数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 131-141

1次元非対称排他過程と組合せ論

千葉大学 大学院理学研究科
笹本 智弘 (SASAMOTO Tomohiro)

概要

1次元非対称排他過程, 特にその離散時間版は組合せ論と関係が深い. 本稿では, 推移確率, Aztec diamond との関係, その2次元ダイナミクスとしての解釈, いくつかの極限について説明する.

1 Introduction

1次元非対称排他過程 (asymmetric simple exclusion process, ASEP) は1次元格子上を多数の粒子が体積排除の相互作用の下, 非対称なランダムウォークをする確率的無限粒子系である [12,13]. 特に粒子が一方向 (ここでは右方向とする) にのみ移動する場合 TASEP(Totally ASEP) と呼ばれる. 本稿では TASEP のみを考察する. 離散時間 TASEP にはいくつかの種類があるが, ここでは parallel update 型のもの, つまり各時刻ステップにおいて, 各粒子に着目したとき, 右隣の格子点に粒子がいない場合に確率 $1-q$ $(0<q<1)$ でホップするとする場合を考える.

この離散時間 TASEP において, 図1にあるような step 初期条件を考えよう. 時刻 t までに格子点0から格子点1に移動した粒子の個数 $N(t)$ という量を考える. Johansson は次の式を示した [9]:

$$\mathbb{P}[N(t)\geq N]=\frac{1}{Z_N}\sum_{h_j=-N+1}^{t-2N+1}\prod_{1\leq j<l\leq N}(h_j-h_l)^2\prod_{j=1}^{N}q^{h_j}. \tag{1.1}$$

ここで Z_N は規格化定数であり,

$$Z_N=\frac{q^{\frac{1}{2}N(N-1)}}{(1-q)^{N^2}}\prod_{j=1}^{N}j!(j-1)! \tag{1.2}$$

で与えられる. この表式は, TASEP を組合せ論的に解釈しなおす事で得られた. まず, 右から j 番目の粒子が, 右隣の格子点への i 回目の移動をできるようになってから実際に移動するまでに待つ時間を w_{ij} とする. これは i,j に関して独立同分布な確率変数であり, パラメータ q の幾何分布に従う: $\mathbb{P}[w_{ij}=k]=(1-q)q^k, k=0,1,2,\ldots$. 確率 $\mathbb{P}[N(t)\geq N]$ は $w_{i,j}$ の $i,j\leq N$ の部分のみに依存して決まるが, この $N\times N$ 行列は, 行列要素が非負整数となっている行列であり, これは Robinson-Schensted-Knuth(RSK) 対応によって semi-standard Young tabulex(SSYT) の対と一対一対応があることが知ら

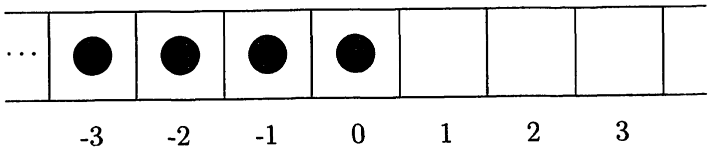

図 1: step 初期条件

れている [25]. そうすると $\mathbb{P}[N(t) \geq N]$ の計算はSSYTの組合せ論の問題となるがそれはSchur関数で表すことができ, その行列式表示を用いた表式を変形することによって上記の (1.1) が得られるのである. よく知られているように, Schur関数は置換群や一般線形群の表現論に現れる. ASEPは組合せ論や表現論と関係している訳である.

この表式の右辺は, ランダム行列理論における最大固有値分布と類似した表式であり, その手法を用いることで漸近解析を行うことができる. 結果はTracy-Widom分布という分布 [26] で記述される. これは, ガウシアンユニタリアンサンブル (Gaussian unitary ensemble, GUE) と呼ばれるランダム行列の最大固有値の分布である.

2 推移確率

前節で述べたカレント分布の表式は, 推移確率 (に類似した量) を用いて導くことが出来る. TASEPの場合の推移確率とは, 時刻0で $y_1, \ldots, y_N$ にいた N 粒子が時刻 t で $x_1, \ldots, x_N$ にいる確率であり, 種々の量の計算の基礎となる重要なものである. 連続時間TASEPに対してはこの推移確率が1つの行列式の形に書ける事をSchützが示しており [24], その後カレント分布その他の計算に重要な役割を果たしてきた [3,15,20]. ここではそのひとつの離散時間版を考える.

まず関数 $F_n(x;t)$ を導入する.

$$F_0(x;t) = \binom{t}{x}(1-q)^x q^{t-x} \tag{2.3}$$

$$F_n(x;t) = F_{n+1}(x;t) - F_{n+1}(x+1;t) \tag{2.4}$$

ただし $\lim_{x\to\infty} F_n(x;t) = 0,\ n = 1, 2, \cdots$ という条件をつけるとする. すると

$$F_{-1}(x;t) = F_0(x;t) - F_0(x+1;t)$$

$$F_1(x;t) = \sum_{y=x}^{t} F_0(y;t)$$

というような式が成り立っていることを確認することができる.

$F_0(x;t)$ は一粒子に対する推移確率にほかならないことに注意しよう. つまり, 粒子が時刻0で原点 $(x=0)$ にいたとすると, 時刻 t で位置 x にいる確率が $F_0(x,t)$ である. 粒子は $0 \leq x \leq t$ のどこかの位置にはいるから, 任意の t に対し

$$\sum_{x=0}^{t} F_0(x;t) = 1, \tag{2.5}$$

が成り立っている. 1粒子の運動を少し別の角度から見て, 格子点 M に到達する時刻 t の確率を考えることも出来るが, これは $(1-q)F_0(M-1;t-1)$ で与えられる.

時刻 t で格子点 x $(\geq M)$ にいる確率を考え, このような見方をすることにより, 次のような等式も得ることが出来る.

Lemma 1.

$$\sum_{x=M}^{t} F_0(x;t) = (1-q) \sum_{s=M-1}^{t-1} F_0(M-1;s) \, (= F_1(M;t)), \tag{2.6}$$

ただし $M \geq 1$.

Proof of Lemma 1. 関数 $F_0(x;t)$ の定義から, 示すべき式は以下と同じである.

$$\sum_{x=M}^{t} \binom{t}{x} (1-q)^x q^{t-x} = \sum_{s=M-1}^{t-1} \binom{s}{M-1} (1-q)^M q^{s-M+1}. \tag{2.7}$$

ここで

$$\sum_{s=M-1}^{t-1} \binom{s}{M-1} q^{s-M+1} = \frac{1}{(M-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^{M-1} \frac{1-q^t}{1-q} \tag{2.8}$$

であるから次を示せば十分である.

$$\frac{1}{(M-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^{M-1} \frac{1-q^t}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^M} \left\{1 - \sum_{x=0}^{M-1} \binom{t}{x} (1-q)^x q^{t-x}\right\}. \tag{2.9}$$

これは数学的帰納法で示すことが出来る. まず $M=1$ のときこの式は明らかである. 次に $M-1$ の場合正しいと仮定する. M の場合の等式は, $M-1$ の場合の等式を微分することにより得ることが出来る.

$$\frac{\partial}{\partial q} \left\{1 - \sum_{x=0}^{M-2} \binom{t}{x} (1-q)^x q^{t-x}\right\} = -\frac{M-1}{1-q} \binom{t}{M-1} (1-q)^{M-1} q^{t-M+1}. \tag{2.10}$$

□

以下では $F_n(x;t)$ に対する同様な式も必要となる.

$$F_n(M;t) = (1-q) \sum_{s=M-1}^{t-1} F_{n-1}(M-1;s). \tag{2.11}$$

さて $\mathbb{Z}$ 上に離散時間 TASEP の N 粒子がいる状況を考えよう.

Proposition 2. 時刻 $0, 1, \cdots, N-1$ に格子点 $y_N, y_{N-1}, \cdots, y_1$ $(y_1 < y_2 < \cdots < y_N)$ にいた N 粒子が, 時刻 $t, t+1, \cdots, t+N-1$ に格子点 $x_N, x_{N-1}, \cdots, x_1$ $(x_1 < x_2 < \cdots < x_N)$ にいる確率を $P(x_1, x_2, \cdots, x_N; t | y_1, y_2, \cdots, y_N; 0)$ で表すことにする. この確

率は次のように行列式の形に書くことができる,

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_N; t|y_1, y_2, \cdots, y_N; 0)$$
$$= \begin{vmatrix} F_0(x_1 - y_1; t) & F_1(x_2 - y_1; t) & \cdots & F_{N-1}(x_N - y_1; t) \\ F_{-1}(x_1 - y_2; t) & F_0(x_2 - y_2; t) & \cdots & F_{N-2}(x_N - y_2; t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{-N+1}(x_1 - y_N; t) & F_{-N+2}(x_2 - y_N; t) & \cdots & F_0(x_N - y_N; t) \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

これは推移確率そのものではないが, step 初期条件でのカレント分布を調べるにはこれでも十分である. [15] の方法を適用することにより, 次を示すことが出来る.

Theorem 3.

$$\sum_{M-N+1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_N} P(x_1, x_2, \cdots, x_N; t + M|y_1 = -N+1, y_2 = -N+2, \cdots, y_N = 0; 0)$$
$$= \frac{1}{Z_{M,N}} \sum_{t_N=0}^{t+N-1} \sum_{t_{N-1}}^{t+N-1} \cdots \sum_{t_1=0}^{t+N-1} \prod_{1 \le j < k \le N} (t_k - t_j)^2 \prod_{j=1}^{N} \frac{(t_j + M - N)!}{t_j!} q^{t_j} \tag{2.13}$$

ただし

$$Z_{M,N} = \frac{q^{\frac{1}{2}N(N-1)}}{(1-q)^{NM}} \prod_{j=1}^{N} j!(M - N + j - 1)!. \tag{2.14}$$

これで $N = M$ の場合を考えると (1.1),(1.2) になることが分かる. ここでは1つの行列式の形に書くことが出来る推移確率に類似の量を用いてカレント分布を得ることが出来ることを説明した. 離散時間 TASEP に対する推移確率そのものも既に得られているが, 粒子間の距離に関係した因子が現れ, 連続時間の場合と比較すると少し複雑になっていることを注意しておく [5,18]. それでも同様な議論を用いて (1.1),(1.2) を得ることは可能である.

3 Aztec diamond

離散時間 TASEP は Aztec diamond と呼ばれるタイリングの問題と関係している [29]. n 次の Aztec diamond とは, $[j, j+1] \times [k, k+1], j, k \in \mathbb{Z}$ という形をした1辺の長さ1の正方形で, 領域 $\{|x| + |y| \le n+1\}$ の中に入るようなものを敷き詰めた形であり, これを A_n で表す. A_n を 2×1(横の長さ 2, 縦の長さ 1) の長方形のブロック, および 1×2(横の長さ 2, 縦の長さ 1) の長方形のブロックでタイル張りをすることを考えることが出来る. n 次の Aztec diamond には全部で $2^{n(n+1)/2}$ 通りのタイリングの方法があることが知られている. ここでは全ての可能なタイリングに一様な確率を与える.

一様なタイリングを生成するのは非自明な事であるが, Shuffling という面白い方法が知られている. これは次数 n の小さい Aztec diamond から出発し, 順次大きな次数のものに成長させていくもので, ある時点でのタイル張りは, 一様分布に従って発生するよ

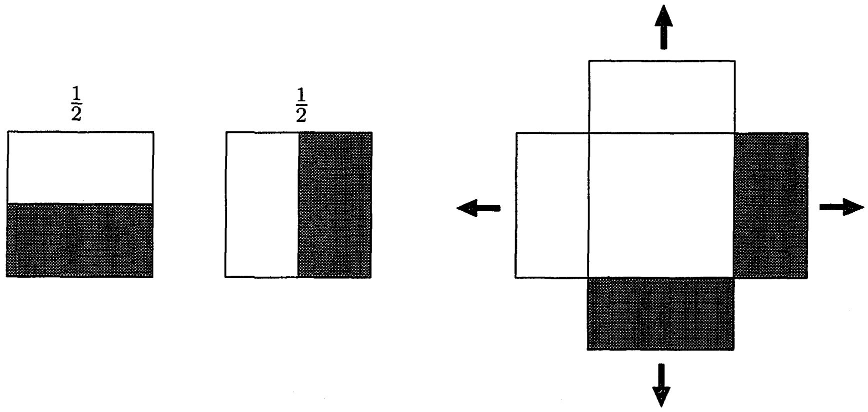

図 2: $n=2$ の Aztec diamond とタイルの移動方向

うに出来ている．さて 2×2 の小領域のタイル張りは図 2 左側の 2 通りのものしかないことに注意しよう．そのうち左側の図の場合，上側にあるタイルを N，下側にあるタイルを S と表す．同様に右側の図の場合，右側にあるタイルを E，左側にあるタイルを W と表す．ここではタイル S とタイル E は塗りつぶすことにしよう．

次数が $n=2$ の場合，Aztec diamond のタイリングはまさに図 2 左側の 2 とおりであり，これらは同確率で生成されているとしよう．次数 n のタイル張りが与えられたとき，次数 $n+1$ のタイル張りを与えるには，次のようにする．まず n 次のタイル張りにおいて，N 型のタイルは上へ，S 型のタイルは下へ，E 型のタイルは右へ，W 型のタイルは左へ距離 1 だけ移動する (図 2 右側)．すると次数 $n+1$ 次の Aztec diamond の中に，タイルが既に埋まっている部分とまだ埋まっていない部分が表れるが，埋まっていない部分は 2×2 の小領域の組合せで表す事が出来る．ここは，図 2 と同様に，独立に確率 1/2 で図 2 左側のタイル張りをするとする．このようにして得られる $n+1$ 次の Aztec diamond のタイル張りは，一様分布に従っていることが分かる．図 3 の例では，$n=2$ の際の N が上，S が下に移動することにより A_3 の一番上と下の部分が N と S が来るが，残りの部分が 2×2 の小領域 2 つ分になっている (左から 2 番目の図)．図では次の $n=4$ の所までの例が描いてある．

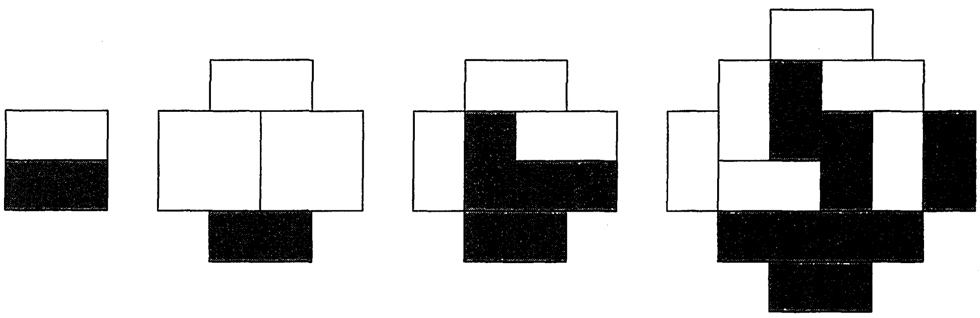

図 3: Aztec diamond の成長例

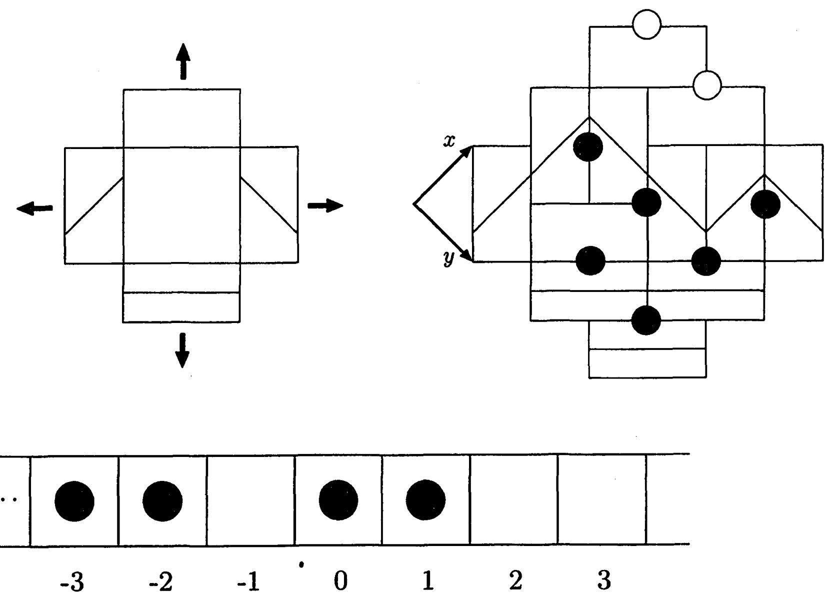

図 4: Aztec diamond と TASEP, 非交差 paths

Shuffling アルゴリズムの成長ルールから分かるように, Aztec diamond の一番上の部分にはタイル N のみの領域 (north poler 領域と呼ぶ) が出来る (図 4 右上では○で表してあるところ). この部分に着目すると Shuffling アルゴリズムは実は離散時間 TASEP のダイナミクスを表していることが知られている (ただし $q = 1/2$ の場合). この対応を用いることにより, (1.1), (1.2) を導くことも可能である. タイルが S,N,E,W であることに応じて, その中に線分を書き加えてみよう (図 4 左上). そうすると Aztec diamond の中に paths を描くことができる (図 4 右側) が, 一番上の path の形は上で述べた north poler 領域の形を表している. 右上がりの slope を粒子のいない格子点, 右下がりの slope を粒子のいる格子点と読み直すことにより north poler 領域は図 4 下のような TASEP の粒子配置に対応しており, Shuffling アルゴリズムは離散時間 TASEP のダイナミクスを与えるのである. さらに paths 達は非交差の条件を満たしているが, そのような非交差な paths の性質は行列式を用いて詳しく調べることが出来ることが知られており, それを適用することにより離散時間 TASEP を調べることが出来るのである [10].

4 Gelfand-Tsetlin ダイナミクス

前節で Aztec diamond に非交差 paths を書き加えることを述べたが, これは粒子系のダイナミクスとみなすこともできる [16]. タイルに線分を書き加えるかわりに, S 型と E 型のタイルの所に粒子がいると考えることにする. より細かくは, S 型タイルの上の辺の中心と, E 型タイルの左の辺の中心に粒子がいるとする (図 4 右上, 粒子は●で表されている). これら粒子は前節の paths と同じだけの情報を持っている. Aztec diamond の一番左端に原点, 左下から右上に向かって x 軸, 左上から右下の方向へ向かって y 軸をとることにする (図 4 右上). x_i^j で $y = j$ 上の i 番目の粒子の位置を表すことにすると, $y = j$ 上には粒子が j 個あること, さらにそれらの座標は

$$x_i^j \leq x_i^{j-1} \leq x_{i+1}^j \tag{4.15}$$

という条件を満たしていることがわかる．これら粒子のダイナミクスをもう少し詳しく見てみよう．まず $y=1$ 上には粒子が1つあるが，これは通常のランダムウォークをする．

$$x_1^1(t) = x_1^1(t-1) + \alpha_1^1(t) \tag{4.16}$$

ただしここで α_1^1 はパラメータ $\frac{1}{2}$ のベルヌイ分布に従う: $\mathbb{P}[\alpha_1^1 = 1] = \mathbb{P}[\alpha_1^1 = 0] = 1/2$. 次に $y=2$ 上には粒子が2つあり，各粒子は基本的にはやはりランダムウォークをしようとするが，その際粒子間には条件 (4.15) を満たすような相互作用が働く．つまり，$x_1^2(t) = x_1^1(t)$ の時は x_1^2 はその場に留まる．同様に $y=j+1$ 上の $(j+1)$ 個の粒子の運動は，基本的には各々ランダムウォークであるが，$y=j$ 上の j 個の粒子との位置関係に応じて相互作用が働き，(4.15) が満たされるようになっている．以上のようにして，$j=n$ まで考えると全部で $n(n+1)/2$ 粒子の確率過程であるが，粒子の位置は (4.15) を満たしており，これは Gelfand-Tsetlin (GT) cone 上のダイナミクスと言える．このように考えることで TASEP ダイナミクスの表現論的な意味も考え易くなる．

さらに $x_i^j(t)$ から，時間に変更を加えて

$$X_i^j(t) = x_i^j(t-j) \tag{4.17}$$

と定義すると，X_i^j の運動はより具体的に記述できる．つまり，$y=j, j+1$ の $(2j+1)$ 粒子の推移確率を具体的に行列式の形で与えることが可能であることが知られている．

このように構成された全部で $n(n+1)/2$ 粒子の運動において，各 j 行に着目すると，その運動は非衝突ランダムウォークの一種となっている．特に時刻を一つ固定して考えると，(1.1),(1.2) を得る．一方で $x_i^i, 1 \le i \le N$ の n 粒子に着目するとこれは離散時間 TASEP の最初の n 粒子の運動に他ならない．このように見てみると，TASEP の粒子の運動を調べるのに，ランダム行列と同様の表式が表れることをより直感的に納得出来る [19].

5 いつくかの極限

5.1 連続時間 TASEP

2節に現れた $F_0(x,t)$ は2項分布で，これは各時刻において右隣の格子点に移動する確率が $1-q$, 同じ格子点にとどまる確率が q であるようなランダムウォークの推移確率を表していた．q を1に近づけ，t を無限大とし，$(1-q)t$ を有限にとどめる極限を考えると，少数の法則により粒子の位置の分布はポアソン分布になる．これは連続時間ランダムウォークの一種であるがここではそれをポアソンランダムウォークと呼ぶことにしよう．TASEP の各粒子がポアソンランダムウォークをしようとする極限においては，離散時間 TASEP は連続時間の TASEP となる．この場合上の $n(n+1)/2$ 粒子のダイナミクスは次のようになる．まず最初はポアソンランダムウォークをする粒子 x_1^1 があり，その次は2粒子あり，それらはやはりポアソンランダムウォークをしようとするが (4.15) に類似の条件を満たすような条件がつく．この操作を続けることにより，GT cone 上のダイナミクスを得ることが出来る. この場合は各 j 列は各時刻で Charlier アンサンブルになっている [31]. 一方 x_i^i の粒子たちは, 連続時間 TASEP そのものである.

5.2 拡散極限

TASEP の各粒子がブラウン運動をしようとする極限を考えることが出来る. この場合は最初 Warren が考察した [30]. この場合のダイナミクスは次のようになる. まず最初はブラウン運動 x_1^1 があり, その次は2粒子あり, それらはやはりブラウン運動をしようとするが, 一つ目の粒子のところにくると, それによって反射され, (4.15) を満たすようになる. この操作を続けることにより, GT cone 上のダイナミクスをえることが出来る. この場合は各 j 列は Dyson のブラウン運動となっている. 一方 x_i^i の粒子たちは, TASEP の連続極限である.

6 最近の進展

6.1 symplectic 版

GT cone には, symplectic 版もあるが, その上のダイナミクスを考察することもできる [31]. Dyson ブラウン運動でいうと原点に壁のある場合 [11] に相当しており, 離散時間版も考察されている [2].

6.2 Dyson ブラウン運動の最大値分布

5.2 節で説明した GT cone 上のダイナミクスと, 6.1 で述べた symplectic GT cone 上のダイナミクスを考えることにより, Dyson ブラウン運動の1番目の粒子の位置の最大値の分布が, 壁あり Dyson ブラウン運動の一番目の粒子の位置の分布と等しいことも示されている [4]. 証明では Dyson ブラウン運動が GT ダイナミクスと関係していることの他に, ランダムウォークやブラウン運動の理論で重要な反射原理も用いる.

6.3 $U(\infty)$

GT cone はユニタリ群の表現論等に現れるものであり, その理論の TASEP への応用や, 逆に TASEP の結果がそのような表現論の考察にも有用であると考えられる. そのような方向の研究の一つとして, Borodin は [1,7] の中で, 無限次元ユニタリ群 $U(\infty)$ の表現論の立場からの GT ダイナミクスや排他過程の一般化を与えている.

6.4 ASEP と KPZ 方程式

本稿では粒子が一方向にだけ移動する TASEP のみを考察したが, 最近はより一般に粒子が両方向に移動できる ASEP の研究が進んでいる (時間は連続時間). ASEP の場合は, 推移確率が一つの行列式の形に書くことは出来ないのであるが, Bethe ansatz を

用いて作った推移確率から出発し，いくつかの非自明な公式を用いることでカレント分布を Fredholm 行列式の積分の形に書くことが出来ることが示された [27, 28]．さらに ASEP の適当な弱非対称極限を取る事により，KPZ 方程式と呼ばれる界面成長を記述する非線型確率偏微分方程式に対する結果も得られた [8, 21–23]．

TASEP の場合と比較すると，その数理構造はまだよく分かっていない．なぜ行列式が現れるのか，さらに本稿で議論したような GT ダイナミクスや表現論的な意味を理解するのは今後の重要な課題である．

6.5 有限温度 directed polymer

前小節の内容とも関係して，O'Connell は次のような directed polymer の問題を考えている [17]．$B_1(t), B_2(t), \ldots, B_N(t), t \geq 0$ を独立なブラウン運動とし，そのエネルギー関数を

$$E = B_1(s_1) + (B_2(s_2) - B_2(s_1)) + \cdots + (B_N(t) - B_N(s_{N-1})) \tag{6.18}$$

とする．これはある種の directed polymer のエネルギーと解釈することができ，その分配関数は

$$Z_t^N(\beta) = \int_{0<s_1<\cdots<s_{N-1}<t} e^{\beta E} ds_1 \cdots ds_{N-1}$$

で与えられる．$\beta \to \infty$ は [6] が考えていたものとなり，TASEP の場合と類似しているが，有限の β では状況が随分違う．それにもかかわらず，GT cone とも関係あることが指摘されている．さらにハミルトニアンが

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i=1}^{N-1} e^{x_{i+1}-x_i}$$

で与えられる量子戸田格子との関係も議論されており，今後可積分系との関係がさらに明らかとなってくると期待される．なお $N = 2$ の場合は [14] で扱われた場合となる．

参考文献

[1] A. Borodin and G. Olshanski, *Markov processes on the path space of the Gelfand-Tsetlin graph and on its boundary*, arXiv:1009.2029.

[2] A. Borodin and J. Kuan, *Random surface growth with a wall and Plancherel measures for $O(\infty)$*, arXiv:0904.2607.

[3] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto, *Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration*, J. Stat. Phys. **129** (2007), 1055–1080.

[4] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, T. Sasamoto J. Warren, *Maximum of Dyson Brownian motion and non-colliding systems with a boundary*, Elect. Comm. Probab. **14** (2009), 486–494.

[5] A. Borodin, P. L. Ferrari, T. Sasamoto, *Large time asymptotics of growth models on space-like paths II: PNG and parallel TASEP*, arXiv:0707.4207.

[6] Y. Baryshnikov, *Gues and queues*, Prob. Th. Rel. Fields **119** (2001), 256–274.

[7] A. Borodin, *Schur dynamics of the Schur processes,*, arXiv:1001.3442.

[8] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, *Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in* $1+1$ *dimensions arXiv:1003.0443.*

[9] K. Johansson, *Shape fluctuations and random matrices*, Comm. Math. Phys. **209** (2000), 437–476.

[10] ______, *The arctic circle boundary and the Airy process*, Ann. Prob. **33** (2005), 1–30.

[11] M. Katori and T. Tanemura, *Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems.*, J. Math. Phys. **45** (2004), 3058–3085.

[12] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, 1985.

[13] ______, *Stochastic interacting systems: Contact, voter, and exclusion processes*, Springer-Verlag, 1999.

[14] H. Matsumoto and M. Yor, *An analogue of Pitman's* $2M-x$ *theorem for geometric Brownian motions*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 287–316.

[15] T. Nagao and T. Sasamoto, *Asymmetric simple exclusion process and modified random matrix ensembles*, Nucl. Phys. B **699** (2004), 487–502.

[16] E. Nordenstam, *On the shuffling algorithm for domino tilings*, E. J. Probab. **15** (2010), 75–95.

[17] N. O'Connell, *Directed polymers and the quantum Toda lattice, arxiv:0910.0069v3.*

[18] A. M. Povolotsky and V. B. Priezzhev, *Determinant solution for the totally asymmetric exclusion process with prallel update, cond-mat/0605150.*

[19] T. Sasamoto, *A note on a few processes related to Dyson's Brownian motion,* rims kokyuroku bessatsu, to appear, *journal = , volume = , pages = , year = .*

[20] ______, *Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate*, J. Phys. A **38** (2005), L549–L556.

[21] T. Sasamoto and H. Spohn, *Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition.*, Nucl. Phys. B **834** (2010), 523–542.

[22] ———, *The crossover regime for the weakly asymmetric simple exclusion process*, J. Stat. Phys. **140** (2010), 209–231.

[23] ———, *Universality of the one-dimensional KPZ equation.*, Phys. Rev. Lett. **834** (2010), 523–542.

[24] G. M. Schütz, *Duality relations for asymmetric exclusion processes*, J. Stat. Phys. **86** (1997), 1265–1287.

[25] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics 2*, Springer, 1999.

[26] C. A. Tracy and H. Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 151–174.

[27] ———, *Integral Formulas for the Asymmetric Simple Exclusion Process*, Com. Math. Phys. **279** (2008), 815–844.

[28] ———, *Asymptotics in ASEP with step initial condition*, Commun. Math. Phys. **209** (2009), 129–154.

[29] W. Jockush, J. Propp, P. Shor, *Random domino tilings and the arctic circle theorem, preprint 1995, math.CO/9801068.*

[30] J. Warren, *Dyson's Brownian motions, intertwining and interlacing*, E. J. Prob. **12** (2007), 573–590.

[31] J. Warren and P. Windridge, *Some examples of dynamics for Gelfand Tsetlin patters*, E. J. Prob. **14** (2009), 1745–1769.