^m \frac{d^{m+1}}{d\epsilon^{m+1}} S_T^{(\epsilon\theta)}\, d\theta \right|_{k,l,p} \\ &\leq c \sup_{\epsilon \in (0,1)} \left| \frac{d^n}{d\epsilon^n} S_T^{(\epsilon)} \right|_{k,l,p} < \infty \end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る.

3.2 一様非退化性条件

$S_T^{(\epsilon)}$ が一様非退化性条件を満たせば、$S_T^{(0)}$ の分布は滑らかな密度関数を持つことが示される. しかし、$S_T^{(0)} = S_0 e^{rT}$ となるから、滑らかな密度関数を持たない. 従って、$S_T^{(\epsilon)}$ は一様非退化性条件を満たさないことが分る. そこで、$S_T^{(\epsilon)}$ に漸近展開を適用するのではなく、

$$F(\epsilon) = \frac{S_T^{(\epsilon)} - S_T^{(0)}}{\epsilon} \tag{3.4}$$

に対して適用することを考える. $K^{(\epsilon)} = S_0 e^{rT} + \epsilon k_0 = S_T^{(0)} + \epsilon k_0$ であるから (3.1) の左辺は

$$\mathbf{E}[(S_T^{(\epsilon)} - K^{(\epsilon)})_+] = \epsilon \mathbf{E}[(F(\epsilon) - k_0)_+]$$

となる. 従って、

$$\mathbf{E}[(F(\epsilon) - k_0)_+] \sim c_1 + \epsilon c_2 + \cdots \tag{3.5}$$

を与えることを考えればよい. また

$$f_n = \frac{1}{(n+1)!} U_T^{(n+1)}$$

と置くと、(3.3) より、任意の $n,k,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ と $p\geq 2$ に対して

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\frac{|F(\epsilon)-\sum_{l=0}^{n}\epsilon^l f_l|_{k,l,p}}{\epsilon^{n+1}}<\infty.$$

が成り立つことも分かる.

さて、(3.4) で定義した $F(\epsilon)$ が一様非退化性条件を満たすための十分条件について説明する. $F(\epsilon)$ を微分すると

$$D_tF(\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}D_tS_T^{(\epsilon)}=\partial_x S_{t,T}^{(\epsilon)}(S_{t-}^{(\epsilon)})\ a(S_{t-}^{(\epsilon)}),$$

となる. ここで $S_{t,T}^{(\epsilon)}=S_T^{(\epsilon)}\circ S_t^{(\epsilon)-1}$. だから、

$$\inf_{x\in\mathbf{R}}a(x)>c_0$$

とすると、

$$\Xi(\epsilon,\rho)^{-1}\circ\varepsilon_{\mathbf{u}}^{+}\leq\int_0^T|D_tF(\epsilon)|^{-2}\circ\varepsilon_{\mathbf{u}}^{+}\,dt\leq c_0^{-2}\int_0^T|\partial_x S_{t,T}^{(\epsilon)}(S_{t-}^{(\epsilon)})|^{-2}\circ\varepsilon_{\mathbf{u}}^{+}dt.$$

となり、$F(\epsilon)$ は一様非退化性条件を満たすことが分かる. ($\partial_x S_{t,T}^{(\epsilon)}(S_{t-}^{(\epsilon)})$ の可積分性については、[10] の Lemma 6.2 を参照.)

3.3 コールオプションの漸近展開について

さて、第 1.1 章で述べたように、$\phi(x)=(x-k_0)_+$ は超関数のクラス $\mathbf{H}_{-\infty}$ には属していない. そこで、まず

$$\mathcal{F}(x-k_0)_+=\mathcal{F}\left((1+x^2)\frac{(x-k_0)_+}{1+x^2}\right)=(1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+x^2}\right)$$

と書けることに注意する. ここで、 $\frac{(x-k_0)_+}{1+x^2}$ は二乗可積分であるから $\mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+x^2}\right)$ も二乗可積分である. また、微分は超関数の意味での微分である. このことから、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(F(\epsilon)-k_0)_+]&=\lim_{R\to\infty}\mathbf{E}[(F(\epsilon)-k_0)_+\,;\,F(\epsilon)\leq R]\\&=\lim_{R\to\infty}\langle\mathcal{F}((x-k_0)1_{\{x\leq R\}}),\ \mathbf{E}[e^{i\cdot F(\epsilon)}]\rangle\\&=\lim_{R\to\infty}\int\mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+1_{\{x\leq R\}}}{1+|x|^2}\right)(\xi)\ (1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]d\xi\\&=\int\mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+|x|^2}\right)(\xi)\ (1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]d\xi\end{aligned}$$

と書ける. 従って特性関数の漸近展開 (1.9) の代わりに、

$$(1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]$$

の漸近展開を考えればよい.

次の定理は (1.9) を修正したものである. 証明は (1.9) と同様にできるが、多くの準備を要するので省略する.

Theorem 3 $F(\epsilon)=\frac{S_T^{(\epsilon)}-S_T^{(0)}}{\epsilon}$ が一様非退化性条件を満たすとする.
また、$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ が存在して、任意の $n,k,l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ と $p \geq 2$ に対して

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \frac{|F(\epsilon)-\sum_{l=0}^{n}\epsilon^l f_l|_{k,l,p}}{\epsilon^{n+1}} < \infty.$$

を満たすとする. このとき任意の $s>0$ に対して

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int \left|\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right) R_n(\xi,\epsilon)\right|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi < \infty,$$

但し、ここで R_n は特性関数の Taylor 展開の剰余項

$$R_n(\xi,\epsilon) = \mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}] - \sum_{l=0}^{n} \epsilon^l \sum_{m=0}^{l} \frac{(i\xi)^m}{m!} \sum_{i_1+\cdots i_m = l} \mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m} e^{i\xi f_0}]$$

である.

この定理を用いれば、(3.5) の近似式は

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[(F(\epsilon)-k_0)_+] \\
&= \int \mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+|x|^2}\right)(\xi)\ (1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathbf{E}[e^{i\xi F(\epsilon)}]d\xi \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \int \mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+|x|^2}\right)(\xi)(1-\frac{d^2}{d\xi^2}) \sum_{m=0}^{n} \frac{(i\xi)^m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m} e^{i\xi f_0}]\, d\xi \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \langle (1-\frac{d^2}{d\xi^2})\mathcal{F}\left(\frac{(x-k_0)_+}{1+|x|^2}\right),\ \sum_{m=0}^{n} \frac{(i\xi)^m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m} e^{i\xi f_0}]\,\rangle \\
&\sim \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^n \langle \mathcal{F}(x-k_0)_+,\ \sum_{m=0}^{n} \frac{(i\xi)^m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \mathbf{E}[f_{i_1}\cdots f_{i_m} e^{i\xi f_0}]\,\rangle \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n c_n
\end{aligned}$$

となる. 最後の式では

$$\begin{aligned}
&c_0 = \langle\, \mathcal{F}(x-k_0)_+, \mathbf{E}[e^{i\xi f_0}]\,\rangle \qquad c_1 = \langle\, \mathcal{F}(x-k_0)_+\,,\ i\xi\mathbf{E}[f_1 e^{i\xi f_0}]\rangle \\
&c_2 = \langle\, \mathcal{F}(x-k_0)_+\,,\ \frac{(i\xi)^2}{2}\mathbf{E}[f_1^2 e^{i\xi f_0}] + \mathbf{E}[f_2 e^{i\xi f_0}]\rangle, \dots,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

と置いた.

4 係数の公式について

コールオプションの漸近展開に現れる係数は (3.6) で与えられるが、もう少し具体的な公式を与えることができる. ここでは c_0, c_1 についての公式を説明する. 関数 $(x-k_0)_+$ のフーリエ変換は、

(1.10) で与えられるから、関数 $\mathbf{E}[e^{i\xi f_0}], \mathbf{E}[f_1 e^{i\xi f_0}]$ を求めればよい. 線形確率微分方程式 $U_t^{(1)}$ を解いてみると、

$$\begin{aligned} f_0 = U_T^{(1)} &= \int_0^T a(S_0e^{rs})\,dW_s + \int_0^T \int b(S_0e^{rs}, z)\tilde{N}(ds\,dz) \\ &+ \int_0^T \frac{1}{2}a'a(S_0e^{rs})\,ds + \int_0^T \int [\,\phi_1^z(S_0e^{rs}) - S_0e^{rs} - za(S_0e^{rs})1_{\{|z|<1\}}\,]\mu(dz)\,ds \\ &= \int_0^T a(S_0e^{rs})\,dW_s + \int_0^T \int (\phi_1^z(y) - y)\tilde{N}(ds\,dz) + \int_0^T c(S_0e^{rs})ds \end{aligned}$$

となる. ここで、

$$\begin{aligned} b(y,z) &= \phi_1^z(y) - y \\ c(y) &= \frac{1}{2}a'(y)a(y) + \int [\,\phi_1^z(y) - y - za(y)1_{\{|z|<1\}}\,]\,\mu(dz) \end{aligned}$$

と置いた. f_0 の特性関数については、

$$\mathbf{E}[e^{i\xi f_0}] = \exp\{-\frac{\xi^2}{2}\int_0^T a^2(S_0e^{rs})ds + \int_0^T \int (e^{i\xi b(S_0e^{rs},z)} - 1)\mu(dz)\,ds + i\xi\int_0^T c(S_0e^{rs})ds\}$$

と求めることができる. 次に、f_1 については、

$$f_1 = \frac{1}{2}U_T^{(2)} = \int_0^T a'(S_0e^{rs})U_{s-}^{(1)}\,dW_s + \int_0^T \int b'(S_0e^{rs}, z)U_{s-}^{(1)}\tilde{N}(ds\,dz) + \int_0^T c'(S_0e^{rs})U_{s-}^{(1)}ds$$

となり、確率多重積分の和で表されることがわかる.

ところで、ウィーナー積分についての次のカオス展開はよく知られている.

$$e^{i\xi\int_0^T \psi(s)\,dW_s} = \mathbf{E}[e^{i\xi\int_0^T \psi(s)\,dW_s}]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^n}{n!}I_n(\otimes^n\psi),$$

但し、ここで I_n は多重 Wiener 積分

$$I_n(\otimes^n\psi) = \int_{[0,T]^n}\psi(t_1)\cdots\psi(t_n)\,dW_{t_1}\,dW_{t_2}\cdots dW_{t_n}$$

を表すものとする. また、ポアソン配置に関する積分については、Surgailis [22] による次の展開公式

$$e^{i\xi\int_0^T\int g(s,x)\tilde{N}(ds\,dx)} = \mathbf{E}[e^{i\xi\int_0^T\int g(s,x)\tilde{N}(ds\,dx)}]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}J_n(\otimes^n(e^{i\xi g} - 1))$$

が知られている. ここで、J_n はポアソン配置に関する多重積分

$$J_n(\otimes^n\phi) = \int_{([0,T]\times\mathbf{R})^n}\phi(t_1,z_1)\cdots\phi(t_n,z_n)\,\tilde{N}(dt_1\,dz_1)\cdots\tilde{N}(dt_n,dz_n)$$

である.

確率多重積分についての直交性

$$\mathbf{E}[I_n(f)I_m(g)] = n!m!\langle f, g\rangle\, 1_{\{n=m\}}$$
$$\mathbf{E}[J_n(\phi)J_m(\psi)] = n!m!\langle \phi, \psi\rangle\, 1_{\{n=m\}}$$

が成り立つことと、またブラウン運動 W_t とポアソン配置 $N(ds\,dz)$ が独立であることを用いると

$$\mathbf{E}[f_1 e^{i\xi f_0}] = i\xi h_1(\xi)\left[\int_0^T\int_0^u S_0 e^{r(T-s)}[\,g_1(s,\xi)g_2(u,\xi) + a^2(S_0e^{rs})a'(S_0e^{ru})a(S_0e^{ru})\,]ds\,du \right.$$
$$\left. + \int_0^T\int_0^u S_0 e^{r(T-s)}\tilde{b}(s,\xi)\hat{b}(u,\xi)ds\,du\right]$$

と計算できる. 但し、ここで

$$g_1(u,\xi) = i\xi a^2(S_0e^{ru}) + \tilde{b}(S_0e^{ru},\xi) + c(e^{ru})$$
$$g_2(u,\xi) = i\xi a'(S_0e^{ru})a(S_0e^{ru}) + \hat{b}(S_0e^{ru},\xi) + c'(S_0e^{ru})$$

$$\tilde{b}(y,\xi) = \int b(y,z)(e^{i\xi b(e^{ru},z)} - 1)\mu(dz)$$
$$\hat{b}(y,\xi) = \int b'(y,z)(e^{i\xi b(e^{ru},z)} - 1)\mu(dz)$$

と置いた. c_2 以降の係数も、同様の手法によって導くことができる.

参考文献

[1] Bichteler, K., Gravereaux, J.B., Jacod,J., Malliavin calculus for processes with jumps. Stochastic Monographs, vol.2, M. Davis, ed., London, Gordon and Breach 1987.

[2] Bismut, J.M. . Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 63, 1983, 147-235.

[3] Carlen, E., Pardoux, E. (1990). Differential calculus and integration by parts on Poisson space, In S. Albeverio et al., editor, Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988) Math.appl, 59, (Kluwer Acad. Publ.) pp. 63–73.

[4] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., Yor, M. (2002). The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. Journal of Business, 75, 2, pp.305-332.

[5] Davis, M. H. A., Johansson, M. (2006). Malliavin Monte Carlo Greeks for jump diffusions. Stochastic Process. Appl. 116, pp.101–129.

[6] Fujiwara, T. and H. Kunita, Stochastic differential equation of jump type and Lévy processes in diffeomorphisms group, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 71–106.

[7] Hayashi, M. . Asymptotic expansions for functionals of a Poisson random measure. Journal of Mathematics of Kyoto university, vol. 48, no. 1 (2008), pp.91–132.

[8] Hayashi, M., Coefficients of Asymptotic Expansions of SDE with Jumps, to appear.

[9] Hayashi, M., Ishikawa, Y., Composition with distributions of Wiener-Poisson variables and its asymptotic expansion to appear.

[10] Ishikawa, Y. and Kunita, H., Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps, Stochastic processes and their applications 116 (2006) 1743–1769.

[11] El-Khatib,Y. ,Privault, N. (2004) Computations of Greeks in a market with jumps via the Malliavin calculus. Finance Stoch. 8 pp.161–179.

[12] Kim Y.-J. and Kunitomo N., Pricing Options under Stochastic Interest Rates: A New Approach, Asis pacific financial markets 6 (1999), 49–70.

[13] Kunitomo, N. and Takahashi, A., The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, Math. Finance 11 (2001), 117–151.

[14] 国友直人、高橋明彦「数理ファイナンスの基礎：マリアバン解析と漸近展開の応用」2003 年，東洋経済新報社

[15] Kunitomo, N. and Takahashi, A., On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis, Ann., Appl. Probab. 13 (2003), 914–952.

[16] Kunitomo, N. and Takahashi, A., Applications of the asymptotic expansion approach based on Malliavin-Watanabe calculus in financial problems, Stochastic processes and applications to mathematical finance, 195–232, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004

[17] León, J., Solé, J.L., Utzet, F., Vives, J. (2002). On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps, Finance and Stochastics. 6, pp.197–225.

[18] Nualart, D., The Malliavin calculus and related topics, Springer, 1995, 2nd ed. 2006.

[19] Picard, J., On the existence of smooth densities for jump processes, Probab. Theor. Relat. Field 105, 481-511 (1996).

[20] Ph. Protter, Stochastic integration and differential equations, Second edition, Version 2.1, Corrected third printing, Stochastic Modelling and Applied Probability 21, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[21] Shigekawa, I., Stochastic analysis, Translated from the 1998 Japanese original by the author, Translations of Mathematical Monographs, 224. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[22] Surgailis, D. (1984). On multiple Poisson Stochastic integrals and associated Markov semigroups: Probability and Mathematical Statistics, vol. 3, Fasc. 2 p.217–239.

[23] Yoshida, N., Asymptotic expansion for statistics related to small diffusions, J. Japan Statist. Soc. 22 (1992), no. 2, 139–159.

[24] Yoshida, N., Conditional expansions and their applications. (English summary) Stochastic Process. Appl. 107 (2003), no. 1, 53–81.

[25] Watanabe, S., Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels, Ann. Probab. 15 (1987), 1–39.