

# 臙装配位の安定化と Littlewood–Richardson タブロー

尾角 正人 (阪大基礎工)  
坂本 玲峰 (東京理大理)

## 1 序論

$\mathfrak{g}$  をアフィンリー代数、 $I$  をその Dynkin 図の頂点のラベルとする。 $\mathfrak{g}_0$  を  $\mathfrak{g}$  の古典部分代数、すなわち Dynkin 図の頂点を [10] にしたがってラベル付けした場合に  $I_0 := I \setminus \{0\}$  の頂点のみに対応する有限次元単純リー代数とする。 $U'_q(\mathfrak{g})$  を  $\mathfrak{g}$  から次数作用素を取り除いた代数に対応する量子普遍包絡代数とする。有限次元  $U'_q(\mathfrak{g})$ -加群のなかで Kirillov–Reshetikhin (KR)-加群と呼ばれる特に良い性質を持つクラスが存在し、そこでは  $T(Q, Y)$ -system、フェルミ型指標公式等といった良い性質が成り立つことが知られている。これらの事実については例えば [1, 9, 14, 20] やそこで引用されている文献をご参照いただきたい。さて [7, 6] において KR-加群に対する結晶基底  $B^{r,s}$  ( $r \in I_0, s \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) の存在を仮定した上で以下のような一次元状態和が定義された：

$$X_{\lambda, B}(q) = \sum_{b \in B} q^{D(b)}$$

ここで和は  $B = B^{r_1, s_1} \otimes \dots \otimes B^{r_m, s_m}$  におけるウェイト  $\lambda$  の  $I_0$ -最高ウェイト元全体にわたり、また  $D$  はエネルギー関数と呼ばれる  $B$  上のある  $\mathbb{Z}$ -値関数である (詳細な定義は文献 [6] の (3.9) 式を参照)。更に同文献では  $X$  はフェルミ型の明示公式  $M$  を持つことが予想された ( $X = M$  予想)。この予想は  $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$  の場合 [13] で、代数  $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$  で全ての  $j$  に対して  $s_j = 1$  の場合は [26] において、また一般の非例外型代数の場合で全ての  $j$  に対して  $r_j = 1$  の場合は [27] において解決されている。関連する他の発展として、一般の非例外型代数に対して KR クリスタルの存在が [21, 23] において確認され、またそのアフィン柏原作用素の具体形が [2] およびそこで引用されている文献によって与えられたことを挙げておく。

$X$  に関するもう一つの興味深い恒等式として Shimozono と Zabrocki [29, 28] によって対称関数環上の  $q$ -変形作用素の研究から発見された  $X = K$  予想がある。 $\mathfrak{g}$  を非例外型とする。この時実は  $\mathfrak{g}$  のランクが十分大きい場合  $X$  は  $\mathfrak{g}$  そのものに依存するのではなく、Dynkin 図の 0 番目の頂点の付き方のみに依存することが示される (表 1 参照)。そこで  $X_{\lambda, B}^{\diamond}(q)$  ( $\diamond = \emptyset, \square, \square, \square$ ) によってタイプ  $\diamond$  の  $\mathfrak{g}$  に対する一次元状態和を表すこととしよう。そのとき [28, 18, 19] によって解決された  $X = K$  予

表 1:

| ◇ | $\mathfrak{g}$ of kind ◇               |
|---|--|
| ∅ | $A_n^{(1)}$                            |
| □ | $D_{n+1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}$          |
| ▣ | $C_n^{(1)}$                            |
| ⊠ | $A_{2n-1}^{(2)}, B_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ |

想とは、◇ ≠ ∅ とする時以下の恒等式が成り立つことを主張する：

$$X_{\lambda, B}^{\diamond}(q) = q^{-\frac{|B| - |\lambda|}{|\diamond|}} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{|B| - |\lambda|}^{\diamond}, \eta \in \mathcal{P}_{|B|}^{\square}} c_{\lambda\mu}^{\eta} X_{\eta, B}^{\square}(q^{\frac{2}{|\diamond|}}) \quad (1)$$

ここで  $|B| = \sum_{i=1}^m r_i s_i$ 、 $\mathcal{P}_N^{\diamond}$  は  $N$  の分割のうち対応するヤング図を基本要素 ◇ によって埋め尽くすことができるようなもの全体の集合、そして  $c_{\lambda\mu}^{\eta}$  は Littlewood-Richardson 係数を表す。なお [19] における  $\overline{X}_{\lambda, B}^{\diamond}(q)$  は現在の  $X_{\lambda, B}^{\diamond}(q)$  とは  $\overline{X}_{\lambda, B}^{\diamond}(q) = X_{\lambda, B}^{\diamond}(q^{-1})$  という関係になっていることに注意。

ところで  $X = M$  予想を仮定すると同様の恒等式がランクに対する同じ仮定の下で  $M$  に対しても成り立っているものと期待される。以下本講義録ではこの点について最近著者らによって得られた進展について [22] に基づいて報告したい。より正確に述べる為に、 $\mathfrak{g}$  を非例外型代数のいずれかとし、またその代数のランクは十分大きいものとする。その時確かにフェルミ型公式  $M$  は ◇ のみに依存し、更にそのフェルミ型公式を  $M^{\diamond}(\lambda, \mathbf{L}; q)$  と表せば ◇ ≠ ∅ に対して以下の恒等式が成り立つ：

$$M^{\diamond}(\lambda, \mathbf{L}; q) = q^{-\frac{|\mathbf{L}| - |\lambda|}{|\diamond|}} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{|\mathbf{L}| - |\lambda|}^{\diamond}, \eta \in \mathcal{P}_{|\mathbf{L}|}^{\square}} c_{\lambda\mu}^{\eta} M^{\square}(\eta, \mathbf{L}; q^{\frac{2}{|\diamond|}}). \quad (2)$$

ここで  $L_i^{(a)}$  を  $B$  における  $B^{a,i}$  の個数とする時  $\mathbf{L} = (L_i^{(a)})_{a \in I_0, i \in \mathbb{Z}_{>0}}$ 、また  $|\mathbf{L}| = \sum_{a \in I_0, i \in \mathbb{Z}_{>0}} a i L_i^{(a)}$  と書いた。

式 (2) の証明のあらましを述べると以下のようなになる。まずフェルミ型公式を以下のように書き直す：

$$M^{\diamond}(\lambda, \mathbf{L}; q) = \sum_{(\nu^{\bullet}, J^{\bullet}) \in \text{RC}^{\diamond}(\lambda, \mathbf{L})} q^{c(\nu^{\bullet}, J^{\bullet})}$$

ここで各  $\mathfrak{g}$  においてランクを十分大きくすると臙装配位は本質的には ◇ のみに依存することが示され、それを  $\text{RC}^{\diamond}$  と表した。臙装配位とはヤング図  $\nu^{(a)}$  とその各行に与えられた整数  $J^{(a)}$  の組のことで、詳しくは本文第 2 節をご参照いただきたい。また関数  $c$  は臙装配位上のある双線型形式でチャージと呼ばれる（正確な定義は [22]

の式 (2.11) を参照)。その時我々の議論の最も主要な部分は  $\diamond \neq \emptyset$  に対する以下の全単射の構成である：

$$\Psi : \text{RC}^\diamond(\lambda, \mathbf{L}) \longrightarrow \bigsqcup_{\substack{\mu \in \mathcal{P}_{|\mathbf{L}|-|\lambda|}^\diamond \\ \eta \in \mathcal{P}_{|\mathbf{L}|}^\square}} \text{RC}^\square(\eta, \mathbf{L}) \times \text{LR}_{\lambda\mu}^\eta,$$

ここで  $\text{LR}_{\lambda\mu}^\eta$  は形が  $\eta/\lambda$ 、ウェイトが  $\mu$  の Littlewood–Richardson タブローの全体を表す (例えば [4] 参照)。以下写像  $\Psi$  の概略を述べる。ランクが十分大きい場合にはある  $k$  が存在して、 $a \geq k$  なる全ての  $a$  に対するヤング図  $\nu^{(a)}$  が同じ形になる事を示すことができる。この様な艤装配位の上で、元々の KKR アルゴリズムの場合に  $a = 1$  から出発して左から右へ各  $\nu^{(a)}$  のます目を取り除いて行くのと全く同様のアルゴリズムを左右逆にした手順を導入し、それによって最も大きな  $a$  から出発して右から左へとます目を取り除いていく。この操作を繰り返していくと最終的に右側のダイアグラムは全て空になり、その時確かに  $A$  型の艤装配位の条件を満足することが確かめられる。さらにこの操作に対する自然なレコーディングタブローを定めると最終的に Littlewood–Richardson タブローが得られる。これら一連の操作は各ステップにおいて逆向きにすることが可能であり、それがこの写像の逆写像を与える。

さてこのように構成された全単射について、 $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  を  $\Psi$  による  $(\nu^\circ, J^\circ)$  の像の第一成分とする時

$$c(\nu^\bullet, J^\bullet) = c(\nu^\circ, J^\circ) - \frac{|\mathbf{L}| - |\lambda|}{|\diamond|}$$

という関係式を証明する。ここから (2) が従う。更に (1)、(2) および [13] の結果を合わせると  $\diamond \neq \emptyset$  に対して

$$X_{\lambda, B}^\diamond(q) = M^\diamond(\lambda, \mathbf{L}; q)$$

が得られる。すなわち  $\mathfrak{g}$  が非例外型でかつランクが十分大きい場合に  $X = M$  予想を解決したことになる。

我々の論文に関連する組み合わせ論的全単射を以下の図式の形でまとめておこう：

$$\begin{array}{ccc} \{\text{type } \mathfrak{g} \text{ path}\} & & \{\text{type } A_n^{(1)} \text{ path}\} \times \text{LR} \\ \uparrow \Phi^{\mathfrak{g}} & & \uparrow \Phi^A \\ \{\text{type } \mathfrak{g} \text{ RC}\} & \xleftrightarrow{\Psi} & \{\text{type } A_n^{(1)} \text{ RC}\} \times \text{LR} \end{array}$$

ここで “path” は  $\otimes_i B^{r_i, s_i}$  の最高ウェイト元を、“RC” は艤装配位を表す。我々の写像  $\Psi$  は下辺に相当し、ランクが高い場合に存在する。全単射  $\Phi^A$  は [11, 12, 13] によって完全に確立され、 $A_n^{(1)}$  型 RC-全単射と呼ばれる。全単射  $\Phi^{\mathfrak{g}}$  のアルゴリズムは以下の場合に明示的に知られている：

- 一般の非例外型代数  $\mathfrak{g}$  で  $(B^{1,1})^{\otimes L}$  型のパス [24]、

- $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$  で  $\otimes B^{r_i,1}$  型のパス [26]、
- 一般の非例外型代数  $\mathfrak{g}$  で  $\otimes B^{1,s_i}$  型パス [27].

従って全単射  $\Phi^{\mathfrak{g}}$  が既に確立されている場合には我々の全単射  $\Psi$  と組み合わせることにより  $\mathfrak{g}$  型パスの集合および  $A_n^{(1)}$  型パスと Littlewood–Richardson タブローの積集合の間に全単射が構成されたことになる。関連する組み合わせ論的諸問題については [28] を参照されたい。

実は代数のランクに関する仮定を置かなくても全単射  $\Phi^{\mathfrak{g}}$  自体は存在していると期待している。もしそのような写像が存在すれば  $X = M$  予想の組み合わせ論的な証明を与えることとなる。更ににそのような全単射は、 $X = M$  予想の物理的な背景を与えていると考えられている箱玉系 (例えば [3, 5, 8] などを参照) と呼ばれる超離散可積分系の研究に対する自然な枠組みを提供するものと期待される。より正確に述べると、現在までに  $A_n^{(1)}$  型箱玉系に関しては臙装配位によって完全な作用角変数の組を与えられることが分かっている [15] ( $D_n^{(1)}$  型への拡張に関しては [17] を参照)。関連する話題として、チャージ関数  $c(\nu^{\bullet}, J^{\bullet})$  の超離散類似を導入することにより箱玉系の初期値問題が一般的に解決されている [16, 25]。これらの性質は臙装配位が KR-クリスタルの R-不変量に対する自然な表示を与えていることを示唆している。従って全単射  $\Phi^{\mathfrak{g}}$  の構成は可積分系、組み合わせ論、表現論にまたがる将来の重要な課題と考えられる。

本講義録の構成は以下のとおりである。第2節では臙装配位に関する最小限の準備を行う。第3節において写像  $\Psi$  の定義を与える。第4節では写像の持つ主要な性質を述べる。第5節では非自明な計算例を与える。

## 2 臙装配位の安定化

アルゴリズムを定義するために、ランク  $n$  の非例外型代数に対する臙装配位について必要な範囲で準備を行う。臙装配位とは次のような組み合わせ論的対象である：序論で導入した  $\mathbf{L} = (L_i^{(a)})_{a \in I_0, i \in \mathbb{Z}_{>0}}$  およびそれに加えて

$$(\nu^{\bullet}, J^{\bullet}) = \{(\nu^{(1)}, J^{(1)}), (\nu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)})\}$$

ここで  $\nu^{(a)} = (\nu_1^{(a)}, \nu_2^{(a)}, \dots, \nu_{i_a}^{(a)})$  ( $1 \leq a \leq n$ ) は正整数列 (configuration と呼び通常ヤング図によって表示するが行の並び方は本質的ではない)、また  $J^{(a)} = (J_1^{(a)}, J_2^{(a)}, \dots, J_{i_a}^{(a)})$  は  $\nu^{(a)}$  の各列に対して与えられる整数列 (rigging と呼ぶ) である。ここで通常定義ではこれらの数字の組に対して更に考えている代数に応じたある条件を課すことになるが、ここでそれらの関係式を全て列挙する必要はない。実際代数のランクが十分大きい場合の臙装配位は単純化された構造をもつことが [22] において示されている。そこで以下代数のランク  $n$  は十分大きいものと仮定しよう。

その時十分大きな  $N (\ll n)$  を、ある整数  $N' \ll N$  が存在して  $\nu^{(N')} = \nu^{(N'+1)} = \dots$  となるように選ぶことができる。すると臙装配位のうち  $N < a$  に対する  $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$  の情報は本質的に無視することができ、従って臙装配位の残りの部分のみを考えれば十分であることが知られている [22]。この場合の vacancy number  $p_i^{(a)}$  ( $a \leq N$ ) を以下のように定義する：

$$p_i^{(a)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} L_k^{(a)} \min(i, k) + Q_i^{(a-1)} - 2Q_i^{(a)} + Q_i^{(a+1)}$$

ここで  $Q_i^{(a)} = \sum_j \min(i, \nu_j^{(a)})$  とする。更に現在の設定では  $\nu^{(a)} \in \mathcal{P}^\diamond$  となる事が分かり、また  $N \leq a$  に対して  $p_i^{(a)} = 0$  となる。 $a \leq N$  に対しては以下の条件を課す：

$$0 \leq J_i^{(a)} \leq p_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}, \quad (\forall a, i).$$

ここで二つ目の不等式が等式  $J_i^{(a)} = p_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}$  となる場合、そのような  $\nu_i^{(a)}$  を特異 (singular) 行と呼ぶ。このような代数のランクが大きい時の  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  の振る舞いを臙装配位の安定化と呼ぶことにする。[22] における元々の議論では以下の議論が実行できるための代数のランク  $n$  に関する詳細な評価を考察していた。本講義録ではそのような議論は全て同文献にゆだねることとして、 $a \approx n$  に対する  $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$  に関する技術的詳細は全て無視することとする。なお臙装配位が安定化している場合には  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  に対するウェイト  $\lambda$  を次のように定義することができる：

$$\lambda_a = \sum_{b \geq a, i \in \mathbb{Z}_{>0}} i L_i^{(b)} + |\nu^{(a-1)}| - |\nu^{(a)}|,$$

ここで  $\lambda_a$  は  $\lambda$  をヤング図によって表示したときの  $a$  番目の行の長さとする。記号  $\text{wt}(\nu^\bullet, J^\bullet)$  で  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  のウェイトを表すこととする。臙装配位が安定化している時、 $n$  近傍の情報を無視することにすれば、臙装配位は  $\diamond$  の種類のみ依存する。そこで以下安定化した臙装配位の集合を  $\text{RC}^\diamond(\lambda, \mathbf{L})$  と書くこととする。

### 3 アルゴリズム

この節の目標は本講義録の核となる写像  $\Psi$  および  $\tilde{\Psi}$  の記述である。大まかに言ってアルゴリズムは二つの部分からなっている：一つ目は臙装配位上でます目を取り除かないし付け加える操作であり、もう一つは臙装配位上の操作に対するレコーディングタブロー  $T$  の構成である。後者は最終的には LR タブローとなる。以下に与える定義は以上の区別に応じて二つに分けて行う。以下十分大きな整数  $N$  を前節のように選んで議論する。

定義 1 写像  $\delta_l$

$$\delta_l : (\nu^\bullet, J^\bullet) \mapsto \{(\nu^\bullet, J^\bullet), k\},$$

を以下のアルゴリズムで定義する。ここで  $l$  は  $\nu^{(N)}$  のある行の長さとする。

- (i)  $\nu^{(N)}$  の長さ  $l$  の行を一つ選ぶ。  $\nu^{(a)}$  ( $a < N$ ) の各行を以下のように帰納的に選んで行く。  $\nu^{(a)}$  のある行まで選んだと仮定する。その時左隣の  $\nu^{(a-1)}$  の中で  $\nu^{(a)}$  で選んだ行の長さと同じか大きい様な特異行の中で最も短いものを探す。もしそのような行が存在しないときには  $k = a$  とおいて手順を終了する。逆に存在する場合はそのような行のうちの任意の一つを選び手順を続行する。もし手順が終了しなかった場合は  $k = 1$  とおく。
- (ii) ステップ (i) で選んだ各行の右端のます目を取り除いて新しい  $\nu^\bullet$  とする。
- (iii) 新しい  $J^\bullet$  は以下のように定める。ステップ (ii) で変化しなかった行では元の rigging の値のままとする。一方変化した行については rigging は、考えている行に対して  $\nu^\bullet$  を用いて計算した vacancy number と等しい値とする。

## 定義 2 写像 $\Psi$

$$\Psi : (\nu^\bullet, J^\bullet) \mapsto \{(\nu^\bullet, J^\bullet), T\}$$

を次のように定義する。初期状態として  $T$  を  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  のウェイトを表す空のヤング図とする。  $h_i$  を  $\nu^{(N)}$  の (左から数えて)  $i$  番目の行の高さとし、また  $l = \nu_1^{(N)}$  とする。

- (i) 手順  $\delta_l$  を  $h_l$  回行う。手順  $\delta_l$  を行うごとに  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  と  $T$  を以下のように再帰的に再定義してゆく。  $\delta_l^{i-1}$  まで実行してその結果が  $\{(\nu^\bullet, J^\bullet), T\}$  であったとしよう。その結果に対してもう一回  $\delta_l$  を実行する：

$$\delta_l : (\nu^\bullet, J^\bullet) \mapsto \{(\nu^\bullet, J^\bullet), k\},$$

この際得られる結果から以下のように定める。新しい  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  は  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  で与える。また新しい  $T$  は直前の  $T$  の  $k$  行目の右側に文字  $i$  を付け加えたものとする。

- (ii) ステップ (i) と同様にして順に  $\delta_l^{h_l-1}, \dots, \delta_2^{h_2}, \delta_1^{h_1}$  を実行する。その時最終的に得られる  $(\nu^\bullet, J^\bullet)$  と  $T$  を写像  $\Psi$  の像とする。

次に写像  $\tilde{\Psi}$  のアルゴリズムの記述を行うが、これは最終的には  $\Psi$  の逆写像となる事が分かる。今回も  $n$  周辺で発生する技術的詳細は無視することにする。

## 定義 3 写像 $\tilde{\delta}_k$

$$\tilde{\delta}_k : (\nu^\bullet, J^\bullet) \mapsto (\nu^\bullet, J^\bullet)$$

を以下のアルゴリズムで定義する。ここで  $k$  は  $k \leq N$  を満たす整数とする。

- (i)  $\nu^{(k)}$  から出発して、  $\nu^{(a)}$  ( $k < a$ ) の行を以下のように帰納的に選んでいく。手順を開始するために、  $\nu^{(k-1)}$  の無限に長い行を選んだものと仮定する。帰納法の過程として  $\nu^{(a-1)}$  のある行まで選んだものとしよう。その時  $\nu^{(a)}$  の行の中

で  $\nu^{(a-1)}$  で選んだ行の長さを超えないような特異な行のうち最も長いものを探す。そのような行が存在しないときは  $\nu^{(a)}$  の長さ 0 の行を選んだものとして手順を進める。一方そのような行が存在するときはそのような特異な行のうち一つを選び手順を続ける。

- (ii)  $\nu^*$  はステップ (i) で選んだ各行に箱を一つ付け加えることによって得られる。もし長さ 0 の行が選ばれていたら、そのパーティション  $\nu^{(a)}$  の下に長さ 1 の新しい行を付け加える。
- (iv) 新しい rigging  $J^*$  は以下のように定める。ステップ (ii) で変化しなかった行に対しては元の rigging の値のままとする。一方ステップ (ii) で変化した行に対しては、新しい  $\nu^*$  を用いて計算した対応する vacancy number の値と等しくなるように定める。

定義 4 写像  $\tilde{\Psi}$

$$\tilde{\Psi} : \{(\nu^*, J^*), T\} \mapsto (\nu^*, J^*)$$

を以下のように定める。

- (i)  $h_1$  を  $T$  に含まれる最大の整数とする。この  $h_1$  に対して以下の手続きを行う。全ての文字  $h_1$  の中で最も右にあるものを選び固定する。同じ手順を文字  $h_1 - 1, h_1 - 2, \dots, 2, 1$  に対して繰り返す。ここで固定された  $T$  の  $h_1$  個の文字を第 1 グループと呼ぶ。  $T$  から第 1 グループの文字を全て取り除き、同じ手順を新しい  $T$  に対して繰り返す。そうして選ばれた新しいグループを第 2 グループと呼ぶ。この手順を再帰的に繰り返し、  $T$  の全ての文字をグループ分けする。グループの総数を  $l$ 、  $i$  番目のグループの要素の総数を  $h_i$ 、  $i$  番目のグループの文字  $j$  の位置を ( $T$  の上から数えて)  $k_{i,j}$  行目とする。
- (ii) 写像  $\tilde{\Psi}$  の像を以下のように定める：

$$(\nu^*, J^*) = \tilde{\delta}_{k_{l,1}} \cdots \tilde{\delta}_{k_{2,1}} \tilde{\delta}_{k_{2,2}} \cdots \tilde{\delta}_{k_{2,h_2}} \tilde{\delta}_{k_{1,1}} \tilde{\delta}_{k_{1,2}} \cdots \tilde{\delta}_{k_{1,h_1}} (\nu^*, J^*).$$

## 4 主要な性質

議論の本質的な部分は以下の写像  $\Psi$  および  $\tilde{\Psi}$  の well-definedness の証明である ([22] 参照)。

定理 1  $(\nu^*, J^*) \in RC^\diamond$  とし、また代数のランク  $n$  は十分大きいとする。その時写像  $\Psi$

$$\Psi : (\nu^*, J^*) \mapsto \{(\nu^*, J^*), T\}$$

は well-defined である。より正確には  $(\nu^\bullet, J^\bullet) \in \text{RC}^\varnothing$  であり、また LR タブロー  $T \in LR_{\lambda\mu}^\eta$  は以下の性質を満たす：

$$\lambda = \text{wt}(\nu^\bullet, J^\bullet), \quad \mu = \nu^{(N)}, \quad \eta = \text{wt}(\nu^\bullet, J^\bullet).$$

定理 2  $(\nu^\bullet, J^\bullet) \in \text{RC}^\varnothing$  とし、また  $T$  は以下の三つの性質を満たすような LR タブローとする： $T \in LR_{\lambda\mu}^\eta$  と表す時  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}^\diamond$  および  $\eta = \text{wt}(\nu^\bullet, J^\bullet)$  を満たす。その時写像  $\tilde{\Psi}$

$$\tilde{\Psi} : \{(\nu^\bullet, J^\bullet), T\} \mapsto (\nu'^\bullet, J'^\bullet),$$

は well-defined である。より正確には  $(\nu'^\bullet, J'^\bullet) \in \text{RC}^\diamond$ 、 $\text{wt}(\nu'^\bullet, J'^\bullet) = \lambda$  および  $\nu'^{(N)} = \mu$  が成り立つ。

構成からアルゴリズム  $\delta$  および  $\tilde{\delta}$  は各ステップで互いに逆の手順となっている。従って上記二つの定理から以下の主定理が得られる。

定理 3  $(\nu^\bullet, J^\bullet) \in \text{RC}^\diamond$  とする。代数のランク  $n$  は十分大きいものとする。その時写像  $\Psi$  は集合  $\text{RC}^\diamond$  および  $\text{RC}^\varnothing$  と LR タブローの積集合の間に以下のような全単射を定める：

$$\begin{aligned} \Psi : (\nu^\bullet, J^\bullet) &\mapsto \{(\nu'^\bullet, J'^\bullet), T\}, \\ (\nu^\bullet, J^\bullet) \in \text{RC}^\diamond(\lambda, \mathbf{L}), \quad \{(\nu'^\bullet, J'^\bullet), T\} &\in \text{RC}^\varnothing(\eta, \mathbf{L}) \times LR_{\lambda\mu}^\eta, \end{aligned}$$

ここで  $\lambda, \mu, \eta$  は次の性質を満たす：

$$\lambda = \text{wt}(\nu^\bullet, J^\bullet), \quad \mu = \nu^{(N)}, \quad \eta = \text{wt}(\nu'^\bullet, J'^\bullet).$$

逆写像は  $\Psi^{-1} = \tilde{\Psi}$  によって与えられる。

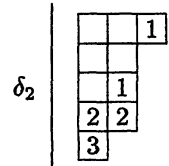
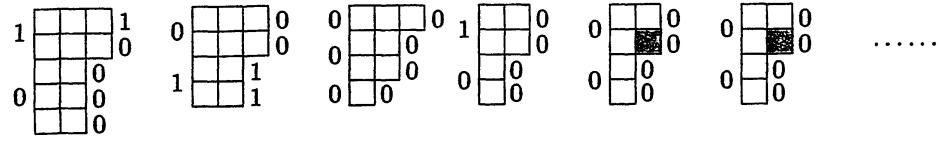
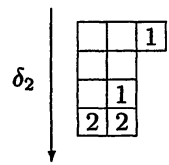
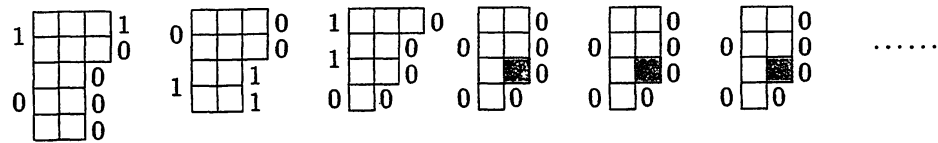
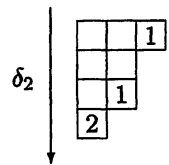
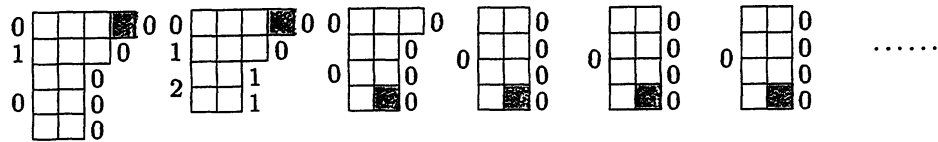
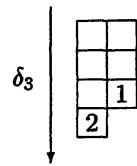
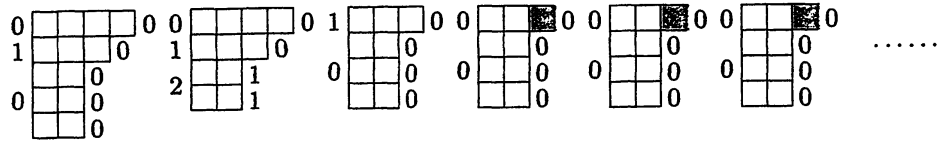
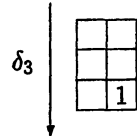
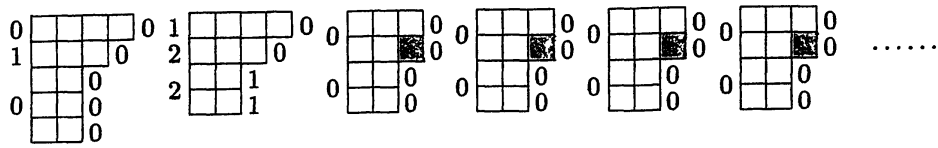
## 5 写像の例

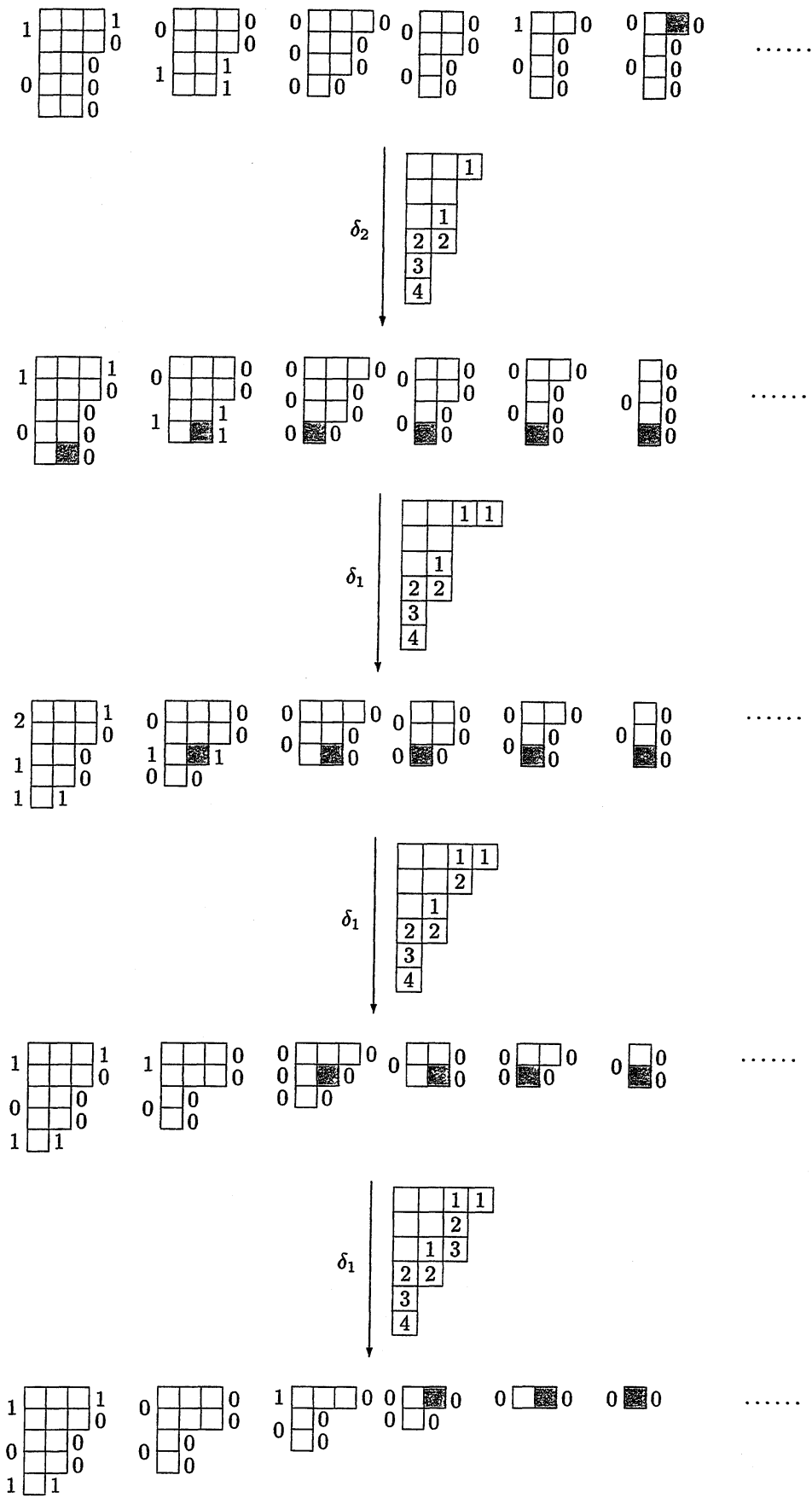
より一般の場合もアルゴリズムは大体同じなのでここでは臙装配位と結晶基底のテンソル積の間の全単射 [24, 27] が既に知られている場合の計算例を示すこととする。  $D_n^{(1)}$  ( $n \geq 8$ ) 型  $(B^{1,3})^{\otimes 3} \otimes (B^{1,2})^{\otimes 2} \otimes (B^{1,1})^{\otimes 2}$  テンソル積の以下の元を考える：

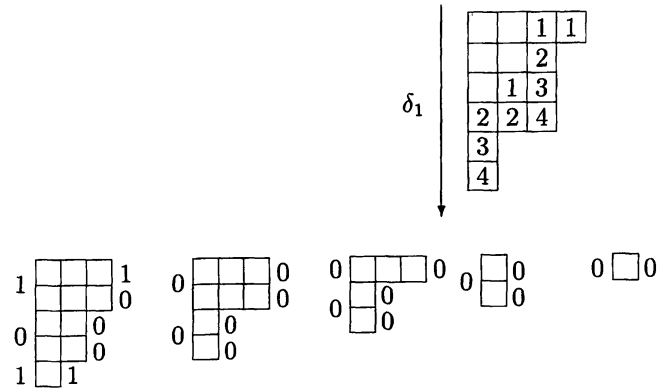
$$p = \boxed{1\ 1\ 1} \otimes \boxed{2\ \bar{1}\ \bar{1}} \otimes \boxed{1\ 2\ \bar{2}} \otimes \boxed{2\ 3} \otimes \boxed{2\ \bar{2}} \otimes \boxed{\bar{2}} \otimes \boxed{2}.$$

ここで  $R$  行列で同型な元は全て同一の臙装配位に対応することに注意する ([27] 定理 8.6 参照)。その時  $D_8^{(1)}$  型の場合の写像  $\Psi$  は以下のように計算される。以下の図では次のような記述をする。一番最初の臙装配位は上で与えた元  $p$  に対応する。ここでヤング図の各行の左側に添えた数は対応する vacancy number を、また右側の数は rigging を表す。また灰色の印をつけた箱は矢印の左側で指定されたそれぞれの操作  $\delta$  によって取り除かれる箱を表す。各段階で得られるレコーディングタブロー  $T$  はそれぞれの矢印の右側に与えた。









図式の最後に与えられた臙装配位および  $T$  が今の場合の写像  $\Psi$  の像となる。特に  $T$  は半標準盤となっており、更にその row word は 1123142234 となっていて確かに Yamanouchi 条件を満たしていることが確かめられる。なお全単射 [12] のもとで最終的な臙装配位は以下のテンソル積の元に対応している：

$$p' = \boxed{1\ 1\ 1} \otimes \boxed{2\ 2\ 2} \otimes \boxed{1\ 3\ 3} \otimes \boxed{4\ 4} \otimes \boxed{3\ 5} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{6}.$$

注 1 逆写像  $\tilde{\Psi}$  の計算は上記の例を逆向きに読めば良い。より正確に言うと、矢印の向きを全て逆にした上で手順  $\tilde{\delta}_4, \tilde{\delta}_3, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_6, \tilde{\delta}_5, \tilde{\delta}_4, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_4, \tilde{\delta}_3$  をこの順に行って行けばよい。

注 2  $p$  および  $p'$  は先ほどの例で与えられたものと同じとし、それらを  $D_8^{(1)}$  の元であるとみなす。その時文献 [19] 第 5.3 節に与えられた対合 (involution)  $\sigma$  を計算すると以下のようなになる：

$$\sigma(p) = \boxed{\bar{8}\ \bar{8}\ \bar{8}} \otimes \boxed{\bar{8}\ \bar{8}\ \bar{7}} \otimes \boxed{\bar{6}\ \bar{8}\ \bar{6}} \otimes \boxed{\bar{7}\ \bar{6}} \otimes \boxed{\bar{6}\ \bar{6}} \otimes \boxed{\bar{7}} \otimes \boxed{\bar{7}}.$$

すると  $p'$  は  $\sigma(p)$  に対応する  $I_0$ -最高ウェイト元と一致する。同様の関係が任意の  $\Psi$  の像に対して成り立っているものと予想している。

### 参考文献

[1] P. Di Francesco and R. Kedem, *Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Int. Math. Res. Notices, (2008) Volume 2008: article ID rnn006, 57 pages.

[2] G. Fourier, M. Okado and A. Schilling, *Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types*, Adv. in Math. **222** (2009), 1080–1116.

[3] K. Fukuda, M. Okado and Y. Yamada, *Energy functions in box-ball systems*, Int. J. Mod. Phys. **A15** (2000) 1379–1392.

- [4] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press (1997).
- [5] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, The  $A_M^{(1)}$  automata related to crystals of symmetric tensors, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 274–308.
- [6] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, MathPhys Odyssey 2001, 205–272, *Prog. Math. Phys.* **23**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [7] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, *Contemporary Math.* **248** (1999) 243–291.
- [8] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, Soliton cellular automata associated with crystal bases, *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 619–645.
- [9] D. Hernandez, *Kirillov-Reshetikhin conjecture: the general case*, *Int. Math. Res. Notices* (2010) no. 1, 149–193.
- [10] V. G. Kac, *“Infinite Dimensional Lie Algebras,”* 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [11] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group*, *Zap.Nauchn. Sem. (LOMI)* **155** (1986) 50–64 (English translation: *J. Sov. Math.* **41** (1988) 916–924).
- [12] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux*, *J. Sov. Math.* **41** (1988) 925–955.
- [13] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, *A bijection between Littlewood–Richardson tableaux and rigged configurations*, *Selecta Math. (N.S.)* **8** (2002) 67–135.
- [14] A. Kuniba, T. Nakanishi and Z. Tsuboi, *The canonical solutions of the  $Q$ -systems and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, *Comm. Math. Phys.* **227** (2002) 155–190.
- [15] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov–Kirillov–Reshetikhin bijection, *Nucl. Phys.* **B740** (2006) 299–327.
- [16] A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Tau functions in combinatorial Bethe ansatz, *Nucl. Phys.* **B786** (2007) 207–266.

- [17] A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Generalized energies and integrable  $D_n^{(1)}$  cellular automaton, arXiv:1001.1813 (to be published from World Scientific Inc.).
- [18] C. Lecouvey and M. Shimozono, *Lusztig's  $q$ -analogue of weight multiplicity and one-dimensional sums for affine root systems*, Adv. in Math. **208** (2007) 438–466.
- [19] C. Lecouvey, M. Okado and M. Shimozono, *Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig  $q$ -analogues*, arXiv:1002.3715.
- [20] H. Nakajima,  *$t$ -analogues of  $q$ -characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003) 259–274.
- [21] M. Okado, *Existence of crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules of type  $D$* , Publ. RIMS **43** (2007) 977-1004.
- [22] M. Okado and R. Sakamoto, *Stable Rigged Configurations for Quantum Affine Algebras of Nonexceptional Types*, arXiv:1008.0460.
- [23] M. Okado and A. Schilling, *Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types*, Representation Theory **12** (2008) 186–207.
- [24] M. Okado, A. Schilling and M. Shimozono, *A crystal to rigged configuration bijection for nonexceptional affine algebras*, in *Algebraic Combinatorics and Quantum Groups*, eds. N. Jing, (World Scientific 2003), pp85–124.
- [25] R. Sakamoto, *Crystal interpretation of Kerov–Kirillov–Reshetikhin bijection II. Proof for  $\mathfrak{sl}_n$  case*, J. Algebraic Combin. **27** (2008) 55–98.
- [26] A. Schilling, *A bijection between type  $D_n^{(1)}$  crystals and rigged configurations*, J. Algebra **285** (2005) 292–334.
- [27] A. Schilling and M. Shimozono,  *$X = M$  for symmetric powers*, J. Algebra **295** (2006) 562–610.
- [28] M. Shimozono, *On the  $X = M = K$  conjecture*, arXiv:math.CO/0501353.
- [29] M. Shimozono and M. Zabrocki, *Deformed universal characters for classical and affine algebras*, J. of Algebra **299** (2006) 33–61.