数理解析研究所講究録
第 1744 巻 2011 年 193-196

線形刻み幅の双対定理について

片平 明* 桑原 勇人* 長澤 亮介* 大舘 陽太† 山崎 浩一*

概要

文献 [5] で, 分枝幅と呼ばれるグラフパラメータと tangle と呼ばれる辺集合族に双対関係があることが示されている. 分枝幅はグラフの辺を ternary 木の葉に割当てることで定義されるが, グラフの辺, ternary 木をそれぞれ頂点, hair-length が 1 の caterpillar に置き換えることで, 分枝幅と類似のグラフパラメータが定義できる. このグラフパラメータを本稿では線形刻み幅と呼ぶことにする. 本研究では, tangle と類似する kinkle と呼ぶ頂点集合族を導入し, 線形刻み幅と kinkle に双対関係があることを示す.

1 導入

グラフ $G = (V, E)$ の分枝幅 bw は以下のように表現できる:

$$\mathrm{bw}(G) = \min_{(T,\mu)} \max_{e \in F} w_\lambda(e, \mu),$$

ここで $T = (W, F)$ は $|E|$ 個の葉を持つ ternary 木で, μ は G の辺を T の葉に割当てる全単射を, λ は E 上の連結度関数 (対称劣モジュラ関数) を, w_λ は正整数を出力するある関数を意味する (詳細な定義は 2 節を参照). 上式から分かる通り分枝幅を求める問題は最小化問題である. 一方, グラフ G のオーダー k の tangle $\mathscr{T}$ とは, ある性質 P を満たす辺の部分集合からなる族のことである. $\mathscr{T}$ のサイズは k の増加に対して非単調減少の関係にあり, $\mathscr{T}$ のサイズが増加するにつれ性質 P が満たされにくくなるという関係がある. つまり k がある値を超えるとオーダー k の tangle というものは存在できなくなる. 便宜上本稿では, (G の)tangle が存在できる最大の k のことを (G の)tangle 数と呼ぶことにする. 従って tangle 数を求める問題は最大化問題となる. 文献 [5] で分枝幅と tangle 数が一致することが, すなわち分枝幅と tangle 数に双対関係があることが示されている. 更に文献 [5] の証明をより

* 群馬大学工学研究科 情報工学専攻
† 東北大学 大学院情報科学研究科 システム情報科学専攻

簡潔にまとめ直した証明が文献 [4] に紹介されている.

Cat, v, λ, および w_λ をそれぞれ $|V|$ 個の葉を持つ hair-length が 1 の caterpillar, G の頂点を T の葉に割当てる全単射, V 上の連結度関数, および正整数を出力するある関数を意味するものとする. このとき, 分枝幅と類似した以下の式で定義されるグラフパラメータを考えることができる:

$$\min_{(Cat,v)} \max_{e \in E(Cat)} w_\lambda(e, v).$$

上式で定義されるグラフパラメータを本稿では**線形刻み幅**と呼ぶことにし lcar で表す. 線形刻み幅の定義の仕方から明らかに分枝幅と線形刻み幅に類似性が見てとれるが, そうであれば線形刻み幅と双対関係にある (tangle と類似性がある) "何か" の存在が期待できる. この "何か" を本稿では **kinkle** と呼ぶことにする. 本研究では, 実際に kinkle を定義し, 文献 [5] での手法を用いて kinkle と線形刻み幅に双対関係があることを示す. ただし紙面の都合上証明の詳細は省く.

関連研究として次がある. 今回我々が得た研究結果と非常によく似た研究結果が, 文献 [3] で報告されている. しかし証明手法は本研究とは異り, 本研究では文献 [4] の手法をベースにしているが, 文献 [3] では文献 [2] の手法をベースにしている.

2 諸定義

グラフ G に対し, $V(G), E(G)$ はそれぞれ G の頂点集合, 辺集合を表す. G の最大次数を $\Delta(G)$ で表す. **ternary 木**とは, 内点が次数 3 の木のことである. 木 T に対し $L(T)$ で T の葉の集合を表す. ある集合 U に対し, 2^U 上の**連結度関数** λ とは以下を満たす関数をいう.

1. 各 $X \subseteq U$ に対し, $\lambda(X) = \lambda(U - X)$
2. $\lambda(X) + \lambda(Y) \geq \lambda(X \cap Y) + \lambda(X \cup Y)$

$E(G), V(G)$ 上のよく知られた連結度関数として以下がある:

$$F \subset E(G) \text{ に対し, } eb(F) = |\{v \in V(G) \mid \{v, u\} \in F \wedge \{v, w\} \in \overline{F}\}|,$$

$$W \subset V(G) \text{ に対し, } vb(W) = |\{\{u, v\} \in E(G) \mid u \in W \wedge v \in \overline{W}\}|.$$

G をグラフ, λ を $2^{E(G)}$ 上のある連結度関数とする. G の**分枝分解**とは, $|L(T)| = |E(G)|$ なる ternary 木 T と $E(G)$ から $L(T)$ への全単射 μ の組 (T, μ) のことである. 各 $e \in E(T)$ に対し $w_\lambda(\mu, e)$ で $\lambda(\bigcup_{v \in L(T_1)} \mu^{-1}(v))$ を表す, ここで T_1 は T から辺 e を削除することで得られる 2 つの部分木のうちの 1 つとする (λ の対称性に注意). **幅 k の λ に関する分枝分解**とは, $k = \max_{e \in E(T)} w_\lambda(T, \mu)$ を満たす分枝分解 (T, μ) のことである. G の λ に関する**分枝**

幅 $\mathrm{bw}_\lambda(G)$ とは最小の幅を持つ λ に関する分枝分解のその幅のことである. 便宜上 $\mathrm{bw}_\lambda(G)$ を単に $\mathrm{bw}(G)$ と書くことにする.

λ を $V(G)$ 上の連結度関数とする. π を $V(G)$ から $\{1,2,\ldots,|V(G)|\}$ への全単射とする. $\mathrm{cut}(G)$ を $\min_\pi \max_{1\le j\le |V(G)|-1} \lambda\left(\bigcup_{1\le i\le j}\{\pi^{-1}(i)\}\right)$ は (G の) カット幅と呼ばれる. G の**線形刻み幅** $\mathrm{lcar}(G)$ を $\max\{\Delta(G), \mathrm{cut}(G)\}$ で定義する (1 節での caterpillar での定義と一致することに注意).

λ を 2^E 上のある連結度関数とし, $k \ge 1$ とする. λ に関する**オーダー k の tangle** $\mathscr{T}$ とは以下を満たす E の部分集合からなる族のことである:

(T1) 各 $A \in \mathscr{T}$ に対し, $\lambda(A) < k$.

(T2) E の各分割 (A,B) に対し, $\lambda(A) < k$ なら $A \in \mathscr{T}$ または $B \in \mathscr{T}$.

(T3) $A,B,C \in \mathscr{T}$ ならば $A \cup B \cup C \neq E$.

(T4) 各 $e \in E$ に対し, $E - e \notin \mathscr{T}$.

G の tangle が存在する最大のオーダーを G の **tangle 数**と呼ぶ.

3 結果

文献 [5] では分枝幅と tangle に双対関係があることが示されている, 本稿では線形刻み幅と以下で導入する kinkle とに双対関係があることを示す.

λ を 2^V 上のある連結度関数とし, $k \ge 1$ とする. λ に関する**オーダー k の kinkle** $\mathscr{K}$ とは以下を満たす V の部分集合からなる族のことである:

(K1) V の各分割 (X,Y) に対し, $\lambda(X) < k$ ならば, $X \in \mathscr{K}$ か $Y \in \mathscr{K}$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ.

(K2) $\lambda(A) < k$ かつ $|A| = 1$ ならば, $A \in \mathscr{K}$

(K3) $A \cup B = V, |A \cap B| = 1, \lambda(A \cap B) < k,$ のとき, $A \in \mathscr{K}$ か $B \in \mathscr{K}$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ.

G の kinkle が存在する最大のオーダーを G の **kinkle 数**と呼ぶ.

Kinkle の定義の (K3) は次の (K3') に置き換えることも可能である.,

(K3') $A \in \mathscr{K}, A \cap B = \emptyset, |A \cup B| = |V(G)| - 1, \lambda(A \cup B) < k$ ならば $B \notin \mathscr{K}$.

(K3), (K3') はカット幅に対してごく自然な考え方と言える (例えば, 文献 [1] の 3-*maxEdgeδ-width* など).

以下に本研究の主定理を述べる.

定理 3.1. グラフ G のカット幅は *kinkle* 数と等しい.

主定理は文献 [4] での手法を用いて証明できるが, 本稿では弱双対定理にあたる以下の定理のみ証明を記す.

定理 3.2. $\mathrm{lcar}(G) = k$ ならばオーダー $k+1$ の *kinkle* $\mathcal{K}$ は存在しない.

証明. 先ず $\mathrm{lcar}(G) = k$ より, 任意の $v \in V(G)$ に対し $\lambda(v) \leq k$ に注意. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ を $\mathrm{lcar}(G) = k$ を実現するオーダリングとする. (K2) より $\{v_1\} \in \mathcal{K}$ であり, (K1) より, $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\} \notin \mathcal{K}$ となる. $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$ を仮定すると, $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\} \notin \mathcal{K}$ より (K3) に矛盾する. したがって $\{v_1, v_2\} \in \mathcal{K}$ となる. $\{v_1, v_2, v_3\} \notin \mathcal{K}$ を仮定すると, $\{v_3, v_4, \ldots, v_n\} \notin \mathcal{K}$ より (K3) に矛盾する. したがって $\{v_1, v_2, v_3\} \in \mathcal{K}$ となる. 同様の議論を繰り返すことにより, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \in \mathcal{K}$ を得る. しかし $\{v_n\} \in \mathcal{K}$ より, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \notin \mathcal{K}$ となり (K3) に矛盾する. □

謝辞

本研究は科研費 (21500004) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] P. Berthomé and N. Nisse. A unified FPT algorithm for width of partition functions. Research Report RR-6646, INRIA, 2008.

[2] D. Bienstock, N. Robertson, P.D. Seymour, and R. Thomas. Quickly excluding a forest. *J. Comb. Theory Ser. B*, Vol. 52, pp. 274–283, June 1991.

[3] F.V. Fomin and D.M. Thilikos. On the monotonicity of games generated by symmetric submodular functions. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 131, No. 2, pp. 323–335, 2003.

[4] J. Geelen, B. Gerards, N. Robertson, and G. Whittle. Obstructions to branch-decomposition of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 96, No. 4, pp. 560–570, 2006.

[5] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 52, No. 2, pp. 153–190, 1991.