数理解析研究所講究録
第 1741 巻 2011 年 1-8

A note on strictly superstable generic structures

池田　宏一郎（Hosei University）
法政大学経営学部
（Faculty of Business Adiministration, Hosei University）

ジェネリック構造とは有限構造（有限超グラフ）を特殊な方法で貼り合わせて作った無限構造である．このジェネリック構造を構成する際に必要になってくるのが，局所次元

$$\delta(A) = |A| - \alpha|R^A|$$

である（ここで，A は有限超グラフ，α は 1 以下の正の実数，R^A は A の超辺全体の集合）．Hrushovski が最初に作った有名なジェネリック構造は

1. 可算範疇的擬平面 ([4])
2. 群をもたない non-locally modular な強極小構造 ([5])

であるが，ともに forking に関して non-trivial となっている．その理由は簡単にいえば，(1) は係数が $\alpha < 1$ であり，(2) は R が 3 変数以上であるからである．

一方，Baldwin の問題 [1, 2] の解として得られた真に超安定なジェネリック構造 [6] は，R が 2 変数で係数が $\alpha = 1$ であるので forking に関して trivial になっている．そこで本稿では，non-trivial で真に超安定ジェネリック構造を構成するために，R が 3 変数であるジェネリック構造を構成することを目標とする．

1 Preliminaries

以下，記号や定義などは Baldwin-Shi[3] あるいは Wagner[7] に基づく．

L を 3 項関係 $R(*,*,*)$ からなる言語とする．$A, B, C, \cdots$ は R を超辺とする超グラフ，すなわち，

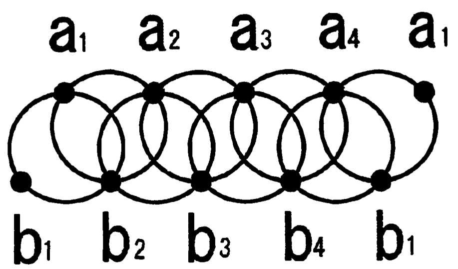
- $R(a_1, a_2, a_3) \leftrightarrow R(a_i, a_j, a_k)$;
- $R(a_1, a_2, a_3) \rightarrow a_i \neq a_j$.

を満たす有限 L-構造とする（ここで，$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$）．

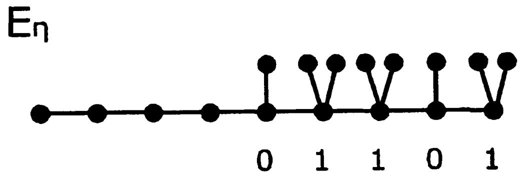
グラフにおける n-cycle に対応するものを，超グラフにおいて定義する：各 $n \geq 3$ に対して，

- $R(a_1, a_2, b_2), R(a_2, a_3, b_3), ..., R(a_{n-1}, a_n, b_n), R(a_n, a_1, b_1)$;
- $R(b_1, b_2, a_1), R(b_2, b_3, a_2), ..., R(b_{n-1}, b_n, a_{n-1}), R(b_n, b_1, a_n)$.

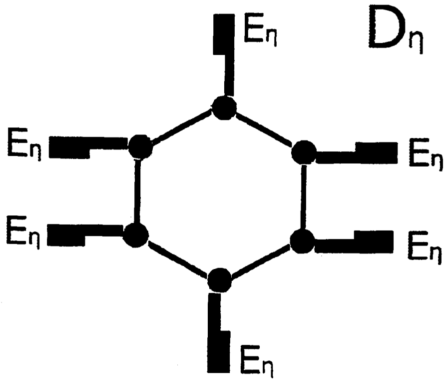
を満たす構造 $a_1...a_n b_1...b_n$ を C_n で表し，n-hypercycle と呼ぶことにする．(下の図は 4-hypercycle.)



一方，[6] において，各 $\eta \in 2^{<\omega}$ に対して，グラフ D_η を次のように定義した：まず，ある関数 $f : 2^{<\omega} \rightarrow \{3, 4, 5, \cdots\}$ をひとつ固定する．このとき，たとえば $\eta = (01101)$ に対して，グラフ E_η を



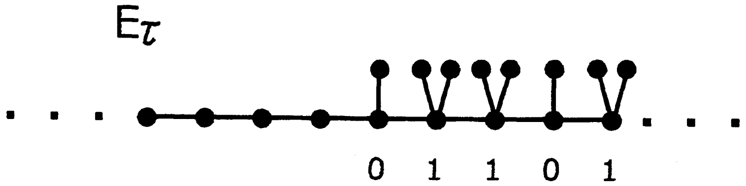
のように定義する．そして，D_η を



のように定義する．(図は $f(\eta) = 6$ の場合.)

以上が，グラフにおける D_η の定義であるが，先に cycle に対し hypercycle を定義したように，超グラフに対して D_η に対応するものを同じように定義できる．これらをここでは jelly fish と呼ぶことにする．

さらには，上で有限列 $\eta \in 2^{<\omega}$ に対して E_η を定義したが，無限列 $\tau \in 2^\omega$ に対しても同様に E_τ が定義できる．ここではこのような E_τ を snake と呼ぶ．(下の図は $\tau = (01101\cdots)$ の場合.)



Definition 1.1 1. $\delta(A) = |A| - |R^A|$ と定義する．(R^A は A の超辺の数)

2. $\delta(B/A) = \delta(B \cup A) - \delta(A)$ と定義する．

3. $B \cap C = A$ を満たす A, B, C に対して，$R^{BC} = R^B \cup R^C$ であるとき，B と C は A 上自由 (free) であるといい，$B \perp_A C$ と書く．このとき構造 BC を $B \oplus_A C$ と書く．

Note 1.2 hypercycle や jelly fish は $\delta = 0$．さらに，それらの部分構造は $\delta \geq 0$．

E を jelly fish の部分構造で $\delta = 0$ となる構造全体のクラスとする．**F** を連結な有限構造でその部分構造がすべて $\delta > 0$ となる構造全体のクラスとする．また，$\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ の要素の有限個の（$\emptyset$ 上の）直和全体を **K** とする．

Definition 1.3 1. 有限構造 $A \subset B$ に対して，任意の $X \subset B - A$ に対して $\delta(X/A) \geq 0$ が成り立つとき，A は B の中で closed であるといい，$A \leq B$ と書く.

2. 有限構造のクラス $\mathbf{K}$ が次の条件を満たすとき融合性 (amalgamation property) をもつという：$A \leq B \in \mathbf{K}, A \leq C \in \mathbf{K}$ ならば，B, C の A 上のあるコピー B', C' に対して，$B', C' \leq B' \cup C' \in \mathbf{K}$ が成り立つ.

Lemma 1.4 1. $\mathbf{K}$ は部分構造に関して閉じている.

2. $\mathbf{K}$ は融合性をもつ.

Proof. (1) は $\mathbf{K}$ の定義よりあきらか. (2) を証明する．$A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq C \in \mathbf{K}$ とする．このとき $D = B \oplus_A C$ と仮定しても構わない．さらに D は連結であるとしてよい．もし B, C がともに hypercycle をもたないならば，$B, C \in \mathbf{F}$ を得るので，$\mathbf{F}$ の定義より $D \in \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$. よって B か C のいずれかが hypercycle をもつと仮定してよい．ここでは B が hypercycle をもつとする．$A \leq B$ かつ D の連結性より，B の中の hypercycle は必ず A の中にあり，それはただひとつ存在する．それを C_n とすると，B, C はそれぞれ jelly fishD_η の部分構造になっているはず.（ここで $\eta = f^{-1}(n)$.）よって融合性が成り立つことは明らか.

Definition 1.5 $\mathbf{K}$ を有限構造のあるクラスとする．このとき，可算構造 M が次の 3 つの条件を満たすとき，$(\mathbf{K}, \leq)$-ジェネリックであるという：

- $A \subset_\omega M$ ならば $A \in \mathbf{K}$;
- $A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq M$ ならば，B の A 上のコピーで M の中で closed なものが存在；
- 任意の $A \subset_\omega M$ に対して，$A \subset B \leq M$ となる有限構造 B が存在.

Lemma 1.4 より，ここでの $\mathbf{K}$ に対してジェネリック構造 M がただひとつ存在することがわかる．以下，$\mathcal{M}$ を M の big model とする.

Lemma 1.6 $\mathrm{Th}(M)$ は ω-安定でない.

Proof 同型でない snake が非可算個存在するので.

2 Proof of Theorem

Definition 2.1 1. $e \in \mathcal{M}$ が j-element であるとは，e を含む連結成分が jelly fish になっていることとする．

2. $e \in \mathcal{M}$ が s-element であるとは，e を含む連結成分が snake になっていることである．

3. $e \in \mathcal{M}$ が r-element であるとは，j-element でも s-element でもないこととする．

4. $e \in \mathcal{M}$ が jr-element であるとは，e が j-element か r-element のいずれかであることである

5. $A \subset \mathcal{M}$ が j-set（s-set, r-set, jr-set） であるとは，任意の $e \in A$ が j-element（s-element, r-element, jr-set）であることである．

Note 2.2 1. $A \subset_\omega \mathcal{M}$ が r-set であることは定義可能．

2. a と b が連結かつ a が j-element（s-element, r-element）ならば，b も j-element（s-element, r-element）．

Lemma 2.3 1. $A \leq B \in \mathbf{F}, A \subset C \in \mathbf{F}, B \perp_A C$ とする．このとき $D = B \oplus_A C \in \mathbf{F}$.

2. $A \subset \mathcal{M}, A \leq B \in \mathbf{K}$, A は r-set, B は連結であるとする．このとき B の A 上のコピーが $\mathcal{M}$ の中に存在する．

Proof (1) 任意の $X \subset D$ に対して，$\delta(X) > 0$ を示せばよい．実際，$\delta(X) = \delta((X \cap B) \cup (X \cap C)) = \delta(X \cap C) + \delta(X \cap B / X \cap A) \geq 1 + 0 > 0$.
(2) そうでないとする．B は連結であると仮定してよい．A が r-set であるので $B \in \mathbf{F}$. このとき

$$\{X \cong A\} \cup \{X \text{ is r} - \text{set}\} \cup \{(\neg \exists Y)(YX \cong BA)\}$$

は無矛盾．よってこの論理式の M における解を A' とする．A' も r-set であるので，$C' = \mathrm{cl}(A')$ とすると $C' \in \mathbf{F}$. B' を $B'A' \cong BA$ かつ $B' \perp'_A C'$ を満たすように取ると，(1) より $B' \oplus_{A'} C' \in \mathbf{F}$. よって genericity より，$B'$ の A' 上コピーが $M \subset \mathcal{M}$ の中に存在してしまい矛盾．

Lemma 2.4 $A \leq \mathcal{M}, A \leq B \in \mathbf{K}, A$ は jr-set, B は連結であるとする．このとき B の A 上のコピーで closed なものが $\mathcal{M}$ の中に存在する．

Proof. このとき A は j-set か r-set のいずれかであると考えられる．A が j-set のときはほぼあきらか．A が r-set のときを示す．まず Lemma 2.3 より，B の A 上のコピー B' が $\mathcal{M}$ の中に取れる．このとき，コピー B' が closed に取れないと仮定して矛盾を導く．いまこの仮定より，コンパクト性を用いると，ある $m \in \omega$ が存在して，どんな $\mathcal{M}$ の中のコピーも m-closed に取れないことがわかる．このとき

$$\{X \cong A\} \cup \{X : m\text{−closed} \ + \ \mathrm{r-set}\} \cup \{(\neg\exists Y)(YX \cong BA \wedge (Y : \mathrm{m-closed})\}$$

は無矛盾．よってこの論理式のジェネリック構造 M における解を A' とする．ここで，$C' = \mathrm{cl}(A')$ とし，B' を $B'A' \cong BA$ かつ $B' \perp_{A'} C'$ を満たすように取る．A' は r-set であるので，$B', C' \in \mathbf{F}$ であると仮定できる．よって Lemma 2.3 より $B' \oplus_{A'} C' \in \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$．従ってジェネリックであることにより，$B'$ の C' 上のコピー B'' が $B''C' \leq M$ を満たすように取れる．このとき $B'' \leq_m B''C' \leq M \leq \mathcal{M}$ が成り立つ．これは A' が上の論理式の解であることに矛盾．

Note 2.5 $A \subset \mathcal{M}$ の s-element 全体を $s(A)$ と書き，jr-element 全体を $jr(A)$ と書く．

Definition 2.6 $a \in \mathcal{M}$ を含む連結成分を $U(a)$ で表す．$A \subset \mathcal{M}$ に対して，$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a)$ と書く．

Lemma 2.7 $A \leq B \leq \mathcal{M}, A \leq B' \leq \mathcal{M}$ かつ $B \cong_A B'$ とする．このとき $U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$ であるならば $\mathrm{tp}(B/A) = \mathrm{tp}(B'/A)$．

Proof. 簡単のため，B, B' が有限である場合を示す．勝手な $c \in \mathcal{M} - B$ を取り，$C = \mathrm{cl}(cB)$ とする．このとき往復論法より

$$C'B' \cong_A CB, \quad U(s(C')) \cong_A U(s(C))$$

を満たす $C' \leq \mathcal{M}$ が存在することが示されれば十分．c を含む C の連結成分を C_0 とし，$B_0 = B \cap C_0, A_0 = A \cap C_0$ とする．また，B_0' を $B_0B \cong_A B_0'B'$ を満たすように取る．このとき，上のことを示すには

$$C_0'B_0' \cong_{A_0} C_0B_0, \quad U(s(C_0')) \cong_{A_0} U(s(C_0))$$

を満たす $C_0 \leq \mathcal{M}$ が存在することがいえればよい．次の２つの場合に分けて考える．

Case 1: c が jr-element の場合．

このとき B_0 も jr-element なので，$U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$ なので，B'_0 も jr-element. ここで，C'_0 を $C_0B_0 \cong_{A_0} C'_0B'_0$ となるように取ると，C'_0 は連結かつ $\mathbf{K}$ の元. よって Lemma 2.4 より，$C'_0B'_0 \cong_{A_0} C_0B_0$ を満たす $C_0 \leq \mathcal{M}$ が存在. さらに，$U(s(C'_0)) = U(s(C_0)) = \emptyset$ であることに注意すれば，Case 1 の場合は成り立つことがわかる.
Case 2: c が s-element の場合.

$c \in U(s(B_0))$ であるので，$C_0 \subset U(s(B_0))$ が成り立つ. よって求める C'_0 は $U(s(B'_0))$ の中から取れる.

Definition 2.8 1. $\bar{a} \in \mathcal{M}$ に対して，$d(\bar{a}) = \delta(\mathrm{cl}(\bar{a}))$ と定義する.

2. $d(\bar{a}/\bar{b}) = d(\bar{a}\bar{b}) - d(\bar{b})$ と書く.

3. $\bar{a} \in \mathcal{M}$ と $A \subset \mathcal{M}$ に対して，$\mathrm{d}(\bar{a}/A) = \lim_{\bar{b}\in A} d(\bar{a}/\bar{b})$ と定義する.

4. $B \cap C = A$ を満たす $A, B, C \subset \mathcal{M}$ が，$B \perp_A C$ かつ $BC \leq \mathcal{M}$ を満たすとき，$B \downarrow^d_A C$ と書く.

Fact 2.9 $A, B, C \leq \mathcal{M}$ が $B \cap C = A$ を満たすとする. このとき次は同値.

1. $d(B/C) = d(B/A)$

2. $B \downarrow^d_A C$

Lemma 2.10 $\mathrm{Th}(M)$ は超安定.

Proof. 任意の $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$ と濃度 λ の $N \prec \mathcal{M}$ に対して，$|S(N)| = \lambda$ が示せればよい. タイプ $p \in S(N)$ を固定し，$\bar{b}$ を p の解とする. このとき $d(\bar{b}/N) = d(\bar{b}/A)$ を満たす可算な $A \subset N$ が存在. $B = \mathrm{cl}(\bar{b}A)$ とする. ここで $B \cap N = A$ が成り立っていると仮定しても構わない. (必要ならば A を取り直す.) このとき Fact 2.9 より $B \downarrow^d_A N$. $B' \downarrow^d_A N$ を満たす $\mathrm{tp}(B/A)$ の解 B' を任意に選ぶ.
Claim: $\mathrm{tp}(B'/N) = \mathrm{tp}(B/N)$.
Proof: Fact 2.9 より，$BN, B'N \leq \mathcal{M}$ および $B \cong_N B'$ を得る. 一方，$\mathrm{tp}(B/A) = \mathrm{tp}(B'/A)$ より，あきらかに $U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$. N がモデルであることより，$U(s(B)) \perp_A N$ and $U(s(B')) \perp_A N$. したがって $U(s(B)) \cong_N U(s(B'))$. よって Lemma 2.7 より $\mathrm{tp}(B/N) = \mathrm{tp}(B'/N)$ を得る.

以上より次の定理が得られる.

Theorem 2.11 真に超安定で non-trivial なジェネリック構造が存在する.

References

[1] J. T. Baldwin, Problems on pathological structures, In Helmut Wolter Martin Weese, editor, *Proceedings of 10th Easter Conference in Model Theory* (1993) 1–9

[2] J. T. Baldwin, A field guide to Hrushovski's constructions, http://www.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/hrutrav.pdf, 2009

[3] J. T. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, Annals of Pure and Applied Logic 79 (1996) 1–35

[4] E. Hrushovski, A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane, preprint, 1988

[5] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, Annals of Pure and Applied Logic 62 (1993) 147–166

[6] K. Ikeda, *Ab initio* generic structures which are superstable but not ω-stable, submitted

[7] F. O. Wagner, Relational structures and dimensions, In *Automorphisms of first-order structures*, Clarendon Press, Oxford (1994) 153–181