数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 69-82

実旗多様体 $GL_n(\mathbb{R})/P$ に関する symplectic 構造の分類と戸田格子の Hamiltonian flow

慶應義塾大学経済学部 池田 薫 (Kaoru Ikeda)
Dept. of Math. Hiyoshi Campus, Keio University

Introduction

(M, ω) を $2n$ 次元 symplectic 多様体とする. すなわち M は実 $2n$ 次元 C^∞ 多様体で, 非退化閉 2 次微分形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ が定義されているものとする. ω を M の symplectic 構造という. ω' を M の別の symplectic 構造とする. C^∞ 同相写像 $\phi : M \simeq M$ が存在し $\omega' = d\phi^*\omega$ となるとき symplectic 多様体 (M, ω) と (M, ω') は symplectic 同相であるといい ω と ω' は symplectic 同値であるという. $2n$ 次元 C^∞ 多様体 M を一つ固定したとき「M にはいる symplectic 構造たちを symplectic 同値のもの同士で類別せよ」という問題を考える. この問題を symplectic 構造の分類問題といおう. 簡単にいうと M にいくつ異なる symplectic 構造を入れることができるか? という問いである. symplectic 構造の分類問題に関する画期的な答えは Gromov の 1985 年の論文 [6] により与えられた (cf.[3]). Gromov の論文では $\mathbb{CP}^1$ から $\mathbb{CP}^2$ への概正則曲線の存在という複素幾何学の手法が用いられた. 今回実旗多様体 G/P から定義される等質空間 $R \setminus G/P$ 上の symplectic 構造を戸田格子のハミルトニアンフローを用いて分類を試みた. その結果を報告する. Lie 群の表現論との関連にも軽く触れておきたい. A.A.Kirillov は連結で単連結な nilpotent Lie 群の既約ユニタリー表現の分類を行った. その Lie 群を H, $\mathfrak{h} = Lie\ H$ としたとき $f \in \mathfrak{h}^*$ に対してその偏極化部分群の 1 次元表現による H の誘導表現により H のユニタリー表現が構成され $\mathfrak{h}^*$ の余随伴軌道によりユニタリー表現が分類された. さらに Auslander と Kostant は Kirillov の余随伴軌道法を拡張し I 型可解 Lie 群の既約ユニタリー表現を分類した [1]. さらにすべての連結 Lie 群の既約ユニタリー表現を目指した論文 [9] の中で Kostant は"We have found that when the notion of what the physicists mean by quantizing a function is suitably generalized and made rigorous, one may develop a theory which goes a long way towards constructing all irreducible unitary representations of conneced Lie group"と述べ symplectic 多様体の前量子化について論じている. 事ほど左様に symplectic 幾何学は軌道法や幾何学的量子化を介し Lie 群の表現論と強く結びついている. さらに可積分系の量子化の研究も進んでいる ([4],[8]). 以下このレポートの大まかな紹介を行いたい. $G = GL_n(\mathbb{R})$ とし $P \subset G$ をその Levi 部分群が $GL_1(\mathbb{R}) \times GL_{n-2}(\mathbb{R}) \times GL_1(\mathbb{R})$ となる上三角放物型部分群とする. このとき部分旗多様体 G/P は局所的に Heisenberg 群に同型な $2n-3$ 次元多様体となる. G/P には自然に Kostant-Kirillov の Poisson 構造が定義される. 今 R を

Heisenberg 群の中心とすると R は G/P に左から作用するので等質空間 $R\backslash G/P$ が定義される．我々は $2n-4$ 次元の等質空間 $R\backslash G/P$ 上に複素直線束 $\mathscr{L}_\lambda$ を構成した．これは $R\backslash G/P$ 上の主 R 束 G/P の section から定まるものである．そして $\mathscr{L}_\lambda$ の接続から定義される曲率形式により $R\backslash G/P$ の symplectic 形式を定義した．この symplectic 構造は G/P の Kostant-Kirillov の Poisson 構造を $R\backslash G/P$ 上の symplectic 構造として復元した形になっている．

戸田格子の Lax 行列の定義を拡張した $\Lambda+\bar{\mathfrak{b}}$ という形の行列を Hessenberg 行列という，ここに Λ はシフト行列で $\bar{\mathfrak{b}}$ は下三角 Borel 部分代数である．Hessenberg 行列全体のなす affine space を $Hess$ と書く．通常の戸田格子の Lax 行列は $Hess$ の中で 3 重対角行列であるもの全体である．$L\in Hess$ としたとき L は一意的に $L=W(L)\Lambda(L)W(L)^{-1}$ と分解される，ここに $W(L)\in\bar{N}$(下三角 nilpotent 群)，$\Lambda(L)=\Lambda+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(L)E_{n,j}$ で $\varphi_j(L)$ は $C^\infty(Hess)$ の中で $\mathrm{Ad}\bar{N}$ 不変全体のなす部分代数の生成元である．$\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し level set $Hess(\mathbf{m})$ を $\{L\in Hess|\varphi_j(L)=m_j, j=1,\ldots,n\}$ で定義する．$L\in Hess(\mathbf{m})$ に対し上記分解を $L=W(L)\Lambda(L)W(L)^{-1}$ としたとき写像 $\Phi_{\mathbf{m}}: Hess(\mathbf{m})\to G/B$ を $\Phi_{\mathbf{m}}(L)=W(L)/B$ で定義する．この写像を companion 埋め込みという [2]．G/B には自然に G から Poisson 構造が誘導され [5]，上述のように G/P にも Poisson 構造が誘導される．$\Phi_{\mathbf{m}}$ は Poisson 写像となり $\pi': G/B\to G/P$ を自然な射影とすると $\pi'\circ\Phi_{\mathbf{m}}: Hess(\mathbf{m})\to G/P$ も Poisson 写像になる．戸田格子の n 個の Hamiltonian flows から定義される 1parameter subgroup$\{\exp(\sum_{j=1}^{n}t_j\nabla\varphi_j(L))\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n}$ は $\mathbf{t}$ を一つ fix するごとに $Hess(\mathbf{m})$ 上に Poisson 同相写像を定義する．これを $\Psi_{\mathbf{t}}$ としよう．$G/P(\mathbf{m}):=\pi'\circ\Phi_{\mathbf{m}}(Hess_{\mathbf{m}})$ とすると $G/P(\mathbf{m})$ に $\Psi_{\mathbf{t}}$ により Poisson 同相写像 $\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}$ が誘導される．$\Xi_{\mathbf{t}}$ を $\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}$ により誘導される $R\backslash G/P(\mathbf{m})$ 上の同相写像とする．$R\backslash G/P(\mathbf{m})$ 上の直線束 $\mathscr{L}_\lambda$ の接続から定まる曲率形式により $R\backslash G/P(\mathbf{m})$ 上の symplectic 構造 ω_μ，ただし μ は local な定数，が定義されることを §2 で示す．§3 では ω_μ に対し別の symplectic 構造 $\omega_{\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^*\mu}$ が自然に定義できることを示し $\Xi_{\mathbf{t}}$ は $(R\backslash G/P(\mathbf{m}),\omega_s)$ から $(R\backslash G/P(\mathbf{m}),\omega_{\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^*\mu})$ への symplectic 同相であることを示す．次の定理を得た．今 $\mathscr{O}_\mu=\{\omega_{\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^*\mu}|\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n\}$ としたとき

定理 $\omega\in\mathscr{O}_\mu\Rightarrow\omega$ と ω_μ は symplectic 同値．

$\Leftarrow$ も成り立つと予想されるがまだ証明は出来ていない．

今回講演の機会を与えて下さった松本詔先生に謝意を表します．また文献表 [5] の論文はオハイオ州立大学の児玉祐治先生から教えていただきました．今回この研究は慶應義塾学事振興資金の援助の下に行われました．

1 実部分旗多様体 $GL_n(\mathbb{R})/P$ の Poissonn 構造について

$G = GL_n(\mathbb{R})$ とし $B \subset G$ を上三角 Borel 部分群, $N \subset B$ を上三角 unipotent 部分群とする. $\bar{B}, \bar{N}$ をそれぞれ B, N の opposite とする. $\mathfrak{g} = Lie\ G, \mathfrak{b} = Lie\ B, \mathfrak{n} = Lie\ N$ としさらに $\bar{\mathfrak{b}} = Lie\ \bar{B}, \bar{\mathfrak{n}} = Lie\ \bar{N}$ とする. G にはつぎで Kostant-Kirillov の Poissonn 構造が入る. $f, g \in C^\infty(G)$ にたいして

$$\{f(x), g(x)\}_G = < x, [\nabla f(x), \nabla g(x)] >, \tag{1}$$

ここで $< X, Y >= \mathrm{tr} XY$ とする. $\nabla f(x), \nabla g(x)$ は f, g の x における gradient vector で, $X \in T_x G$ に対して $f(x + tX) = f(x) + t < X, \nabla f(x) > + \cdots$ で定義される. 以後 G 上の左不変ベクトル場と $\mathfrak{g}$ を同一視する. 次に旗多様体 G/B の Poisson 構造を定義するため G/B を affine space を張り合わせる形で構成する. $g \in G$ に対し Gauss 分解 $g = W_\infty(g)^{-1} W_0(g), W_\infty(g) \in \bar{N}, W_0(g) \in B$ を考える. $b \in B$ とすると $W_\infty(g)^{-1}(W_0(g)b) = gb$ は gb の Gauss 分解になっているので Gauss 分解の一意性から $W_\infty(g) = W_\infty(gb)$. すなわち $W_\infty(g)$ を g/B($g$mod$B$ のこと) の座標として使える. しかしすべての $g \in G$ に対して上の Gauss 分解が可能であるとは限らないので一般に次の Gauss 分解を考える. $\mathcal{S}_n$ を n 次対称群とし $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して

$$W_\infty^\sigma(g)^{-1} W_0^\sigma(g) = \sigma g, \tag{2}$$

ここで $W_\infty^\sigma(g) \in \bar{N}, W_0^\sigma(g) \in B$ で上と同じ理由で $W_\infty^\sigma(g) = W_\infty^\sigma(g/B)$ である. $G_\sigma := \{g \in G|$ 分解 (2) が可能である $\}$ と定義する. $G_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n$ は G を覆う. すなわち

Proposition 1.1 $G = \cup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} G_\sigma$ が成り立つ.

proof. $g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in G$ とする. 形式的に g の Gauss 分解を行うと $W_\infty(g) = (w_{ij}(g))$ とすると

$$(w_{i1}(g), \ldots, w_{ii-1}(g), 1) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii-1} \end{pmatrix} = 0, i = 2, \ldots, n, \tag{3}$$

(3) を形式的に解くと

$$w_{ij}(g) = - \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i-11} & \cdots & g_{i-1i-1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i-11} & \cdots & g_{i-1i-1} \end{vmatrix}, j = 1, \ldots, i-1 \tag{4}$$

を得る. (4) の分母を $D_i(g)$ とおく. すると次が成り立つ.

Gauss 分解 $W_\infty(g/B)^{-1}W_0(g) = g$ が不可能 $\Leftrightarrow 2 \leq {}^\exists i \leq n$ が存在し $D_i(g) = 0$

今 $D_2(g) = 0$ とする. $D_2(g) = g_{11}$ より $g_{11} = 0$. $\sigma_{1,i} \in \mathcal{S}_n$ を 1 と $i(>1)$ との互換とすると ${}^\exists i_2$ が存在し $D_2(\sigma_{1,i_2}g) \neq 0$ となる. 実際そうでないとすると $D_2(\sigma_{1,i}g) = g_{i1}$ より

$$g = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & g_{n2} & \cdots \end{pmatrix}$$

となってしまうので $g \in G$ に反する. 次に $D_3(\sigma_{1,i_2}g) = 0$ とする. $\sigma_{1,i_2}g = (g'_{ij})$ とおくと $\begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{vmatrix} = 0$ となる. $\sigma_{2,i} \in \mathcal{S}_n$ を 2 と $i > 2$ の互換とすると ${}^\exists\sigma_{2,i_3}$ が存在し

$$D_3(\sigma_{2,i_3}\sigma_{1,i_2}g) \neq 0, D_2(\sigma_{2,i_3}\sigma_{1,i_2}g) = D_2(\sigma_{1,i_2}g) \neq 0$$

となる. もし $2 < {}^\forall i \leq n$ について $D_3(\sigma_{2,i}\sigma_{1,i_2}g) = 0$ であったとすると

$$D_3(\sigma_{2,i}\sigma_{1,i_2}g) = \begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{i1} & g'_{i2} \end{vmatrix} = 0, 2 \leq {}^\forall i \leq n.$$

となる. これは (g'_{11}, g'_{12}) と $(g'_{i1}, g'_{12}), 2 \leq i \leq n$ が一次従属であることを示している. よってある $a \in G$ が存在し

$$a\sigma_{1i_2}g = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

となり $g \in G$ に反する. また $i_3 > 2$ より $D_2(\sigma_{2,i_3}\sigma_{1,i_2}g) = D_2(\sigma_{1,i_2}g) = g'_{11} \neq 0$.

以下 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-2} \in \mathcal{S}_n$ がうまく取れて $D_j(\sigma_{r-2}\cdots\sigma_1 g) \neq 0, j = 2, \ldots, r-1$ で $D_r(\sigma_{r-2}\cdots\sigma_1 g) = 0$ と仮定する. このとき $r-1$ と $i(r-1 < i \leq n)$ との互換 $\sigma_{r-1,i}$ が存在し

$$D_j(\sigma_{r-1,i}\sigma_{r-2}\cdots\sigma_1 g) \neq 0, j = 2, \ldots, r$$

とすることが出来る. 実際 $r-1 < {}^\forall i \leq n$ について $D_r(\sigma_{r-1,i}\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1 g) = 0$ であったとする. $\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1 g = (g''_{ij})$ とおく. すると

$$\begin{vmatrix} g''_{11} & \cdots & g''_{1r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g''_{r-21} & \cdots & g''_{r-2r-1} \\ g''_{i1} & \cdots & g''_{ir-1} \end{vmatrix} = 0, \text{ for } r-1 \leq {}^\forall i \leq n.$$

が成り立つ．よって

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} g''_{11} & \cdots & g''_{1r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g''_{n1} & \cdots & g''_{nr-1} \end{pmatrix} < r-1.$$

一方 $\det(g''_{ij})_{i\leq i,j\leq r-2} \neq 0$ より

$$^{\exists}a = \begin{pmatrix} a_0 & O \\ O & E_{n-r+2} \end{pmatrix} \in G,$$

ただし $a_0 \in GL_{r-2}(\mathbb{R})$, が存在し

$$a\begin{pmatrix} g''_{11} & \cdots & g''_{1r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g''_{n1} & \cdots & g''_{nr-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r-2} & \mathbf{g}''' \\ C & \mathbf{d} \end{pmatrix},$$

ここで $\mathbf{g}''' \in \mathbb{R}^{r-2}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n-r+2}, C \in \mathrm{Mat}(n-r+2 \times r-2)$, となる．よって $g(r-1) := (g''_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq r-1}$ とすると $g(r-1)$ の 1 行目から $r-2$ 行目までは 1 次独立．よって rank$g(r-1) = r-2$. 従って $g(r-1)$ の 1 次独立な列ベクトルの数は $r-2$ 個．よって $\mathrm{rank}(\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1 g) < n$ これは $g \in G$ に反する．QED.

Proposition 1.1 より $G/B = \cup_{\sigma\in\mathcal{S}_n} G_\sigma/B$. $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して $U_\sigma = G_\sigma/B$ とおくと U_σ は affaine space $\bar{N}$ に同型となる．$g \in G_\sigma \cap G_\tau, \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ としたとき $\sigma g/B$ と $\tau g/B$ を同一視し U_σ と U_τ を張り合わせたものとして旗多様体 G/B を定義する．$\pi : G \to G/B$ を自然な射影とする．$u, v \in C^\infty(G/B)$ に対して Poisson bracket$\{u,v\}_{G/B}(g/B)$ を

$$\{u,v\}_{G/B}(g/B) =< g/B, [\nabla u(g/B), \nabla v(g/B)] > \tag{5}$$

で定義する．

Lemma 1.1 $u \in C^\infty(G/B)$ に対して $d\pi^*\nabla u(g/B) = \nabla\pi^* u(g)$ が成り立つ．

proof. $\mathfrak{g}$ と G 上の左不変ベクトル場を同一視する．今 $X \in \mathfrak{g}$ とすると

$$\pi^* u(g+tX) = u(\pi(g+tX))$$

$$= u(\pi(g) + td\pi_*(X) + \cdots) = u(\pi(g)) + t < d\pi_*(X), \nabla u(\pi(g)) > + \cdots$$

一方

$$(\pi^* u)(g+tX) = (\pi^* u)(g) + t < X, \nabla\pi^* u(g) > + \cdots$$

よって $d\pi^*\nabla u(\pi(g)) = \nabla\pi^* u(g)$. QED

G/B は局所的には $\bar{N}$ と同型だから $^\forall g \in G$ に対して $T^*_{\pi(g)}G/B \simeq \mathfrak{n}$. 局所的に $d\pi^*$ は $\mathfrak{n}$ から $\mathfrak{g}$ への埋め込みだから Lie algebra homomorphism. よって $u, v \in C^\infty(G/B)$ に対して

$$\pi^*\{u,v\}_{G/B}(g) = \{u,v\}_{G/B}(\pi(g)) = <\pi(g), [\nabla u(\pi(g)), \nabla v(\pi(g))]>$$

$d\pi^*$ は fiber $T^*_{\pi(g)}G/B$ から fiber T^*_gG への map で $X \in T_gG$ に対して

$$< X, d\pi^*\xi > = < d\pi_* X, \xi >, \ \xi \in T^*_{\pi(g)}G/B.$$

$g \in G$ は T_gG の 0 section と見なせるから $d\pi_*(g) = \pi(g)$ となる. よって

$$= < g, d\pi^*[\nabla u(\pi(g)), \nabla v(\pi(g))] > = < g, [d\pi^*\nabla u(\pi(g)), d\pi^*\nabla v(\pi(g))] >$$

$$= < g, [\nabla \pi^* u(g), \nabla \pi^* v(g)] > = \{\pi^* u(g), \pi^* v(g)\}_G = \{\pi^* u, \pi^* v\}_G(g).$$

以上をまとめると

Proposition 1.2 G/B には (5) で Poisson 構造が入り, 自然な射影 $\pi : G \to G/B$ は Poisson 写像になる. G/B は局所的に $\bar{N}$ に同型だから G/B の Poisson 構造は $\{w_{ij}, w_{k\ell}\} = \delta_{j,k} w_{i\ell} - \delta_{\ell,i} w_{kj}$, ただし $(w_{i,j})_{i,j} \in \bar{N}$, と表される.

Levi 部分群が $GL_1(\mathbb{R}) \times GL_{n-2}(\mathbb{R}) \times GL_1(\mathbb{R})$ で, B を含む放物型部分群を P とする. すなわち

$$P = \{ \begin{pmatrix} p_{11} & {}^t\mathbf{p}_{12} & p_{13} \\ \mathbf{0} & P_{22} & \mathbf{p}_{23} \\ 0 & {}^t\mathbf{0} & p_{33} \end{pmatrix} | p_{11}, p_{33} \neq 0, p_{13} \in \mathbb{R}, \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{23} \in \mathbb{R}^{n-2}, P_{22} \in GL_{n-2}(\mathbb{R}) \}$$

とする. さらに $\bar{N}$ の部分群 U を

$$U = \{ \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0} \\ c & {}^t\mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2} \}$$

で定義する. $g \in G$ の分解 $g = up, u \in U, p \in P$ を g の U-P 分解という.

Lemma 1.2 $g \in G$ とし

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & {}^t\mathbf{g}_{12} & g_{13} \\ \mathbf{g}_{21} & G_{22} & \mathbf{g}_{23} \\ g_{31} & {}^t\mathbf{g}_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

とする. ただし $g_{11}, g_{31}, g_{13}, g_{33} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{g}_{21}, \mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{32}, \mathbf{g}_{23} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $G_{22} \in \mathrm{Mat}_{n-2}(\mathbb{R})$ とする. g が U-P 分解可能であるための必要十分条件は

$$g_{11} \neq 0, |G_{22} - \mathbf{g}_{21}{}^t\mathbf{g}_{12}| \neq 0$$

$g_{33} - g_{31}g_{13}/g_{11} - ({}^t\mathbf{g}_{32} - g_{31}/g_{11}{}^t\mathbf{g}_{12})(G_{22} - \mathbf{g}_{21}{}^t\mathbf{g}_{12})^{-1}(\mathbf{g}_{23} - g_{13}/g_{11}\mathbf{g}_{21}) \neq 0$

である.

Proposition 1.3 $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して Gauss 分解 $W_\infty^\sigma(g/B)^{-1}W_0^\sigma(g) = \sigma g$ が可能ならば g は U-P 分解可能である.

proof.

$$W_\sigma^\infty(g/B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{w}_{21} & W_{22} & \mathbf{0} \\ w_{31} & {}^t\mathbf{w}_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

ただし $\mathbf{w}_{21}, \mathbf{w}_{32} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $w_{3,1} \in \mathbb{R}$, W_{22} はサイズ $n-2$ の下三角 nilpotent 行列とする. 上の Lemma の記号を使うと $g_{11} = 1 \neq 0$, $|G_{22} - g_{31}/g_{11}{}^t\mathbf{g}_{12}| = |W_{22}| = 1 \neq 0$,

$$g_{33} - g_{31}g_{13}/g_{11} - ({}^t\mathbf{g}_{32} - g_{31}/g_{11}{}^t\mathbf{g}_{12})(G_{22} - \mathbf{g}_{21}{}^t\mathbf{g}_{12})^{-1}(\mathbf{g}_{23} - g_{13}/g_{11}\mathbf{g}_{21}) =$$

$$1 - w_{31} \times 0/1 - ({}^t\mathbf{w}_{32} - w_{31}/1)(W_{22} - w_{31}\mathbf{w}_{21}{}^t\mathbf{0})^{-1}(\mathbf{0} - 0/1\mathbf{w}_{21}) = 1 \neq 0$$

より Lemma 1.2 から $W_\infty^\sigma(g/B)^{-1}$ は U-P 分解可能となり

$$\sigma g = W_\infty^\sigma(g/B)^{-1}W_0^\sigma(g) = u(pW_0^\sigma(g)) \tag{6}$$

で $pW_0^\sigma(g) \in P$ より (6) は σg の U-P 分解. よって σg は U-P 分解可能. Q.E.D.

Proposition 1.3 より集合として $G/P = \cup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} G_\sigma/P$. $u(\sigma g)p(\sigma g) = \sigma g$ を σg の U-P 分解とすると Gauss 分解の時の議論と同様に U-P 分解の一意性により $u(\sigma g) = u(\sigma g p), {}^\forall p \in P$ だから $u(\sigma g) = u(\sigma g/P)$ で $U_\sigma = G_\sigma/P$ とすると $g/P \in U_\sigma \mapsto u(\sigma g/P)$ の対応により U_σ は affine space U と同型になる. $g \in G_\sigma \cap G_\tau$ に対し $\sigma g/P$ と $\tau g/P$ を同一視することにより G_σ/P と G_τ/P を張り合わせることにより G/P を構成できる. $\pi' : G/B \to G/P$, $g/B \mapsto g/P$ を自然な射影とする. $u, v \in C^\infty(G/P)$ としたとき G/P の Poisson 構造を

$$\{u, v\}_{G/P}(g/P) = < g/P, [\nabla u(g/P), \nabla v(g/P)] > \tag{7}$$

で定義する. π のときと同様に次が成り立つ.

Proposition 1.4 $\pi' : G/B \to G/P$ は Poisson 写像になる.

G/P は局所的には U に同型だから G/P の Poisson 構造は

$$\{p_i, q_j\}_{G/P} = \delta_{i,j}c \tag{8}$$

となる. ここで ${}^t\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, ${}^t\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ で c は U の $(n, 1)$ 成分.

2 Symplectic多様体$R\setminus G/P$の構成

Uの部分群Rを

$$R=\{t_c=\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{0} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ c & {}^t\mathbf{0} & 1\end{pmatrix}|c\in\mathbb{R}\}$$

により定義する．$t_ct_{c'}=t_{c+c'}$が成り立つ．

Lemma 2.1 $\sigma\in\mathcal{S}_n$に対しGの部分群$\sigma^{-1}R\sigma$はG_σ/Pに左から作用する．

proof. $g\in G_\sigma$, $t_c\in R$としたとき$\sigma^{-1}t_c\sigma g\in G_\sigma$を示せばよい．$\sigma g=up$を$\sigma g$の$U$-$P$分解とする．

$$t_c\sigma g=\sigma(\sigma^{-1}t_c\sigma)g$$

一方$t_c\sigma g=(t_cu)p$は$t_c\sigma g$のU-P分解だから$(\sigma^{-1}t_c\sigma)g\in G_\sigma$. QED

$\sigma\in\mathcal{S}_n$に対し$K_\sigma=\sigma^{-1}R\sigma\setminus G_\sigma/P$とする．$g\in G_\sigma\cap G_\tau$に対し$\sigma^{-1}R\sigma\setminus g/P$と$\tau^{-1}R\tau\setminus g/P$を同一視し$K_\sigma$と$K_\tau$を張り合わせて出来た多様体を$R\setminus G/P$とする．$R$の character $\chi:R\to\mathbb{R}$を$\chi(t_c)=c$で定義する．定義より$\chi(t_ct_{c'})=\chi(t_c)+\chi(t_{c'})$が成り立つ．準同型$\lambda:R\to\mathbb{C}^*$を$\lambda(t_c)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\chi(t_c))$で定義し$R$の1次元表現$\mathbb{C}_\lambda$を$a\mapsto\lambda(t_c)a, a\in\mathbb{C}^*$で定義する．$K_\sigma$上の複素直線束$\mathscr{L}_\lambda^\sigma$を$\mathscr{L}_\lambda^\sigma:=G_\sigma/P\times_R\mathbb{C}_\lambda$で定義する．ただし$R$, すなわち$\sigma^{-1}R\sigma$の$G\sigma/P$への右からの作用は$g/P\cdot\sigma^{-1}t_c\sigma=\sigma^{-1}t_c^{-1}\sigma(g/P)$で定義すべきだが$R$は可換で逆元をとる必要がないので$\sigma^{-1}t_c\sigma(g/P)$を右からの作用とみなす．

Proposition 2.1 $R\setminus G/P$上の複素直線束$\mathscr{L}_\lambda$で$\mathscr{L}_\lambda|_{K_\sigma}=\mathscr{L}_\lambda^\sigma$となるものが存在する．

proof. 各$\sigma\in\mathcal{S}_n$について local system $s_\sigma\in\Gamma(K_\sigma;\mathscr{L}_\lambda^\sigma)$と以下の(i),(ii)をみたす変換関数$\psi_{\sigma,\tau}(x)\in\mathbb{C}^*$の存在を言えばよい．

$$\text{(i) } \psi_{\sigma,\tau}(x)^{-1}=\psi_{\tau,\sigma}(x),\ x\in K_\sigma\cap K_\tau$$

$$\text{(ii) } \psi_{\sigma,\tau}(x)\psi_{\tau,\eta}(x)\psi_{\eta,\sigma}(x)=1,\ x\in K_\sigma\cap K_\tau\cap K_\eta$$

$$u_c=\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ c & {}^t\mathbf{p} & 1\end{pmatrix}\in U$$

としたとき$u_c=t_cu_0=u_0t_c, t_c\in R$より$K_\sigma$は$2n-4$次元 affine space

$$K=\{\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ 0 & {}^t\mathbf{p} & 1\end{pmatrix}|\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}\}$$

に同型である．$x\in K_\sigma$としたときxのK_σでの座標表示を$u_0^\sigma(x)$とする．G/Pは$R\setminus G/P$の主R束である．$v\in\Gamma(R\setminus G/P;G/P)$をひとつ固定する．今

$s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma;\mathscr{L}^\sigma_\lambda)$ を $s_\sigma(x) = [v(x),1]$ により定義する．K_σ 上 $v(x) = t_{c_\sigma(x)}u^\sigma_0(x)$, $t_{c_\sigma(x)} \in R$ と書けるから $s_\sigma(x) = [u^\sigma_0(x), \lambda(t_{c_\sigma(x)})\cdot 1]$ となる．$u^\sigma_0(x)$ を x と同一視すると $s_\sigma(x) = [x, \lambda(t_{c_\sigma(x)})\cdot 1]$ と書ける．$e^{2\pi\sqrt{-1}\chi(t_{c_\sigma(x)})} = e^{2\pi\sqrt{-1}c_\sigma(x)}$ より．$\psi_{\sigma,\tau}(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}(c_\tau(x)-c_\sigma(x))}$ とおくと

$$\psi_{\sigma,\tau}(x)s_\sigma(x) = [x, e^{2\pi\sqrt{-1}(c_\tau(x)-c_\sigma(x))}e^{2\pi\sqrt{-1}c_\sigma(x)}\cdot 1] = s_\tau(x)$$

となり $\psi_{\sigma,\tau}(x)$ は (i),(ii) をみたす変換関数になる．Q.E.D.

Proposition 2.1 により構成した $R\backslash G/P$ 上の複素直線束を $\varpi : \mathscr{L}_\lambda \to R\backslash G/P$ とする．つぎに $\mathscr{L}_\lambda$ の接続を定義する．各 K_σ 上 $\mathscr{L}_\lambda$ の接続を定義しそれらをつなぎ合わせ $\mathscr{L}_\lambda$ 全体の接続を定義する．今 $V \subset R\setminus G/P$ を $\mathscr{L}_\lambda$ の局所自明近傍とし $s_0 \in \Gamma(V;\mathscr{L}_\lambda)$ を $s_0(x) = [x, \lambda(t_{c(x)})\cdot 1]$ とする．$\mathbb{T} = \{a \in \mathbb{C}^* | |a| = 1\}$ とする．すると任意の $s \in \Gamma(V;\mathscr{L}_\lambda)$ は $s(x) = \phi(x)s_0(x)$, ただし $\phi(x)$ は V 上の $\mathbb{T}$ 値 C^∞ 関数, と書ける．∇ を $\mathscr{L}_\lambda$ の接続としよう．$X \in T(V)$ に対し $\nabla_X s = 2\pi\sqrt{-1} < \alpha(s), X > s$ とすると $s \in \Gamma(V;\mathscr{L}_\lambda)$ に対して ∇ の接続形式 $\alpha(s) \in T^*(V)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}$ が定義される．$\mathscr{L}^*_\lambda = \mathscr{L}_\lambda -$ zero section とする．$x \in R\setminus G/P$ に対して $s \in \mathscr{L}^*_{\lambda x}$, $t \in \mathscr{L}_{\lambda x}$ とすると $s(x) = \phi(x)s_0(x), \phi(x) \neq 0$, $t(x) = \psi(x)s_0(x)$ とかける．$\frac{t}{s}(x) \in C^\infty(V)$ を $\frac{t}{s}(x) = \psi(x)/\phi(x)$ で定義する．すると接続形式 $\alpha(s)$ は $\alpha(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\nabla s}{s}$ と書ける．$s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma;\mathscr{L}_\lambda)$ に対し $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\nabla^\sigma s_\sigma}{s_\sigma} = \alpha_\sigma$ を次, で定義する．上のように $v \in \Gamma(R\setminus G/P; G/P)$ を 1 つとる．K_σ 上 $v(x) = t_{c_\sigma(x)}u^\sigma_0(x)$ とすると $\chi(t_\sigma(x)) = c_\sigma(x)$．$\mathbf{u} = Lie\ U$ とすると $^\forall x \in R\setminus G/P$ に対し $T_x(R\setminus G/P) \simeq \mathbf{u}/\mathbb{R}E_{n,1} \simeq \oplus_{i=2}^{n-1}\mathbb{R}E_{i,1}\oplus\oplus_{j=2}^{n-1}\mathbb{R}E_{n,j}$ となる．$\nabla^\sigma \in \Omega^1(K_\sigma)\otimes_\mathbb{R}\mathrm{End}\Gamma(K_\sigma,\mathscr{L}_\lambda)$ を

$$\begin{cases} \nabla^\sigma_X s_\sigma = 2\pi\sqrt{-1} < \alpha(s_\sigma), X > s_\sigma & \text{for } X \in TK_\sigma \\ \nabla^\sigma_X \phi s_\sigma = d\phi\otimes s_\sigma + \phi\nabla^\sigma s_\sigma & \phi \in C^\infty(K_\sigma), \end{cases}$$

ただし $\alpha(s_\sigma) \in \Omega^1(K_\sigma)$ は次のように定義する．$s_\sigma(x) = [x, e^{e^{2\pi\sqrt{-1}c_\sigma(x)}}]$ とする．$\tilde{c}_\sigma \in C^\infty(\varpi^{-1}(K_\sigma))$ を $\tilde{c}_\sigma(u) = c_\sigma(\varpi(u))$ で定義する．$\alpha \in \Omega(\mathscr{L}_\lambda)$ を $\varpi^{-1}(K_\sigma)$ 上

$$\alpha = -\mu_\sigma E_{1,n} + d\tilde{c}_\sigma, \tag{9}$$

で定義し $\alpha(s_\sigma) = ds^*_\sigma\alpha \in \Omega(K_\sigma)$ とする．ただし μ_σ は K_σ 上定数で $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in K_\sigma$ のとき $(\mathbf{p},\mathbf{q},\mu_\sigma) \in G/P$ とする．今 $x \in K_\sigma \cap K_\tau$ で $s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma;\mathscr{L}_\lambda), s_\tau \in \Gamma(K_\tau;\mathscr{L}_\lambda)$ で $s_\sigma(x) = \psi_{\sigma,\tau}(x)s_\tau(x)$ とする．K_σ, K_τ は

$$K = \{\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0} \\ 0 & {}^t\mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} | \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

に同型. $X \in TK_\sigma$ に対し

$$< \alpha(s_\sigma), X > = < \alpha, ds_{\sigma *}X >, ds_{\sigma *}\partial/\partial p_j = E_{n,j}, ds_{\sigma *}\partial/\partial q_i = E_{i,1}$$

で

$$< \mu_\sigma E_{1,n}, E_{n,j} >=< \mu_\sigma E_{1,n}, E_{i,1} >= 0$$

で $ds_\sigma^* d\tilde{c}_\sigma = dc_\sigma$ だから

$$< \alpha(s_\sigma), \partial/\partial p_i >= \partial c_\sigma(x)/\partial p_i, < \alpha(s_\sigma), \partial/\partial q_j >= \partial c_\sigma(x)/\partial q_j$$

となり

$$\alpha(s_\sigma) - \alpha(s_\tau) = dc_\sigma(x) - dc_\tau(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d\psi_{\sigma,\tau}}{\psi_{\sigma,\tau}}(x)$$

を得る. したがって

$$\alpha(s_\sigma) = \alpha(s_\tau) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d\psi_{\sigma,\tau}}{\psi_{\sigma,\tau}}(x) \tag{10}$$

が従い (10) より local system $\{(K_\sigma, s_\sigma)\}$ 上の接続 $\nabla_X s_\sigma = 2\pi\sqrt{-1} < \alpha(s_\sigma), X >$ s_σ をつなぎ合わせて $\mathscr{L}_\lambda$ の接続が定義できる. 接続 ∇ から定まる曲率形式で $R \setminus G/P$ 上に symplectic 構造 $\omega_\mu \in \Omega^2(R \setminus G/P)$ を次で定義する

$$\omega_\mu(X, Y) = d\alpha(s_\sigma)(X, Y) = X < \alpha(s_\sigma), Y > -Y < \alpha(s_\sigma), X >$$

$$- < \alpha(s_\sigma), [X, Y] >,$$

$X, Y \in T(R \setminus G/P)$ により定義する. ${}^\forall x \in R \setminus G/P$ について $T_x(R \setminus G/P) \simeq \mathfrak{u}/\mathbb{R}E_{n,1}$ だったから $< E_{1,n}, X >=< E_{1,n}, Y >= 0$, $d(dc_\sigma(x)) = 0$ よって

$$\omega(X, Y) = - < \alpha(s_\sigma), [X, Y] > \tag{11}$$

となる. (11) を具体的に計算しよう.

$$\omega_\mu(\partial/\partial p_i, \partial/\partial q_j) = - < -\mu_\sigma E_{1,n}, [E_{n,j}, E_{i,1}] >$$

$$= \mu_\sigma < E_{1,n}, \delta_{i,j} E_{n,1} >= \mu_\sigma \delta_{i,j}. \tag{12}$$

(12) は G/P 上の点 $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu_\sigma)$ における Poisson relation $\{p_i, q_j\}_{G/P} = \mu_\sigma \delta_{i,j}$ を $R \setminus G/P$ 上の symplectic 構造として再現している.

3 戸田格子の Hamiltonian flow による symplectic structure の変形

$\Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ をシフト行列とし affaine space $Hess$ を $Hess = \Lambda + \bar{\mathfrak{b}}$ で定義する. $f, g \in C^\infty(Hess)$ には次で Poisson structure が入る. $L \in Hess$ において

$$\{f(L), g(L)\}_{Hess} =< L, [\nabla f(L), \nabla g(L)] > . \tag{13}$$

$L = \Lambda + \sum_{1\le j\le i\le n} L_{ij}E_{i,j}$ とすると

$$\{L_{ij}, L_{k\ell}\}_{Hess} = \delta_{j,k}L_{i\ell} - \delta_{\ell,i}L_{kj} \tag{14}$$

となる. $L \in Hess$ は

$$L = W(L)\Lambda(L)W(L)^{-1} \tag{15}$$

と一意に分解できる. ここに $W(L) \in \bar{N}$, $\Lambda(L) = \Lambda + \sum_{i=1}^n \varphi_j(L)E_{n,j}$ で $\varphi_j, j = 1,\ldots,n$ は $C^\infty(Hess)^{\bar{N}}$ の generators. $\mathbf{m} = {}^t(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して level set $Hess(\mathbf{m})$ を

$$Hess(\mathbf{m}) = \{L \in Hess | \varphi_j(L) = m_j, j = 1,\ldots,n\}$$

で定義する. 従って $L \in Hesse(\mathbf{m})$ とすると $L = W(L)\Lambda_{\mathbf{m}}W(L)^{-1}$ と分解される. ここで $\Lambda(\mathbf{m}) = \Lambda + \sum_{j=1}^n m_jE_{n,j}$. $Hess(\mathbf{m})$ には $Hess$ から誘導された Poisson structure が入っている. Companion 埋め込み $\Phi_{\mathbf{m}} : Hess(\mathbf{m}) \to G/B$ を $\Phi_{\mathbf{m}}(L) = W(L)/B$ で定義する.

Proposition 3.1 $\Phi_{\mathbf{m}}$ は $Hess(\mathbf{m})$ から G/B への Poisson map になる.

proof. $L \in Hess$ とし $L = W(L)\Lambda(L)W(L)^{-1}$ としたとき $\Phi : Hess \to G/B$ を $\Phi(L) = W(L)/B$ で定義する. Φ を $Hess(\mathbf{m})$ に制限すると $\Phi_{\mathbf{m}}$ になるので Φ が $Hess$ から G/B への Poisson map であることを示せば十分.

$$\mathfrak{q} = \{\sum_{j=1}^n a_jE_{n,j} | a_j \in \mathbb{R}\}$$

とすると分解 (15) より

$$T_LHess \simeq T_{W(L)}\bar{N} \oplus \mathfrak{q}$$

また G/B は局所的に $\bar{N}$ に同型だから $\bar{\mathfrak{n}}$ を G/B 上の左不変 vector field と同一視すると $d\pi_* : T_LHess \to T_{\Phi(L)}G/B$ は T_LHess から $T_{\Phi(L)}G/B \simeq \bar{\mathfrak{n}}$ への射影になる. G/B 上の左不変な 1 form 全体を $\mathfrak{n}$ と同一視して, $T_L^*Hess = T_{W(L)}^*\bar{N} \oplus {}^t\mathfrak{q}$, ただし ${}^t\mathfrak{q} = \{{}^tX | X \in \mathfrak{q}\}$, であるから $d\Phi^* : T_{\Phi(L)}^*G/B \to T_L^*Hess$ は $\mathfrak{n}$ から $\mathfrak{n} \oplus {}^t\mathfrak{q}$ への埋め込みとなりしたがって Lie algebra homomorhphism となる. 今 $f, g \in C^\infty(G/B)$ に対して Lemma 1.1 と同様に

$$\nabla\Phi^*f(L) = d\Phi^*(\nabla f(\Phi(L)), \ \nabla\Phi^*g(L) = d\Phi^*(\nabla g(\Phi(L)))$$

となるので

$$\{\Phi^*f, \Phi^*g\}_{Hess}(L) =< L, [\nabla\Phi^*f(L), \nabla\Phi^*g(L)] >$$

$$=< L, [d\Phi^*\nabla f(\Phi(L)), d\Phi^*\nabla g(\Phi(L))] >=< L, d\Phi^*[\nabla f(\Phi(L)), \nabla g(\Phi(L))] >$$

$d\Phi_*$ はベクトル束 $THess$ から TG/B への写像で $L \in Hess$ は $T_L Hess$ の zero section とみなせるから $d\Phi_*(L) = \Phi(L)$ となり

$$=< \Phi(L), [\nabla f(\Phi(L)), \nabla g(\Phi(L))] >= \{f,g\}_{G/B}(\Phi(L)) = \Phi^*\{f,g\}_{G/B}(L)$$

よって $\{\Phi^* f, \Phi^* g\}_{Hess} = \Phi^*\{f,g\}_{G/B}$. QED

なお旗多様体の Poisson structure については Gelfand-Dikki タイプのものが [5] に詳しく述べられている. $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して戸田格子の Hamiltonian flow により生成された 1−parameter groups を考える. 例えば $L \in Hess(\mathbf{m})$ としたとき

$$\{\Psi_{\mathbf{t}} = e^{t_1 \nabla \varphi_1(L)} \cdots e^{t_n \nabla \varphi_n(L)} | \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n\}.$$

$\mathbf{t}$ を固定すると $\Psi_{\mathbf{t}}$ は $Hess(\mathbf{m})$ 上に Poisson 同型写像を定義する. 今 $G/B(\mathbf{m}) = \Phi(Hess(\mathbf{m}))$, $G/P(\mathbf{m}) = \pi'(G/B(\mathbf{m}))$ とおく. $\Psi_{\mathbf{t}}$ は次の図式を可換にする同型写像 $\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}} : G/P(\mathbf{m}) \to G/P(\mathbf{m})$ を誘導する.

$$\begin{array}{ccc} Hess(\mathbf{m}) & \xrightarrow{\Psi_{\mathbf{t}}} & Hess(\mathbf{m}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}}} \\ G/P(\mathbf{m}) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}} & G/P(\mathbf{m}) \end{array} \tag{16}$$

Proposition 3.2 $\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}} : G/P(\mathbf{m}) \to G/P(\mathbf{m})$ は Poisson 同型写像である.

proof. $f, g \in C^\infty(G/P(\mathbf{m}))$ とする. (16) より

$$\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}} \circ \Psi_{\mathbf{t}} = \tilde{\Psi}_{\mathbf{t}} \circ \pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}} \tag{17}$$

よって

$$\{(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}} \circ \Psi)^* f, (\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}} \circ \Psi_{\mathbf{t}})^* g\}_{Hess(\mathbf{m})}$$
$$= \{\Psi_{\mathbf{t}}^*(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* f, \Psi_{\mathbf{t}}^*(\pi' \circ \Psi_{\mathbf{m}})^* g\}_{Hess(\mathbf{m})}$$
$$= \Psi_{\mathbf{t}}^*\{(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* f, (\pi' \circ \Pi_{\mathbf{m}})^* g\}_{Hess(\mathbf{m})}$$

$\pi', \Phi_{\mathbf{m}}$ は Poisson 写像だったから $\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}}$ も Poisson 写像. よって

$$= \Psi_{\mathbf{t}}^*(\pi' \circ \Phi_m)^*\{f,g\}_{G/P(\mathbf{m})}.$$

(17) より

$$= (\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^*\{f,g\}_{G/P(\mathbf{m})}$$

一方

$$\{(\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}} \circ \pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* f, (\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}} \circ \pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* g\}_{Hess(\mathbf{m})}$$
$$= \{(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^* f, (\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}^* g\}_{Hess(\mathbf{m}}$$

$$= (\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} f, \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} g\}_{G/P(\mathbf{m})}.$$

よって

$$(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} \{f, g\}_{G/P(\mathbf{m})} = (\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^* \{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} f, \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} g\}_{G/P(\mathbf{m})}$$

を得る. $(\pi' \circ \Phi_{\mathbf{m}})^*$ は単射だから

$$\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} \{f, g\}_{G/P(\mathbf{m})} = \{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} f, \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} g\}_{G/P(\mathbf{m})}.$$

QED

$\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}$ は $R \setminus G/P(\mathbf{m})$ にも同型写像を誘導する. それを $\Xi_{\mathbf{t}}$ と書こう. $\mathbf{t}$ を fix すると $\Xi_{\mathbf{t}} : R \setminus G/P(\mathbf{m}) \to R \setminus G/P(\mathbf{m})$ は微分同相になる. $R \setminus G/P$ 上の複素直線束 $\mathscr{L}_\lambda$ には (9) により接続 α が定義されその曲率形式により (11) で $R \setminus G/P$ に symplectic 構造が定義された. $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu) \in G/P$ となる local な定数 μ に対し symplectic 構造は $X, Y \in T(R \setminus G/P)$ に対して $\omega(X, Y) = \mu < E_{1,n}, [X, Y] >$ であった. ただし各 $x \in R \setminus G/P$ において $\partial/\partial p_j$, $\partial/\partial q_i$ をそれぞれ $E_{n,j}$,$E_{i,1}$ と同一視した. この ω を ω_μ と書くことにする. $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mu)$ を $G/P(\mathbf{m})$ の座標とすると $\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}$ は Poisson 同型写像 $\{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} p_i, \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} q_j\}_{G/P(\mathbf{m})} = \tilde{\psi}^*_{\mathbf{t}} \mu \delta_{i,j}$ を導く.

Proposition 3.3 $\Xi_{\mathbf{t}}$ は $(R \setminus G/P(\mathbf{m}), \omega_\mu)$ から $(R \setminus G/P(\mathbf{m}), \omega_{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}}\mu})$ への symplectic 同型写像である.

proof. $d\Xi^*_{\mathbf{t}} \omega_\mu = \omega_{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}}\mu}$ を示せばよい. $X = \partial/\partial p_i, Y = \partial/\partial q_j \in T(R \setminus G/P(\mathbf{m}))$ の時を示せば十分.

$$d\Xi^*_{\mathbf{t}} \omega_\mu(\partial/\partial p_i, \partial/\partial q_j) = \omega_\mu(d\Xi_{\mathbf{t}*}\partial/\partial p_i, d\Xi_{\mathbf{t}*}\partial/\partial q_j)$$

Hamiltonian vector 場 $d\Xi_{\mathbf{t}*}\partial/\partial p_i, d\Xi_{\mathbf{t}*}\partial/\partial q_j$ に対応する Hamiltonian 関数はそれぞれ $\Xi^*_{\mathbf{t}} p_i, \Xi^*_{\mathbf{t}} q_j$ だから

$$= \{\Xi_{\mathbf{t}}{}^* p_i, \Xi_{\mathbf{t}}{}^* q_j\}_{R \setminus G/P(\mathbf{m})}$$

ω_μ により定まる Poisson bracket は G/P の Poisson bracket と一致するから

$$= \{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} p_i, \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} q_j\}_{G/P(\mathbf{m})}$$

$\tilde{\Psi}_{\mathbf{t}}$ は Poisson 同型だから

$$= \tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} \{p_i, q_j\}_{G/P(\mathbf{m})} = (\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}} \mu) \delta_{i,j}$$

$$= \omega_{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}}\mu}(\partial/\partial p_i, \partial/\partial q_j).$$

QED

$\mathscr{O}_\mu := \{\omega_{\tilde{\Psi}^*_{\mathbf{t}}\mu} | \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n\}$ とする. 以上をまとめると次の定理を得る.

Theorem $\omega \in \mathscr{O}_\mu$ とする. $\omega' \in \mathscr{O}_\mu \Rightarrow (R \setminus G/P, \omega)$ と $(R \setminus G/P, \omega')$ が symplectic 同型.

Conjecture 上の定理で $\Leftarrow$ も成り立つ.

References

[1] L.Auslender and B.Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent.Math.**14**(1971)255-354.

[2] N.Ercolan, H.Flaschka and S.Singer, The geometry of the full Kostant-Toda lattice, *Integrable systems(Lumminy, 1991)*, 181-225, Prog.Math**115** Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993

[3] 深谷 賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店 (1999).

[4] A.Givental, Stationary phase integrals, quantum Toda lattice, flag manifolds and mirror conjecture, *Topics in singular theory*103-115 Amer.Math.Soc.Transl.Ser.2 180 Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1997.

[5] K.Goodearl and M.Yakimov, Poisson structures of affine spaces and flag varieties II, Trans.AMS.**361**(2009)5753-5780.

[6] M.Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent.Math.**82**(1985), 307-347.

[7] T,Hashimoto, K.Ogura and K Okamoto, Borel-Weil theory and Feynman path integrals on flag manifolds, Hiroshima Math.Jour.**23**(1993), 231-247

[8] K.Ikeda, The algebraic integrability of the quantum Toda latticeand the Radon transform, Jour.Fourier Anal. and Appl.**15**(2009)80-100.

[9] B.Kostant, Quantization and unitary representation, Lect.Note in Math.**170** Springer, Berlin 1970, pp 87-208.