数理解析研究所講究録
第 1743 巻 2011 年 21-54

ウェーブレットの変動指数関数空間への応用*

北海道大学大学院理学研究科数学専攻　出耒 光夫 (Mitsuo Izuki)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University

目次

*2000 Mathematics Subject Classification : Primary: 42C40; Secondary: 42B35; 42C15; 46B15.

関数空間の性質を調べる為の有効な手段の1つは，その空間に属する各関数を適切な関数系を用いて展開し，その展開式に現れる展開係数によって特徴付けを行なう事である．ウェーブレットはこの手段を実現できる優れた関数系を与える．適当な滑らかさ，減少度，帯域制限性あるいは台のコンパクト性といった特性に着目してウェーブレットを用いる事で，様々な関数空間の特徴付けや無条件基底の構成が可能となる．更に，Lebesgue 空間，Sobolev 空間，Triebel–Lizorkin 空間などにおいては，無条件基底よりも優れたグリーディー基底と呼ばれる基底が構成できる事が知られている（[16, 21, 50]）．グリーディー基底は有限線形結合により精度の良い非線形近似を与えるものであり，こうしたウェーブレットから構成される基底を用いた近似理論は画像解析，信号解析，統計的推定および偏微分方程式の数値解析など様々な分野で応用され注目されている．

多くの関数空間の中でも特にウェーブレットによる応用が実現されてきたクラスの1つが，A_p ウェイトに関する重み付き関数空間である．A_p ウェイトの理論は Muckenhoupt [40] によって確立され，重み付き Lebesgue 空間における種々の作用素の有界性が保証される事によって，実解析学の大いなる発展に繋がった．これまでに Calderón–Zygmund の特異積分作用素の有界性や Fefferman–Stein のベクトル値不等式を用いて，Lemarié-Rieusset [35] および García-Cuerva–Martell [14] によって重み付き Lebesuge 空間の特徴付けと無条件基底の構成が示されている．更に，この無条件基底の正規化によって重み付き Lebesgue 空間におけるグリーディー基底が得られる（[22, 27, 28]）．

近年，実解析学，偏微分方程式論，ポテンシャル論，応用数学など数学の様々な分野で注目されているのが変動指数関数空間と呼ばれる関数のクラスである．特に最近では，電気流動体の数学モデル化や画像復元への応用において注目されている．変動指数関数空間が最初に現れたのは１９５１年出版の中野の本 [42] である．その後，Kováčik–Rákosník [34] によって変動指数 Lebesgue 空間と変動指数 Sobolev 空間の基本性質が明らかにされ，現在の発展に繋がっている．変動指数関数空間における重要課題の1つが，Hardy–Littlewood の最大作用素 M の有界性である．この有界性は変動指数関数空間における様々な解析の実現に繋がるものであり，多くの研究者がこの課題に取り組んできた．Diening [10]，Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [8]，Nekvinda [43] はそれぞれ独立して変動指数 Lebesgue 空間上 M が有界となる為の十分条件である log-Hölder 条件と呼ばれる結果を与えた．また，Cruz-Uribe–Fiorenza–Martell–Pérez [7] が証明した補外定理は，Calderón–Zygmund の特異積分作用素，BMO 関数と特異積分作用素とのコミュテーター，マルチプライヤーといった幾つかの重要な作用素の適当な条件下における変動指数 Lebesgue 空間上での有界性を保証している．この補外定理を応用し，出耒 [23]，Kopaliani [33] はウェーブレットによる変動指数 Lebesgue 空間の特徴付けを与え，無条件基底を構成した．し

かしながら通常の Lebesgue 空間の場合と異なり，変動指数 Lebesgue 空間においてはグリーディー基底の構成ができないという事実を Kopaliani [33] が証明している．

ここで，本稿の概要を述べておきたい．1節では，多重解像度解析に基づいたウェーブレットの構成と幾つかの具体例について紹介する．2節では，本稿に登場する4種類の基底（Shauder 基底，無条件基底，グリーディー基底，デモクラティック基底）の定義を確認する．3節においては，まず前半で Muckenhoupt の A_p ウェイトの定義と有名な事実について述べる．そして後半では，ウェーブレットによる重み付き Lebesgue 空間の特徴付けと基底の構成についての結果を紹介する．4節では変動指数 Lebesgue 空間について解説する．変動指数 Lebesgue 空間を定義し，その基本性質を述べ，Hardy–Littlewood の最大作用素に関する結果を紹介する．更に，変動指数と Muckenhoupt の A_p ウェイトとの関連性について議論し，2つの未解決問題にも触れる．5節は，ウェーブレットの変動指数 Lebesgue 空間への応用に関する結果である．前半では，ウェーブレットによる変動指数 Lebesgue 空間の特徴付けと基底の構成に関する結果を述べる．後半においては，多重解像度解析に付随する直交射影とウェーブレットによる特徴付けの変動指数 Lebesgue 空間におけるモジュラー不等式の結果を述べる．6節では，本稿で述べた以下の結果について証明を与える：

- ウェーブレットによる重み付き Lebesgue 空間におけるグリーディー基底の構成（定理 3.8，出耒 [22]，出耒–澤野 [27, 28]）．
- ウェーブレットによる変動指数 Lebesgue 空間の特徴付けと無条件基底の構成（定理 5.3，出耒 [23]，Kopaliani [33]）．
- 変動指数 Lebesgue 空間におけるウェーブレットに関するモジュラー不等式（定理 5.5，定理 5.7，出耒 [23]）．

以下，本稿で用いる記号についてまとめておく．

1. f を $\mathbb{R}^n$ 上の関数とする．$j \in \mathbb{Z}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し，
$$\begin{aligned} f_{j,k}(x) &:= 2^{jn/2} f(2^j x - k) \\ &= 2^{jn/2} f(2^j x_1 - k_1, \ldots, 2^j x_n - k_n) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$
と書く．
2. $\mathbb{R}^n$ 上の関数 f に対する Fourier 変換を
$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$
によって定める．但し，$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $x\cdot\xi := x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ である．

3. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ における L^2-内積を意味する．すなわち，

$$\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

4. 可測集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ に対し，$|S|$ は Lebesgue 測度， χ_S は特性関数を意味する．
5. 可測集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ 上の関数 f に対して，S における f の平均値を f_S で表す．すなわち，$f_S := \frac{1}{|S|}\int_S f(x)\,dx$.
6. 集合 $\mathbb{N}_0$ は 0 以上の整数全体を表す.
7. 多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in{\mathbb{N}_0}^n$ に対して，

$$|\alpha| := \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu$$

と書く．また，関数 f の α 回微分を

$$D^\alpha f := \frac{D^{|\alpha|}f}{Dx_1^{\alpha_1}\dots Dx_n^{\alpha_n}}$$

と表す.

8. 記号 C は主たるパラメーターに依存しない正の定数を表す.
9. 立方体 Q は各辺が各座標軸に平行であるもの，すなわち $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, r>0$ によって $Q=\prod_{\nu=1}^n(x_\nu-r/2\,,\,x_\nu+r/2)$ と表されるものとする.
10. $j\in\mathbb{Z}$, $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して，$Q_{j,k}$ は**二進立方体**

$$Q_{j,k} := \prod_{\nu=1}^{n}\left(2^{-j}k_\nu\,,\,2^{-j}(k_\nu+1)\right).$$

を意味する．また，$\chi_{j,k} := 2^{jn/2}\chi_{Q_{j,k}}$ と書く.

11. Ω は $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合を表すものとする.
12. $C_c^\infty(\Omega)$ は無限回微分可能かつコンパクトな台を持つ Ω 上の関数全体を表す.

1 ウェーブレットと多重解像度解析

本節の内容は，ウェーブレットの専門書 [3, 20, 39, 52] などで詳述されている．まずは，ウェーブレットの定義を確認しておきたい.

定義 1.1. $\psi^l\in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(l=1,2,\dots,2^n-1)$ とする．関数列

$$\{\psi^l_{j,k} : l=1,2,\dots,2^n-1,\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n\} \tag{1}$$

が $L^2(\mathbb{R}^n)$ における正規直交基底を成す時，関数の集合 $\{\psi^l : l=1,2,\dots,2^n-1\}$ を**ウェーブレット集合**と云う．更に，各 ψ^l を**ウェーブレット**，関数列 (1) を**ウェーブレット基底**と呼ぶ.

一般に，ウェーブレットは多重解像度解析と呼ばれる $L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間族を用いて構成する事ができる．

定義 1.2. 次の 6 条件を満たす時，$L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は**多重解像度解析**と呼ばれる：

1. 各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して，$V_j\subset V_{j+1}$.
2. $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．
3. $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j=\{0\}$.
4. 各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して，$f\in V_j$ と $f(2^{-j}x)\in V_0$ は同値である．
5. $f\in V_0$ ならば，全ての $k\in\mathbb{Z}^n$ に対して $f(x-k)\in V_0$.
6. ある $\varphi\in V_0$ で，関数列 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ が V_0 の正規直交基底となるものが存在する．この関数 φ を $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ の**スケーリング関数**と云う．

条件 *6.* から *5.* が導かれるのは明らかであり，文献によっては *5.* を除く 5 条件で定義されている場合もある．また，*3.* はその他の条件から示される事が知られている．

スケーリング関数 φ を持つ多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を考える．各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$P_jf:=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k}\quad(f\in L^2(\mathbb{R}^n)) \tag{2}$$

と定めると，P_j は $L^2(\mathbb{R}^n)$ から V_j への直交射影である．また，V_{j+1} における V_j の直交補空間を W_j とする．この時，ウェーブレット集合 $\{\psi^l : l=1,2,\dots,2^n-1\}$ で，各 $j\in\mathbb{Z}$ に対し関数列

$$\{\psi^l_{j,k} : l=1,2,\dots,2^n-1,\ k\in\mathbb{Z}^n\}$$

が W_j の正規直交基底となるようなものを構成できる事が知られている．

$n=1$ の場合，スケーリング関数 φ を用いて

$$\psi(t):=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{(-1)^m\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u-m)\overline{\varphi(u/2)}\,du\right\}\varphi(2t+m+1) \tag{3}$$

と定めれば，関数 ψ はウェーブレットとなり，各 $j\in\mathbb{Z}$ に対し関数列 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は W_j の正規直交基底となる．従って，もしスケーリング関数 φ が適当な滑らかさや減少度，あるいは台のコンパクト性，帯域制限性といった性質を持つならば，(3) で与えられるウェーブレット ψ も類似した性質を持つものとなる．また，全ての $m\in\mathbb{Z}$ に対して $\psi(\cdot-m)$ もウェーブレットであり，各 $j\in\mathbb{Z}$ に対し $\{(\psi(\cdot-m))_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}=\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が成り立つ事にも注意しておきたい．以下，一変数の場合におけるスケーリング関数とウェーブレットについて幾つかの例を挙げておく．

例 1.3.

1. まず，古典的な Haar 関数（[17]）を紹介する．関数 $\varphi = \chi_{[0,1)}$ は，ある多重解像度解析のスケーリング関数となる．この時，ウェーブレット $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ が得られる．この φ を **Haar スケーリング関数**，ψ を **Haar ウェーブレット**と呼ぶ事にする．
2. 次に，Shannon の例を紹介する．関数 $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ は，ある多重解像度解析のスケーリング関数となる．φ は実数値関数であり，帯域制限性 $\hat{\varphi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$ を満たしている．(この性質から有名な事実として知られている古典的なサンプリング定理が導かれる．この点については後述の注意 1.4 で触れておきたい．) このスケーリング関数 φ から，
$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\chi_{[-2\pi,-\pi)\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$$
によってウェーブレット ψ が与えられる．ψ もまた実数値であり，帯域制限性を持つ事が解かる．
3. 3 番目に，Meyer の例を紹介する．スケーリング関数 φ で，Schwartz クラスに属し，実数値であり，帯域制限性 $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ を満たすものが構成できる．この時，(3) によって与えられるウェーブレット ψ もまた Schwartz クラスに属し，実数値であり，帯域制限性 $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset \left[-\frac{8}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right]$ を満たす．
4. 最後は，Daubechies の例である．各自然数 $N \geq 2$ に対して，スケーリング関数 φ で，実数値であり，$C^{r(N)}$ 級の滑らかさとコンパクトな台 $\operatorname{supp}\varphi = [0, 2N-1]$ を持つものが構成できる．但し，$r(N)$ は N に関する増加関数である．これを用いて，関数 ψ を
$$\begin{aligned}\psi(t) &:= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-m)\overline{\varphi(u/2)}\,du\right\} \varphi(2(t-N)+m+1) \\ &= \sum_{m=0}^{2N-1} \left\{(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-m)\overline{\varphi(u/2)}\,du\right\} \varphi(2t-2N+m+1) \qquad (4)\end{aligned}$$
と定める．この時 ψ はウェーブレットとなり，実数値で，$C^{r(N)}$ 級の滑らかさとコンパクトな台 $\operatorname{supp}\psi = [0, 2N-1]$ を持つものとなる．この φ を **Daubechies スケーリング関数**，ψ を **Daubechies ウェーブレット**と呼ぶ事にする．Daubechies の例の構成については，前掲の 3 冊の本に加え [9, 36] についても参照されたい．

注意 1.4. Shannon のスケーリング関数の特性から導かれる古典的なサンプリング定理について述べておく．関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ は，ある定数 $W > 0$ に対し帯域制限性

$\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-2\pi W, 2\pi W]$ を満たすとする．この時，$L^2(\mathbb{R})$-ノルム収束の意味で展開式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right)\varphi(2Wt-k) \tag{5}$$

が成り立つ．更に，ノルム等式

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2W}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{2W}\right)\right|^2$$

も成立する．この結果は，その発見および証明において小倉，Shannon，染谷，Whittakerたちが重要な役割を果たしており，彼らの名前の付いた定理として呼ばれる事が多い．サンプリング定理に関しては多数の文献が存在するが，古典的な論文 [45, 47]，最近の論説 [5, 44] などを参照されたい．

次に多変数の場合について考察したい．議論を始める前に，r-正則と呼ばれる関数のクラスを定義しておく．

定義 1.5. $r \in \mathbb{N}$，$f \in C^r(\mathbb{R}^n)$ とする．全ての $m \in \mathbb{N}$ に対して定数 $C_m > 0$ が存在し，$|\alpha| \leq r$ を満たす任意の $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n$ に対して

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ時，f を r-**正則**と云う．

各 $r \in \mathbb{N}$ に対して，r-正則なスケーリング関数 φ を持つ多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ と，それに付随した r-正則なウェーブレットから成るウェーブレット集合を構成できるという事実が知られている．しかしながら一変数の場合と異なり，一般に多変数の場合は φ を用いて各ウェーブレットを直接記述するのは困難である．

ここで，テンソル積による多変数のウェーブレットの構成法を紹介しておこう．関数 $\varphi^0 \in L^2(\mathbb{R})$ はある多重解像度解析のスケーリング関数とし，φ^1 は φ^0 を用いて (3) で定められるウェーブレットであるとする．添字集合

$$E := \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$$

を考え，各 $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) \in E$ に対して $\mathbb{R}^n$ 上の関数

$$\varphi(x) := \prod_{\nu=1}^{n}\varphi^0(x_\nu),\ \psi^\epsilon(x) := \prod_{\nu=1}^{n}\varphi^{\epsilon_\nu}(x_\nu) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

を定義する．更に各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し，部分空間 $V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}}^{L^2(\mathbb{R}^n)}$ を定める．この時，$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ はスケーリング関数 φ を持つ多重解像度解析となる．同時に，$\{\psi^\epsilon\}_{\epsilon\in E}$

はウェーブレット集合となり，各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し $\{\psi^{\epsilon}_{j,k} : \epsilon \in E,\, k \in \mathbb{Z}^n\}$ は W_j における正規直交基底となる．このテンソル積による構成法に従えば，多変数の場合において，台がコンパクトなスケーリング関数を持つ多重解像度解析および付随したウェーブレット集合で台がコンパクトなウェーブレットから成るものが構成できる．

- φ^0 を例 1.3.-4 で述べた Daubechies スケーリング関数，φ^1 を (4) によって φ^0 から導かれる Daubechies ウェーブレットとする．そして，テンソル積 (6) によりスケーリング関数 φ およびウェーブレット集合 $\{\psi^{\epsilon}\}_{\epsilon \in E}$ を構成する．この時，φ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ における **Daubechies スケーリング関数**，$\{\psi^{\epsilon}\}_{\epsilon \in E}$ を φ に付随した **Daubechies ウェーブレット集合**と呼ぶ．

- 関数 $\varphi = \chi_{[0,1)^n}$ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ における **Haar スケーリング関数**と呼ぶ．同時に，$\varphi^0 = \chi_{[0,1)}$ と $\varphi^1 = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ を使って (6) で与えられるウェーブレット集合 $\{\psi^{\epsilon}\}_{\epsilon \in E}$ を **Haar ウェーブレット集合**と呼ぶ．

2 基底

本節では，Banach 空間における 4 種類の基底について紹介する．前半の 2 つは関数解析学において一般的な Schauder 基底と無条件基底である．後半 2 つはグリーディー基底とデモクラティック基底と呼ばれ，近似に関して優れた性質を持つものとして近年注目されている．

以下特に断らない限り，本節において X はノルム $\|\cdot\|_X$ に関する Banach 空間，$\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ は X の点列であるとする．

定義 2.1.

1. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が X における **Schauder 基底**であるとは，全ての $y \in X$ に対して係数 $c_j(y) \in \mathbb{C}$ $(j \in \mathbb{N})$ が一意的に存在し，X のノルムの意味で展開式

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(y) y_j \tag{7}$$

が成り立つ事を云う．

2. *Schauder* 基底 $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が**無条件基底**であるとは，展開式 (7) が常に無条件収束している事を云う．すなわち，任意の置換 σ に対して

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\sigma(j)}(y) y_{\sigma(j)}$$

が成立している事を云う．

無条件基底の定義に関しては複数の同値な条件があり，上の定義はそのうちの1つである（[20, 52] 参照）．次に，[31] に従ってグリーディー基底とデモクラティック基底を定義する．

定義 2.2. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ は X の *Schauder* 基底であり，$\|y_j\|_X = 1$ $(j \in \mathbb{N})$ を満たすものとする．

1. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が次を満たす時，X における**グリーディー基底**であると云う：各 $y \in X$ に対して置換 ρ が存在し，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|c_{\rho(1)}(y)\right| \geq \left|c_{\rho(2)}(y)\right| \geq \ldots \geq \left|c_{\rho(N)}(y)\right|,$$
$$\left\| y - \sum_{j=1}^{N} c_{\rho(j)}(y) y_{\rho(j)} \right\|_X \leq C \inf_{z \in \Sigma_N} \|y - z\|_X$$

が成立する．但し，

$$\Sigma_N := \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda y_\lambda \,:\, \Lambda \subset \mathbb{N},\, \sharp\Lambda \leq N,\, \alpha_\lambda \in \mathbb{C}\ (\lambda \in \Lambda) \right\}.$$

2. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が X における**デモクラティック基底**であるとは，$\sharp P = \sharp Q$ を満たす任意の有限集合 $P, Q \subset \mathbb{N}$ に対し

$$\left\| \sum_{j \in P} y_j \right\|_X \leq C \left\| \sum_{j \in Q} y_j \right\|_X$$

が成り立つ事を云う．

次の定理は Konyagin–Temlyakov [31, Theorem 1] によるもので，デモクラティック基底とグリーディー基底の関係についての非常に興味深い結果である．

定理 2.3. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ は X の *Schauder* 基底であり，$\|y_j\|_X = 1$ $(j \in \mathbb{N})$ を満たすものとする．この時，次の2条件は同値である：

1. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ はグリーディー基底である．
2. $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ は無条件基底かつデモクラティック基底である．

3 重み付き Lebegue 空間と Muckenhoupt の A_p クラス

非負値の局所可積分関数を**荷重関数**と呼ぶ．また，荷重関数 w と可測集合 S に対して，

$$w(S) := \int_S w(x)\, dx$$

と書く.

定義 3.1. 荷重関数 w と定数 $1 \leq p < \infty$ に対して，**重み付き Lebesgue 空間**は

$$L^p_w(\Omega) := \left\{ f \text{ は可測関数 } : \|f\|_{L^p_w(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

によって定義される．$w(x) \equiv 1$ の場合，$L^p_w(\Omega)$ は通常の *Lebesgue* 空間 $L^p(\Omega)$ を意味する．

以下，本節の前半で Muckenhoupt の A_p クラスに関する諸性質，後半で重み付き Lebesgue 空間 $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ におけるウェーブレットの応用の結果を紹介する．より詳しい内容については

- 3.1 節に関して $\cdots$ 本 [13, 15, 49, 51]，論文 [6, 40, 41]
- 3.2 節に関して $\cdots$ 本 [20, 39, 52]，論文 [1, 14, 22, 27, 28, 35, 50]

などの文献を参照されたい．

3.1 Muckenhoupt の A_p クラス

定義 3.2. Hardy–Littlewood の最大作用素 M は，

$$Mf(x) := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \quad (f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$$

によって定義される．但し，上限は $x \in \Omega$ を含む Ω 内の立方体 Q 全体についてとるものとする．

定義 3.3.

1. $1 < p < \infty$ に対して，$w^{-1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ かつ

$$[w]_{A_p(\Omega)} := \sup_Q w_Q \left(w^{-1/(p-1)}{}_Q \right)^{p-1} < \infty \tag{8}$$

を満たす Ω 上の荷重関数 w を A_p **ウェイト**と云い，A_p ウェイト全体の集合を $A_p(\Omega)$ と書く．但し，*(8)* において上限は Ω 内の立方体 Q 全体についてとるものとする．

2. Ω 上の荷重関数 w で

$$Mw(x) \leq C\, w(x)$$

を満たすものを A_1 **ウェイト**と云い，A_1 ウェイト全体の集合を $A_1(\Omega)$ と書く．

3. $A_\infty(\Omega) := \bigcup_{1 \le p < \infty} A_p(\Omega)$ と定め，$A_\infty(\Omega)$ に属する荷重関数を A_∞ **ウェイト**と云う．

注意 3.4. Hölder の不等式から，$1 \le p \le q$ に対して $A_p(\Omega) \subset A_q(\Omega)$ が導かれる．また，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $|x|^a$ (a は実定数) に対して

1. $1 < p < \infty$ の時，$|x|^a \in A_p(\mathbb{R}^n) \iff -n < a < n(p-1)$,
2. $|x|^a \in A_1(\mathbb{R}^n) \iff -n < a \le 0$

が成り立つ事が知られている．

$1 \le p < \infty$ の時，A_p ウェイトと Hardy–Littlewood の最大作用素 M の重み付き Lebesgue 空間における有界性との間に次の同値性が成り立つ．

命題 3.5. $\mathbb{R}^n$ 上の荷重関数 w に対して，次が成立する：

1. $1 < p < \infty$ の時，以下の 3 条件は同値である：
(a) $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$.
(b) M は $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ 上有界である，すなわち，任意の $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|Mf\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}.$$

(c) M は $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ 上弱有界である，すなわち，任意の $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ と $\lambda > 0$ に対して

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right)^{1/p} \le C\,\lambda^{-1}\,\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}.$$

2. 以下の 2 条件は同値である：
(a) $w \in A_1(\mathbb{R}^n)$.
(b) M は $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ 上弱有界である，すなわち，任意の $f \in L^1_w(\mathbb{R}^n)$ と $\lambda > 0$ に対して

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \le C\,\lambda^{-1}\,\|f\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)}.$$

また，A_∞ ウェイトに関しては複数の同値な条件が知られている．

命題 3.6. $\mathbb{R}^n$ 上の荷重関数 w に対して，以下の 3 条件は同値である：

1. $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. 定数 $0 < \delta < 1$ が存在し，任意の立方体 Q と可測集合 $S \subset Q$ に対して

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \le C\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^\delta.$$

3. 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して $0 < \beta < 1$ が存在し，任意の立方体 Q と $|F| \ge \alpha\,|Q|$ を満たす可測集合 $F \subset Q$ に対して，

$$\beta\,w(Q) \le w(F). \tag{9}$$

3.2 ウェーブレットと重み付き Lebesgue 空間

以下，本節において $\{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ は多重解像度解析から構成される 1-正則なウェーブレットから成るウェーブレット集合，または Haar ウェーブレット集合とする．ウェーブレットによる関数空間の特徴付けを得る為，平方関数

$$
\begin{aligned}
Vf &:= \left(\sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \langle f, \psi^l_{j,k} \rangle \psi^l_{j,k} \right|^2 \right)^{1/2}, \\
Wf &:= \left(\sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \langle f, \psi^l_{j,k} \rangle \chi_{j,k} \right|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

を用いる．

定理 3.7. $1 < p < \infty$ と $\mathbb{R}^n$ 上の荷重関数 w に対して，以下の 4 条件は同値である：

1. $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

2. 任意の $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$
C^{-1} \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le \|Vf\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}
$$

3. 任意の $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$
C^{-1} \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le \|Wf\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}. \tag{11}
$$

4. ウェーブレット基底

$$
\{\psi^l_{j,k} : l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n\}
$$

は $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ における無条件基底である．更に，任意の $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ に対してウェーブレット展開

$$
f = \sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \psi^l_{j,k} \rangle \psi^l_{j,k}
$$

が成り立つ．

通常の Lebesgue 空間における定理 3.7 の証明は，[20, 39, 52] などの専門書で紹介されている．一変数の滑らかなウェーブレットの場合において，Lemarié-Rieusset [35] は条件 *3.* 以外の同値性を Calderón–Zygmund の特異積分作用素の有界性を用いて証明している．一方，García-Cuerva–Martell [14] は Fefferman–Stein のベクトル

値不等式（[2] 参照）を応用して条件 *3.* による $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けを与えた．Aimar–Bernardis–Martín-Reyes [1] はこれらの結果を多変数の場合に一般化し，その一方で Haar ウェーブレット集合を用いた結果も示している．

本節の最後に，ウェーブレットによる $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ におけるグリーディー基底の構成結果を紹介しておきたい．

定理 3.8. $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ とする．この時，$L^p_w(\mathbb{R}^n)$ において正規化されたウェーブレット基底

$$\left\{ \frac{\psi^l_{j,k}}{\|\psi^l_{j,k}\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}} : l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n \right\} \tag{12}$$

は任意の有限集合 $\Lambda \subset \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$ に対して

$$C^{-1}(\sharp\Lambda)^{1/p} \le \left\| \sum_{(l,j,k)\in\Lambda} \frac{\psi^l_{j,k}}{\|\psi^l_{j,k}\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}} \right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \le C\,(\sharp\Lambda)^{1/p} \tag{13}$$

を満たすデモクラティック基底である．従って，定理 *2.3* より正規化されたウェーブレット基底 *(12)* は $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ におけるグリーディー基底となる．

Temlyakov [50] は，通常の Lebesuge 空間の場合に上の定理を証明している．本稿では，後述の 6.1 節において [22, 27, 28] に基づき定理 3.8 の証明を与える．

4 変動指数 Lebesgue 空間

本節では，まず変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ を定義し，幾つかの基本性質を述べる．そして，Hardy–Littlewood の最大作用素の有界性と Muckenhoupt の A_p クラスに関連した話題について触れる．

変動指数 Lebesgue 空間は，区間 $[0,1]$ で定義された形として１９５１年出版の中野の本 [42] に最初に現れた．それ以降長年にわたり注目されていなかったが，１９９１年 Kováčik–Rákosník [34] によりその基本性質が整備されてから約２０年間で急速に研究が進められてきた．近年の発展に関しては，論説 [18, 19, 46]，最新の本 [12] などを参照されたい．

4.1 変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

定義 4.1. 可測関数 $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty)$ に対して，**変動指数 Lebesgue 空間**は

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \{f \text{ は可測関数 : ある } \lambda > 0 \text{ が存在し，} \rho_p(f/\lambda) < \infty\},$$

但し,

$$\rho_p(f) := \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx$$

によって定義される.

変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ は,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \rho_p(f/\lambda) \le 1\}$$

によって定義されるノルムに関して Banach 空間となる. また, 変動指数 $p(\cdot)$ が定数 $p_0 \in [1,\infty)$ に等しい時, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ は通常の Lebesgue 空間 $L^{p_0}(\Omega)$ に一致し, それぞれのノルムも等しい.

以下, 変動指数 $p(\cdot) : \Omega \to [1,\infty)$ に対して

$$p_- := \operatorname{ess\,inf}\{p(x) \; : \; x \in \Omega\}, \quad p_+ := \operatorname{ess\,sup}\{p(x) \; : \; x \in \Omega\}$$

と書き, $p_- > 1$ かつ $p_+ < \infty$ を満たす変動指数 $p(\cdot) : \Omega \to [1,\infty)$ 全体を $\mathcal{P}(\Omega)$ と定める. また, $p'(\cdot)$ は $p(\cdot)$ の共役指数, すなわち $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$ を満たすものとする.

ここで, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ における次の基本的な結果を紹介しておく. 証明については [34] を参照されたい.

補題 4.2. $p(\cdot) : \Omega \to [1,\infty)$ に対して, 以下が成立する.

1. *(**一般化された Hölder の不等式**).* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ の時, 任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \le r_p \, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)},$$

   但し, $r_p := 1 + 1/p_- - 1/p_+$.
2. *(**双対性**).* 任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ に対して,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le \sup\left\{\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \; : \; \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \le 1\right\} \le r_p \, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

   すなわち $\sup\left\{\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \; : \; \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \le 1\right\}$ は $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ と同値なノルムである.
3. $p_+ < \infty$ ならば, $C_c^\infty(\Omega)$ は $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ において稠密である.
4. $p_+ < \infty$ ならば, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ は可分である.

4.2 Hardy–Littlewoodの最大作用素の有界性

定義 4.3. $\mathcal{P}(\Omega)$ に属する変動指数 $p(\cdot)$ で，*Hardy–Littlewood* の最大作用素 M が $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 上有界となるもの，すなわち任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ に対して

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le C\,\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{14}$$

を満たすもの全体を $\mathcal{B}(\Omega)$ と定める．

変動指数がクラス $\mathcal{B}(\Omega)$ に属する為の十分条件として，次の有名な結果がある．

命題 4.4. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ が次の２条件

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{-\log(|x-y|)} \quad (|x-y| \le 1/2), \tag{15}$$

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log(e+|x|)} \quad (|y| \ge |x|) \tag{16}$$

を満たすならば，$p(\cdot) \in \mathcal{B}(\Omega)$ が成立する．

上の命題は Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [8] による結果であり，２条件 (15), (16) は **log-Hölder** 条件と呼ばれる．尚，Ω が有界の場合については条件 (15) のみから $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\Omega)$ が導かれる事が Diening [10] によって証明されている．一方，Nekvinda [43] は $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合に条件 (16) をより一般化した形で与えている．

２条件 (15), (16) より，例えば有界な Lipschitz 連続関数などは $\mathcal{B}(\Omega)$ に属する事が解かる．また，$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ に対して

$$|p'(x) - p'(y)| \le \frac{|p(x)-p(y)|}{(p_- - 1)^2}$$

であるから，もし $p(\cdot)$ が (15) および (16) を満たすならば，$p'(\cdot)$ もまたこれらの条件を満たすものとなる．$\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合において，Diening [11, Theorem 8.1] は次の同値性を証明している．以下，$\mathcal{Y}$ は互いに共通部分を持たない $\mathbb{R}^n$ の立方体全体を表すものとする．

命題 4.5. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して，次は同値である．

(D1) $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
(D2) $p'(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
(D3) ある定数 $q \in (1, p_-)$ が存在し，$p(\cdot)/q \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
(D4) 任意の $Y \in \mathcal{Y}$ と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\left\| \sum_{Q \in Y} |f|_Q \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Hardy–Littlewoodの最大作用素の有界性に関して，更にもう1つLerner [37, Theorem 1.1] による興味深い結果を紹介しておきたい．

定理 4.6. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の時，次の2条件は同値である:

1. 任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，
$$\int_{\mathbb{R}^n} \{Mf(x)\}^{p(x)}\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\,dx. \tag{17}$$

2. $p(\cdot)$ は定数に等しい．

ノルム不等式(14) と比較して，(17)のような積分形の不等式を**モジュラー不等式**と呼ぶ．定理 4.6において，*2.* $\Rightarrow$ *1.* の主張は通常のLebesgue空間における M の有界性であり有名な事実である．重要なのは *1.* $\Rightarrow$ *2.* の主張である．これは，通常のLebesgue空間では一致する筈のノルム不等式(14) とモジュラー不等式(17)の差異を示しており，後者の不等式成立が極めて強い条件である事が考察できる．

4.3 変動指数とクラス A_p との関連性

次に，変動指数とMuckenhouptの A_p クラスとの関連性について述べたい．まずは，Cruz-Uribe–Fiorenza–Martell–Pérez [7, Corollary 1.11] による**補外定理**を紹介しておこう．

補題 4.7. $\mathcal{G}$ を可測関数の組 (f, g) の族とし，$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ はある定数 $q \in (1, p_-)$ に対して $(p(\cdot)/q)' \in \mathcal{B}(\Omega)$ を満たすものとする．更に，ある $p_0 \in (1, p_-)$ が存在し，任意の $w \in A_{p_0}(\Omega)$ と $f \in L^{p_0}_w(\Omega)$ を満たす全ての $(f, g) \in \mathcal{G}$ に対して
$$\|f\|_{L^{p_0}_w(\Omega)} \le C_0\,\|g\|_{L^{p_0}_w(\Omega)}$$
が成り立つと仮定する．但し，$C_0 > 0$ は n, p_0 および $[w]_{A_{p_0}(\Omega)}$ のみに依存した定数である．この時，$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ を満たす全ての $(f, g) \in \mathcal{G}$ に対して
$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le C_1\,\|g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$
が成立する．但し，$C_1 > 0$ は (f, g) に依らない定数である．

Calderón–Zygmundの特異積分作用素，BMO関数と特異積分作用素とのコミュテーター，マルチプライヤーなど実解析学における幾つかの重要な作用素は，$L^{p_0}_w(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p_0 < \infty,\ w \in A_{p_0}(\mathbb{R}^n))$ において有界である事が知られている．従ってこの補外定理と命題 4.5 より，条件 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の下でこれらの作用素の $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上における有界性が導かれる．こうした考察から，Muckenhouptの A_p クラスと適当な条件を満たす変動指数との間に何らかの関連性が見出せる．

今，命題 4.5 (D4) において $Y = \{Q\}$, $f = f\chi_Q$ とした (D4) よりも弱い条件

(A1) 任意の立方体 Q と任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$|f|_Q \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C \|f \chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}.$$

を考える.

補題 4.8. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の時, 条件 (A1) は次の条件 (A2) と同値である.

(A2) 任意の立方体 Q に対して

$$\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C. \tag{18}$$

条件 (A1) または (A2) を満たす $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 全体を $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ と定める. これまでの議論から, 直ちに $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ が解かる.

補題 4.8 の証明. 立方体 Q と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を任意にとる. まず (A1) $\Rightarrow$ (A2) を示す. (A1) を仮定しよう. 双対性 (補題 4.2-*2.*) より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \\
\le\ & C \cdot \frac{1}{|Q|}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \sup\left\{\int_{\mathrm{R}^n} |f(x)\chi_Q(x)|\,dx \,:\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le 1\right\} \\
\le\ & C \sup\left\{|f|_Q\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \,:\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le 1\right\} \\
\le\ & C \sup\left\{\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \,:\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le 1\right\} \\
\le\ & C
\end{aligned}$$

を得る. 従って (A2) が成り立つ. 次に (A2) $\Rightarrow$ (A1) を示す. (A2) を仮定しよう. 一般化された Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}
|f|_Q\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \cdot \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \\
&\le C \cdot \frac{1}{|Q|}\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}\|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \\
&\le C\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}
\end{aligned}$$

が導かれる. すなわち, (A1) が成立する. □

変動指数に対しても, Muckenhoupt の A_p クラスの場合に似た次の同値性が予想できる.

未解決問題 4.9. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次の 3 条件は同値であるか?

(C1) $p(\cdot) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$.

(C2) $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(C3) *Hardy–Littlewood* の最大作用素 M は $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上で弱 $(p(\cdot), p(\cdot))$ 型である，すなわち，任意の $\lambda > 0$ と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\left\|\chi_{\{Mf(x)>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

注意 4.10. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ とする．未解決問題 4.9 に関して，これまでに以下の事実が知られている．

1. (C3) $\Rightarrow$ (C1) は次のように簡単に証明できる．(C3) を仮定し，立方体 Q と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を任意にとる．$|f|_Q = 0$ の時は，直ちに (A1) が成り立つ．以下，$|f|_Q > 0$ の場合を考える．$\lambda = |f|_Q/2$ ととれば，$|f|_Q\chi_Q(x) \le M(f\chi_Q)(x)$ より，$x \in Q$ ならば $M(f\chi_Q)(x) > \lambda$ となる．故に，

$$\begin{aligned} |f|_Q\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\le |f|_Q \left\|\chi_{\{M(f\chi_Q)(x)>\lambda\}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le |f|_Q \cdot C\lambda^{-1}\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

   従って，$p(\cdot)$ は (A1) を満たす．
2. Kopaliani [32] は変動指数 $p(\cdot)$ がある球の外では定数値の場合に (A2) $\Rightarrow$ (D1)，つまり (C1) $\Rightarrow$ (C2) を示す事により 3 条件 (C1), (C2), (C3) の同値性を証明している．
3. Lerner [38] は $p(\cdot)$ が対称減少，つまり

$$p(x) = p(y) \quad (|x| = |y|), \qquad\qquad p(x) \ge p(y) \quad (|x| \le |y|)$$

   を満たす場合に (C1) $\Rightarrow$ (C3) を示す事により 2 条件 (C1), (C3) の同値性を証明している．また，彼は上記 Kopaliani の結果の別証も与えている．

4.4 変動指数とクラス A_∞ および BMO との関連性

クラス $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に属する変動指数は Muckenhoupt の A_∞ ウェイトに類似した次のような性質を持つ．

定理 4.11. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して，定数 $0 < \delta < 1$ が存在し，任意の立方体 Q と可測集合 $S \subset Q$ に対し，

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \le C\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^{\delta}. \tag{19}$$

定理 4.11 は，次の Diening [11, Lemma 5.5] による補題から直ちに導かれる．

補題 4.12. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ならば，定数 $0 < \delta < 1$ が存在し，全ての $Y \in \mathcal{Y}$ と $|f|_Q > 0$ *($Q \in Y$)* を満たす $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\left\| \sum_{Q \in Y} \left| \frac{f}{f_Q} \right|^{\delta} \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le C \left\| \sum_{Q \in Y} \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}. \tag{20}$$

(20) において，$Y = \{Q\}$, $f = \chi_S$ とすれば (19) が得られる．

A_p ウェイト $(1 < p < \infty)$ の場合と同様に，次の問題が考えられる．

未解決問題 4.13. 条件 *(19)* を満たす変動指数 $p(\cdot)$ を特徴付けよ．

一方，補題 4.12 の別の応用結果として，BMO 空間に関する興味深い事実が示される．ここで，BMO 空間について確認しておきたい．

定義 4.14. $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 b で

$$\|b\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| \, dx < \infty \tag{21}$$

を満たすもの全体を $BMO(\mathbb{R}^n)$ と定める．但し，*(21)* において上限は $\mathbb{R}^n$ 内の立方体 Q 全体についてとるものとする．

上の定義は，John–Nirenberg の不等式 ([29] 参照) を用いた議論によって一般化できる事が知られている．

補題 4.15. $1 \le q < \infty$ の時，任意の $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$C^{-1}\|b\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q|^q \, dx \right)^{1/q} \le C \, \|b\|_{BMO(\mathbf{R}^n)}.$$

補題 4.15 は，適当な条件下で変動指数の場合へ更なる一般化ができる．

定理 4.16. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ならば，任意の $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$C^{-1}\|b\|_{BMO(\mathbf{R}^n)} \le \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le C \, \|b\|_{BMO(\mathbf{R}^n)}.$$

定理 4.16 の証明. 立方体 Q と $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ を任意にとる．一般化された Hölder の不等式と条件 (A2) より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| \, dx &\le C \cdot \frac{1}{|Q|} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \|\chi_Q\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \\ &\le C \cdot \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

これより，結論の左側の不等式が導かれる．次に，右側の不等式を示す．補題 4.12 (20) において $Y=\{Q\}$ ととると，任意の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\left\| |f|^\delta \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\left(|f|_Q\right)^\delta \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$$

が得られる．ここで $f(x)=\{b(x)-b_Q\}^{1/\delta}\chi_Q(x)$ ととれば，補題 4.15 より

$$|f|_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(x)-b_Q|^{1/\delta}\,dx \le C\,\|b\|^{1/\delta}_{BMO(\mathrm{R}^n)}.$$

故に，

$$\|(b-b_Q)\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\,\|b\|_{BMO(\mathrm{R}^n)}\,\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$$

が導かれ，これより求める不等式が得られる． □

注意 4.17. 定理 4.11 や定理 4.16 は変動指数 Herz 空間における特異積分，分数積分，コミュテーターの有界性の証明など，種々の変動指数関数空間における様々な解析に応用できる（[24, 25, 26] 参照）．

5 ウェーブレットと変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

5.1 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ におけるノルム評価とウェーブレット基底

本節では，出耒 [23] および Kopaliani [33] に基づいて，(2) で定義される直交射影 P_j $(j\in\mathbb{Z})$ の $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ における有界性，ウェーブレットによる $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けと基底の構成に関する結果を述べる．以下，本節において

- φ は 1-正則な多重解像度解析のスケーリング関数，$\{\psi^l : l=1,2,\ldots,2^n-1\}$ はその多重解像度解析から構成される 1-正則なウェーブレットから成るウェーブレット集合，

または

- φ は Haar スケーリング関数，$\{\psi^l : l=1,2,\ldots,2^n-1\}$ は Haar ウェーブレット集合

とする．

まずは，直交射影 P_j $(j\in\mathbb{Z})$ の有界性から紹介したい．

定理 5.1. $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ならば，全ての $j\in\mathbb{Z}$ と $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|P_j f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\,\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}.$$

定理 5.1 は次の評価から直ちに導かれる.

補題 5.2. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ならば，全ての $j \in \mathbb{Z}$ と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$|P_j f(x)| \le C\, Mf(x).$$

補題 5.2 の証明. [30, Lemma 2.8]，[20, Chapter 5, Lemma 3.12] より，非負値かつ有界な対称減少関数 $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$ で

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} |\varphi(x-k)\varphi(y-k)| \le H(x-y)$$

を満たすものがとれる．更に，[48, p. 63]，[13, Chapter 4, Proposition 2.7] より

$$\int_{\mathbf{R}^n} 2^{jn} H(2^j(x-y))|f(y)|\, dy \le C_n \|H\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} Mf(x)$$

が成り立つ．但し，$C_n > 0$ は n のみに依存した定数である．以上より，補題 5.2 が従う． □

次に，ウェーブレットによる変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けと無条件基底の構成の結果を述べる．

定理 5.3. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の時，以下が成立する：

1. 任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$C^{-1} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le \|Vf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le C\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}, \tag{22}$$

$$C^{-1} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le \|Wf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} \le C\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}. \tag{23}$$

2. ウェーブレット基底

$$\left\{\psi^l_{j,k} \,:\, l = 1, 2, \dots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n\right\}$$

は $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ の無条件基底となる．更に，任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対してウェーブレット展開

$$f = \sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \langle f, \psi^l_{j,k} \rangle \psi^l_{j,k}$$

が成り立つ．

この定理の証明は，後述の 6.3 節で与える．

もし定理 5.3 で得た無条件基底を $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ のノルムで正規化したものがデモクラティック基底になるならば，定理 2.3 よりこれはグリーディー基底となる．しかしながら，定理 3.8 (13) の評価式から $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ においてはウェーブレットによるデモクラティック基底の構成は期待できない．実際に，Kopaliani [33] が次を示している．

定理 5.4. $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の時，正規化されたウェーブレット基底

$$\left\{ \frac{\psi^l_{j,k}}{\|\psi^l_{j,k}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}} : l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

が $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ のデモクラティック基底ならば，$p(\cdot)$ は定数に等しい．

5.2 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ におけるモジュラー不等式

本節では，出来 [23] に従って直交射影 P_j $(j \in \mathbb{Z})$ およびウェーブレットによる特徴付けのモジュラー不等式に関する結果を述べる．以下，φ は 1-正則な多重解像度解析のスケーリング関数，$\{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ はその多重解像度解析から構成される 1-正則なウェーブレットから成るウェーブレット集合とする．(ここで紹介する結果は，Haar の場合については成立しない．)

まずは，直交射影 P_j $(j \in \mathbb{Z})$ の $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ におけるモジュラー不等式に関する結果を紹介する．

定理 5.5. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の時，以下の２条件は同値である：

1. 全ての $j \in \mathbb{Z}$ と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\int_{\mathrm{R}^n} |P_j f(x)|^{p(x)}\, dx \le C \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx.$$

2. $p(\cdot)$ は定数に等しい．

注意 5.6. 補題 5.2 より，定理 5.5 は定理 4.6 の一般化である事が解かる．

最後に，ウェーブレットが多重解像度解析から構成されるという事実に着目すると，ウェーブレットによる $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けとモジュラー不等式に関する次の結果が得られる．

定理 5.7. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の時，以下の２条件は同値である：

1. 任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$C^{-1} \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx \le \int_{\mathrm{R}^n} \{Vf(x)\}^{p(x)}\, dx \le C \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx.$$

2. $p(\cdot)$ は定数に等しい．

後述の 6.4 節において，定理 5.5 と定理 5.7 の証明を与える．

6 補足

6.1 定理 3.8 の証明

まずは次の補題を準備しておく．

補題 6.1 (逆ダブリング条件). $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ の時，定数 $d > 1$ が存在し，$Q' \subsetneqq Q$ を満たす全ての二進立方体 Q, Q' に対して

$$d\,w(Q') \leq w(Q). \tag{24}$$

補題の証明については，[15, p.141] を参照されたい．

定理 3.8 の証明. $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ を仮定する．定理 3.7-*4*. よりウェーブレット基底

$$\{\psi_{j,k}^l \,:\, l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n\}$$

は $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ における無条件基底である．従って，任意の $f \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$f = \sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} b_{j,k}^l(f) \, \|\psi_{j,k}^l\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)}^{-1} \psi_{j,k}^l$$

と書ける．但し，$b_{j,k}^l(f) := \langle f, \psi_{j,k}^l\rangle \|\psi_{j,k}^l\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)}$ である．定理 3.7-*3*. より各 $\psi_{j,k}^l$ に対し，

$$C^{-1} \left\|\psi_{j,k}^l\right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} \leq \left\|W(\psi_{j,k}^l)\right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} \leq C \left\|\psi_{j,k}^l\right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)}$$

および $\left\|W(\psi_{j,k}^l)\right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} = 2^{jn/2} w(Q_{j,k})^{1/p}$ が成り立つ．これより

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} &\leq C \left\| \left(\sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \left| w(Q_{j,k})^{-1/p} b_{j,k}^l(f) \chi_{Q_{j,k}} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq C \|f\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる．今，各二進立方体 $Q = Q_{j,k}$ に対して $\widetilde{\psi_Q^l} := \psi_{j,k}^l / \left\|\psi_{j,k}^l\right\|_{L_w^p(\mathbf{R}^n)}$ と書く．更に，有限集合

$$\Lambda \subset \{(l, Q_{j,k}) \,:\, l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n\}$$

をとり，

$$g := \sum_{(l,J) \in \Lambda} \widetilde{\psi_J^l},\ B := \left\{Q_{j,k} \,:\, \text{ある } l = 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \text{ が存在し，} (l, Q_{j,k}) \in \Lambda\right\}$$

と定める．$\sharp B \le \sharp\Lambda \le (2^n-1)\sharp B$ が成り立つ事に注意しておきたい．(25) より

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^p_w(\mathbf{R}^n)} &\le C \left\| \left(\sum_{(l,J)\in\Lambda} \left| w(J)^{-1/p}\chi_J \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p_w(\mathbf{R}^n)} \\
&\le C \left\{ \int_{\bigcup_{J'\in B} J'} \left(\sum_{J\in B} w(J)^{-2/p}\chi_J(x) \right)^{p/2} w(x)\,dx \right\}^{1/p}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

各 $x \in \bigcup_{J\in B} J$ に対し，$J_1(x)$ を x を含み B に属する二進立方体で最小のものとする．この時，

$$
\sum_{J\in B} w(J)^{-2/p}\chi_J(x) \le \sum_{r=0}^{\infty} w(J_r)^{-2/p} \qquad (27)
$$

となる．但し，$J_0 := J_1(x)$，各 $r \in \mathbb{N}$ に対して J_r は二進立方体で $J_{r-1} \subset J_r$ かつ $2^n|J_{r-1}| = |J_r|$ を満たすものとする．補題 6.1 より，定数 $d > 1$ が存在して全ての $r \in \mathbb{N}$ に対し

$$
w(J_r) \ge d\, w(J_{r-1}) \ge \ldots \ge d^r\, w(J_0) = d^r\, w(J_1(x))
$$

を満たす．故に

$$
\sum_{r=0}^{\infty} w(J_r)^{-2/p} \le \sum_{r=0}^{\infty} (d^r w(J_1(x)))^{-2/p} = C\, w(J_1(x))^{-2/p} \qquad (28)
$$

を得る．(27) と (28) より

$$
\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{J'\in B} J'} \left(\sum_{J\in B} w(J)^{-2/p}\chi_J(x) \right)^{p/2} w(x)\,dx &\le C \int_{\bigcup_{J'\in B} J'} \left(w(J_1(x))^{-2/p} \right)^{p/2} w(x)\,dx \\
&= C \int_{\bigcup_{J'\in B} J'} w(J_1(x))^{-1} w(x)\,dx \qquad (29)
\end{aligned}
$$

が導かれる．今，各 $J \in B$ に対し $\tilde{J} := \left\{ x \in \bigcup_{J'\in B} J' : J_1(x) = J \right\}$ と定める．$\tilde{J} \subset J$

および $\bigcup_{J'\in B} J' = \bigcup_{J\in B} \tilde{J}$ より，

$$
\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{J'\in B} J'} w\,(J_1(x))^{-1}\,w(x)\,dx &= \int_{\bigcup_{J\in B} \tilde{J}} w\,(J_1(x))^{-1}\,w(x)\,dx \\
&\le \sum_{J\in B} \int_{\tilde{J}} w\,(J_1(x))^{-1}\,w(x)\,dx \\
&= \sum_{J\in B} \int_{J} w\,(J)^{-1}\,w(x)\,dx \\
&= \sharp B \qquad (30)
\end{aligned}
$$

が従う．故に，(26)–(30) から

$$
\|g\|_{L^p_w(\mathbf{R}^n)} \le C\,(\sharp B)^{1/p} \le C\,(\sharp\Lambda)^{1/p} \qquad (31)
$$

が得られる．

一方，$f=g$ として (25) を再び用いれば

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^p_w(\mathbf{R}^n)} &\ge C \left\| \left(\sum_{(l,J)\in\Lambda} \left| w(J)^{-1/p}\chi_J \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p_w(\mathbf{R}^n)} \\
&\ge C \left\{ \int_{\bigcup_{J'\in B} J'} \left(\sum_{J\in B} w(J)^{-2/p}\chi_J(y) \right)^{p/2} w(x)\,dx \right\}^{1/p} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

を得る．また，各 $x \in \bigcup_{J\in B} J$ に対し

$$
\left(\sum_{J\in B} w(J)^{-2/p}\chi_J(x) \right)^{p/2} \ge w(J_1(x))^{-1} \qquad (33)
$$

が成り立つ．今，(27)–(28) と同様の議論に従うと

$$
\sum_{J\in B} w(J)^{-1}\chi_J(x) \le C\,w\,(J_1(x))^{-1} \qquad (34)
$$

が示される．(32)–(34) より，

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} &\geq C \left(\int_{\bigcup_{J' \in B} J'} \sum_{J \in B} w(J)^{-1} \chi_J(x) w(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&= C \left(\sum_{J \in B} w(J)^{-1} \int_J w(x)\, dx \right)^{1/p} \\
&= C \, (\sharp B)^{1/p} \\
&\geq C \, (\sharp \Lambda)^{1/p} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

が得られる．故に，(31) および (35) より

$$C^{-1} \, (\sharp \Lambda)^{1/p} \leq \|g\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \leq C \, (\sharp \Lambda)^{1/p}$$

が導かれる． □

6.2 Banach 関数空間

次節における定理 5.3 の証明の準備の為，本節では Banach 関数空間の基本事項についてまとめておく．さらなる詳しい内容については，Bennet–Sharpley [4] を参照されたい．

まずは，Banach 関数空間と絶対連続ノルムの定義から始めよう．

定義 6.2. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体とする．

1. 線形空間 $X \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ が **Banach 関数空間**であるとは，汎関数 $\|\cdot\| : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ でノルムの性質および以下の条件を満たすものが存在する事を云う：
   - (a) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$f \in X$ と $\|f\| < \infty$ は同値である．
   - (b) 全ての $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\|f\| = \| \, |f| \, \|$.
   - (c) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, $\lim_{j \to \infty} f_j = f$ ならば，$\|f_1\| \leq \|f_2\| \leq \ldots$ かつ $\lim_{j \to \infty} \|f_j\| = \|f\|$ が成り立つ．
   - (d) $|F| < \infty$ を満たす全ての $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$\|\chi_F\| < \infty$.
   - (e) $|F| < \infty$ を満たす全ての $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して，F のみに依存した定数 $C_F > 0$ が存在し，任意の $f \in X$ に対して $\int_F |f(x)| \, dx \leq C_F \, \|f\|$.
2. X は上記の条件を満たすノルム $\|\cdot\|$ を持つ *Banach* 関数空間であるとする．全ての $f \in X$ と $\lim_{j \to \infty} \chi_{F_j} = 0$ *a.e.* を満たす可測集合の列 $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{j \to \infty} \|f \chi_{F_j}\| = 0$ が成り立つ時，ノルム $\|\cdot\|$ を**絶対連続ノルム**と呼ぶ．

次節において，以下の２つの補題を用いる．

補題 6.3 (優収束定理). X は絶対連続ノルム $\|\cdot\|$ を持つ *Banach* 関数空間であるとする．また，$f,\, f_j \in X$ $(j \in \mathbb{N})$ は，$\lim_{j\to\infty} f_j = f$ *a.e.* およびある正値の関数 $g \in X$ が存在し $|f_j| \le g$ *a.e.* $(j \in \mathbb{N})$ を満たすとする．この時，$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\| = 0$ が成立する．

補題 6.4. X は上の条件 *(a)-(e)* を満たすノルム $\|\cdot\|$ を持つ *Banach* 関数空間であるとする．この時，以下の２条件は同値である：

1. X は可分である．
2. ノルム $\|\cdot\|$ は絶対連続ノルムである．

6.3　定理 5.3 の証明

定理 5.3-*1.* の証明. 定理 3.7 と補題 4.7 を用いれば，評価式 (22) と (23) が全ての $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ事が解かる．補題 4.2-*3.* より $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ において稠密だから，(22) と (23) は任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対しても成立する．　□

定理 5.3-*2.* の証明. 以下，便宜上 $\mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$ と書き，各有限集合 $A \subset \mathcal{I}$ に対して

$$S_A f := \sum_{(l,j,k)\in A} \langle f, \psi_{j,k}^l \rangle \psi_{j,k}^l$$

と定める．次の２条件を確認すれば十分である：

(U1) 全ての有限集合 $A \subset \mathcal{I}$ と $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\|S_A f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$.
(U2) $\mathrm{span}\left\{\psi_{j,k}^l : (l,j,k) \in \mathcal{I}\right\}$ は $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

まず (U1) の確認から始める．定理 5.3 と正規直交性から任意の $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|S_A f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\, \|W(S_A f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\, \|Wf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}.$$

これより (U1) が従う．

次に (U2) を確かめる．その為には，$\lim_{A\to\mathcal{I}} \|f - S_A f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} = 0$ を示せば良い．補題 6.4 と補題 4.2-*4.* より，$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ が絶対連続ノルム $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$ に関する Banach 関数空間である事に注意しておきたい．$W(f - S_A f) \le Wf$ かつ $\|Wf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$ であるから補題 6.3 によって，$\lim_{A\to\mathcal{I}} \|W(f - S_A f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} = 0$ が導かれる．一方再び定理 5.3 より，$\|f - S_A f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} \le C\, \|W(f - S_A f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)}$ を得る．故に，$\lim_{A\to\mathcal{I}} \|f - S_A f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{R}^n)} = 0$ が従う．　□

6.4 定理 5.5 と定理 5.7 の証明

定理の証明の前に準備をしておきたい．まずは，命題 3.6 に基づいて一様 A_∞ と呼ばれる荷重関数の族を定義しておく．

定義 6.5. $\mathbb{R}^n$ 上の荷重関数の族 $\{w_t\}_{t>0}$ が**一様** A_∞ **ウェイトの族**であるとは，各 w_t は A_∞ ウェイトであり，命題 *3.6 (9)* を t に依らない定数 β について満たす事を云う．

Lerner [37, Lemma 2.1] はこの族に関する次の同値性を示している．

補題 6.6. $\mathbb{R}^n$ 上で定義された非負値の可測関数 $p(\cdot)$ に対して，以下の 2 条件は同値である：

1. 荷重関数の族 $\{t^{p(\cdot)}\}_{t>0}$ は t に関して一様 A_∞ ウェイトの族である．
2. $p(\cdot)$ は定数に等しい．

一方，直交射影 P_j $(j \in \mathbb{Z})$ が次のように積分核を用いて表示できる事に着目しておきたい：

$$\begin{aligned} P_j f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y) f(y)\, dy, \\ K_j(x,y) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{j,k}(x)\overline{\varphi_{j,k}(y)} = 2^{jn} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(2^j x - k)\overline{\varphi(2^j y - k)}. \end{aligned}$$

Aimar–Bernardis–Martín-Reyes [1] は $K_j(x,y)$ $(j \in \mathbb{Z})$ が以下の性質を持つ事を指摘している：

命題 6.7. $\{K_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は**弱正値核族**である，すなわち，実数列 $\{l_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ で以下を満たすものが存在する：

1. $0 < l_{j+1} < l_j < \infty$ $(j \in \mathbb{Z})$.
2. $\lim_{j\to\infty} l_j = 0$, $\lim_{j\to-\infty} l_j = \infty$.
3. 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$|x-y| < l_j$ ならば $K_j(x,y) > C\,(l_{j+1})^{-n}$.

以上の準備の下，2 つの定理の証明を始める．

定理 5.5 の証明. *1.* $\Rightarrow$ *2.* を示せば十分である．モジュラー不等式 *1.* を仮定しよう．$\{l_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を命題 6.7 に現れる実数列とし，立方体 Q と $t > 0$ を任意にとる．更に $0 < \alpha < 1$ を任意にとり，$|F| \geq \alpha\,|Q|$ を満たす可測集合 $F \subset Q$ を考える．今，$l_{j_Q+1} \leq |Q|^{1/n} < l_{j_Q}$ を満たす唯一の整数 j_Q をとる．この時，各 $x \in Q$ に対して

$$\begin{aligned} \left|P_{j_Q}(t\,\chi_F)(x)\right| &= t\left|\int_F K_{j_Q}(x,y)\, dy\right| \\ &\geq Ct\,(l_{j_Q+1})^{-n} \cdot |F| \\ &\geq Ct\,|Q|^{-1} \cdot \alpha\,|Q| \\ &= Ct\alpha. \end{aligned}$$

故に,

$$\int_Q \left|P_{j_Q}(t\,\chi_F)(x)\right|^{p(x)}\,dx \geq \int_Q (Ct\alpha)^{p(x)}\,dx \geq C_1 \int_Q t^{p(x)}\,dx$$

を得る．但し $C_1 > 0$ は α, p_+, p_- のみに依存した定数である．一方で仮定 *1.* より,

$$\begin{aligned}\int_Q \left|P_{j_Q}(t\,\chi_F)(x)\right|^{p(x)}\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_{j_Q}(t\,\chi_F)(x)\right|^{p(x)}\,dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |t\,\chi_F(x)|^{p(x)}\,dx \\ &= C \int_F t^{p(x)}\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ．従って,

$$\int_Q t^{p(x)}\,dx \leq C\,C_1^{-1} \int_F t^{p(x)}\,dx$$

が導かれる．これより，$\left\{t^{p(\cdot)}\right\}_{t>0}$ が一様 A_∞ ウェイトの族となる事が解かる．すなわち，補題 6.6 より $p(\cdot)$ は定数に等しい． □

注意 6.8. 上記の証明から解かるように，実際には全ての $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して *1.* を仮定する必要はない．例えば，コンパクトな台を持つ有界な関数 f に対してのみ *1.* を仮定しておけば結論 *2.* が示される．

定理 5.7 の証明. この定理についても *1.* ⇒ *2.* を示せば良い．条件 *1.* を仮定しよう．$m \in \mathbb{Z}$ およびコンパクトな台を持つ有界な関数 f を任意にとり,

$$U_m f := \sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{j,k}^l\rangle \psi_{j,k}^l$$

と定める．ウェーブレットが多重解像度解析から構成されている事より $P_m f(x) = U_m f(x)$ であるから,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |P_m f(x)|^{p(x)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |U_m f(x)|^{p(x)}\,dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \{V(U_m f)(x)\}^{p(x)}\,dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{l=1}^{2^n-1} \sum_{j=-\infty}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\langle f, \psi_{j,k}^l\rangle \psi_{j,k}^l(x)\right|^2 \right)^{p(x)/2} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \{Vf(x)\}^{p(x)}\,dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\,dx\end{aligned}$$

が得られる．従って，定理 5.5 および注意 6.8 より $p(\cdot)$ は定数に等しい． □

謝辞

貴重な講演の機会をくださった芦野隆一先生，有益な御意見をくださった吉野邦生先生と澤野嘉宏先生に深く感謝したい．

参考文献

[1] H.A. AIMAR, A.L. BERNARDIS AND F.J. MARTÍN-REYES, Multiresolution approximations and wavelet bases of weighted L^p spaces, *J. Fourier Anal. Appl.* **9** (2003), 497–510.

[2] K.F. ANDERSEN AND R.T. JOHN, Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals, *Studia Math.* **69** (1980), 19–31.

[3] 芦野隆一・山本鎮男，ウェーブレット解析—誕生・応用・発展，共立出版，1997.

[4] C. BENNET AND R. SHARPLEY, Interpolation of Operators, Academic Press, Boston, San Diego, New York, 1988.

[5] P.L. BUTZER, P.J.S.G. FERREIRA, J.R. HIGGINS, S. SAITOH, S. SCHMEISSER AND R.L. STENS, Interpolation and sampling: E.T. Whittaker, K. Ogura and their followers, to appear in *J. Fourier Anal. Appl.*.

[6] R.R. COIFMAN AND C. FEFFERMAN, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.* **51** (1974), 241–250.

[7] D. CRUZ-URIBE, SFO, A. FIORENZA, J.M. MARTELL AND C. PÉREZ, The boundedness of classical operators on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **31** (2006), 239–264.

[8] D. CRUZ-URIBE, A. FIORENZA, AND C.J. NEUGEBAUER, The maximal function on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **28** (2003), 223–238, and **29** (2004), 247–249.

[9] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909–996.

[10] L. DIENING, Maximal functions on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), 245–253.

[11] L. DIENING, Maximal functions on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 657–700.

[12] L. DIENING, P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ AND M. RŮŽIČKA, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponets, Lecture Notes in Math. **2017**, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[13] J. DUOANDIKOETXEA, Fourier Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[14] J. GARCÍA-CUERVA AND J.M. MARTELL, Wavelet characterization of weighted spaces, *J. Geom. Anal.* **11** (2001), 241–264.

[15] J. GARCÍA-CUERVA AND J.L. RUBIO DE FRANCIA, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[16] G. GARRIGÓS AND E. HERNÁNDEZ, Sharp Jackson and Bernstein inequalities for N-term approximation in sequence spaces with applications, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004), 1739–1762.

[17] A. HAAR, Zur theorie der orthogonalen funktionen systems, *Math. Ann.* **69** (1910), 331–371.

[18] P. HARJULEHTO AND P. HÄSTÖ, An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, *FutureTrends in Geometric Function Theory* (D. Herron (ed.), RNC Workshop, Jyväskylä, 2003), 85–93.

[19] P. HARJULEHTO, P. HÄSTÖ, Ú.V. LÊ AND M. NUORTIO, Overview of differential equations with non-standard growth, *Nonlinear Anal.* **72** (2010), 4551–4574.

[20] E. HERNÁNDEZ AND G. WEISS, A First Course on Wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL., 1996. (芦野隆一・萬代武史・浅川秀一訳，ウェーブレットの基礎，科学技術出版，2000.)

[21] C.-C. HSIAO, B. JAWERTH, B.J. LUCIER AND X.M. YU, Near optimal compression of orthonormal wavelet expansions, Wavelets: mathematics and applications, Stud. Adv. Math., CRC, Boca Raton, FL., 1994, 425–446.

[22] M. IZUKI, Wavelet characterizations and wavelet bases of function spaces, Ph. D. thesis, Hokkaido Univ., 2008.

[23] M. IZUKI, Wavelets and modular inequalities in variable L^p spaces, *Georgian Math. J.* **15** (2008), 281–293.

[24] M. IZUKI, Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization, *Anal. Math.* **36** (2010), 33–50.

[25] M. IZUKI, Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **59** (2010), 199–213.

[26] M. IZUKI, Fractional integrals on Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Hiroshima Math. J.* **40** (2010), 343–355.

[27] M. IZUKI AND Y. SAWANO, Wavelet bases in the weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces with A_p^{loc} weights, *J. Approx. Theory* **161** (2009), 656–673.

[28] M. IZUKI AND Y. SAWANO, The Haar wavelet characterization of weighted Herz spaces and greediness of the Haar wavelet basis, *J. Math. Anal. Appl.* **362** (2010), 140–155.

[29] F. JOHN AND L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 415–426

[30] S.E. KELLY, M.A. KON AND L.A. RAPHAEL, Local convergence for wavelet expansions, *J. Funct. Anal.* **126** (1994), 102–138.

[31] S.V. KONYAGIN AND V.N. TEMLYAKOV, A remark on greedy approximation in Banach spaces, *East. J. Approx.* **5** (1999), 365–379.

[32] T.S. KOPALIANI, Infimal convolution and Muckenhoupt $A_{p(\cdot)}$ condition in variable L_p spaces, *Arch. Math.* **89** (2007), 185–192.

[33] T.S. KOPALIANI, Greediness of the wavelet system in $L^{p(t)}(\mathbb{R})$ spaces, *East J. Approx.* **14** (2008), 59–67.

[34] O. KOVÁČIK AND J. RÁKOSNÍK, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Math.* **41 (116)** (1991), 592–618.

[35] P.G. LEMARIÉ-RIEUSSET, Ondelettes et poids de Muckenhoupt, *Studia Math.* **108** (1994), 127–147.

[36] P.G. Lemarié-Rieusset and G. Malgouyres, Support des fonctions de base dans une analyse multi-résolution, *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991), 377–380.

[37] A.K. Lerner, On modular inequalities in variable L^p spaces, *Arch. Math. (Basel)* **85** (2005), 538–543.

[38] A.K. Lerner, On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 4229–4242.

[39] Y. Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[40] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.

[41] B. Muckenhoupt, The equivalence of two conditions for weight functions, *Studia Math.* **49** (1974), 101–106.

[42] H. Nakano, Topology of Linear Topological Spaces, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1951.

[43] A. Nekvinda, Hardy–Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), 255–265.

[44] H. Ogawa, Sampling theory and Isao Someya; a historical note, Sampling Theory in Signal and Image Processing, **5**, no. 3, Sept., (2006), 247–256.

[45] K. Ogura, On a certain trancendental integral function in the theory of interpolation, *Tohoku Math. J.* **17** (1920), 64–72.

[46] S. Samko, On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators, *Integral Transforms Spec. Funct.* **16** (2005), 461–482.

[47] C.E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE* **37** (1949), 10–21.

[48] E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[49] E.M. Stein, Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[50] V.N. Temlyakov, The best m-approximation and greedy algorithms, *Advances in Comp. Math.* **8** (1998), 249–265.

[51] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, San Diego, Calif., 1986.

[52] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.