数理解析研究所講究録
第 1744 巻 2011 年 159-160

いかなる辺展開でも正多面体は重なりを持たない

Edge-Developments of Platonic Solids Never Overlap (Extended Abstract)

堀山 貴史　　庄子 亘
Takashi Horiyama　　Wataru Shoji

埼玉大学 理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering, Saitama University

「任意の凸多面体は，単純で重ならない多角形に辺展開することができるだろうか ?」すなわち，任意の凸多面体は辺展開による展開図を持つだろうか ? 展開図 (一般展開とも呼ばれる) は，多面体の表面を切って平面に開くことで得られる多角形である．また，多面体の辺に沿ってのみ開切を許すものを特に辺展開と呼ぶ．展開図の起源は 16 世紀に遡る: 1525 年に，画家であり数学者であるデューラーが書籍 "Unterweysung der Messung mit dem Zirkel un Richtscheyt in Linien Ebnen uhnd Gantzen Corporen" [8] を著し，正多面体や半正多面体の辺展開を与えた．(同書は，後に "The Painter's Manual" [9] として英訳されている．邦訳は「測定法教則」．) 彼が先の疑問を問題として認識していた証拠はないが，実際に描いた展開図を通して，そうなりそうだとの直感を持っていたようである [7].

この直感は長年に渡り支持されてきたが，近年になって，開切の仕方によっては開いた面が重なりを持ち得る不幸な反例が示された [7, 13, 15]．また，凸性の条件を考慮に入れなければ，どのように辺展開しても重なりを持ってしまうような多面体が報告されている [3, 10]．一方，一般展開 (つまり辺だけでなく面を切ることも許したもの) を認めるならば，任意の凸多面体からその展開図を得る方法が 2 通り知られている [2, 14, 16]．つまり，任意の凸多面体は少なくとも 1 つは一般展開を持つ.

本研究では，凸多面体を正多面体のみに限定し，別の角度からこの問題を検討する.「正多面体の展開図は，いかなる展開でも重なりを持たないのだろうか ?」この問題は，一見すると容易に見えるが，以下のような否定的な状況証拠も挙げられる．(1) ねじれ十二面体 (2 つ以上の正多角形で構成される半正多面体の 1 つ) には，重なりを持つ辺展開が存在する [6]．(2) 正四面体を除く正多面体には，重なりを持つ一般展開が存在する．(正四面体は，任意の一般展開が重なりを持たない．)

こうした考察より，辺展開に焦点を当て,「正多面体の辺展開は，いかなる展開でも重なりを持たないのだろうか ?」と問いを改める．正四面体，正六面体，正八面体については，それぞれ 2, 11, 11 種類の辺展開が存在する [12] ため，それらを 1 つずつ描くことで重なりを持たないと確認できる．デューラーの頃より，同じことが正十二面体と正二十面体についても当てはまると信じられてきた．しかし，一般展開の場合のように，一部の正多面体が重なりを持たないのに，他の多面体が重なりを持つこともあり得る．本研究では，この未解決問題を肯定的に解決した.

定理 1 (Main result) いかなる辺展開でも正多面体は重なりを持たない.

本研究では，二分決定グラフ (BDD) [5] を用いて任意の多面体のすべての辺展開を列挙する手法を提案し，また，これにより得られる各展開図が重なりを持つかどうかを判定する手法を提案する．正十二面体と正二十面体は 43,380 種類の辺展開を持つ [4, 11] ことが知られているが，本研究の結果は，すべての辺展開を具体的に与えることで，この結果を補強している．また，このカタログを利用して隣接しない面同士はその外接円が重ならないことを示し，長きに渡る疑問を解決することに成功した.

References

[1] J. Akiyama. Tile-Makers and Semi-Tile-Makers. *The Mathematical Association of Amerika*, Monthly vol. 114, pp. 602–609, 2007.

[2] B. Aronov and J. O'Rourke. "Nonoverlap of the star unfolding," *Discrete Computational Geometry*, vol. 8, pp. 219–250, 1992.

[3] T. Biedl, E. D. Demaine, M. L. Demaine, A. Lubiw, J. O'Rourke, M. Overmars, S. Robbins, and S. Whitesides. "Unfolding some classes of orthogonal polyhedra," In *Proc. of the 10th Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 70–71, 1998.

[4] S. Bouzette, and F. Vandamme. "The regular Dodecahedron and Icosahedron unfold in 43380 ways," Unpublished manuscript.

[5] R. E. Bryant. "Graph-based algorithms for Boolean function manipulation," *IEEE Transactions on Computers*, vol.C-35, pp. 677–691, 1986.

[6] H. T. Croft, K. J. Falconer, and R. K. Guy. *Unsolved problems in geometry.* Springer-Verlag, 1991.

[7] E. D. Demaine and J. O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, 2007.

[8] A. Dürer. *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel un Richtscheyt in Linien Ebnen uhnd Gantzen Corporen.* 1525.

[9] A. Dürer. *The painter's manual: a manual of measurement of lines, areas, and solids by means of compass and ruler assembled by Albrecht Dürer for the use of all lovers of art with appropriate illustrations arranged to be printed in the year MDXXV.* Abaris Books, New York, 1977 (1525). (English translation by Walter L. Strauss of [8].)

[10] B. Grünbaum. "Are your polyhedra the same as my polyhedra?," In *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*, pp. 461–488, Springer, 2003.

[11] Ch. Hippenmeyer. "Die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze eines regulären Ikosaeders," Elem. Math., vol. 34, pp. 61–63, 1979.

[12] M. Jeger. "Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders," Elemente der Mathematik, vol. 30, pp. 73–83, 1975.

[13] J. Mitani and R. Uehara. "Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes," In *Proc. of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 31–34, 2008.

[14] D. M. Mount. "On folding shortest paths on convex polyhedra," Technical Report 1495, Department of Computer Science, University of Maryland, 1985.

[15] M. Namiki and K. Fukuda. "Unfolding 3-dimensional convex polytopes: A package for Mathematica 1.2 or 2.0," Mathematica Notebook, University of Tokyo, 1993.

[16] M. Sharir and A. Schorr. "On shortest paths in polyhedral spaces," *SIAM Journal on Computing*, vol. 15, pp. 193–215, 1986.

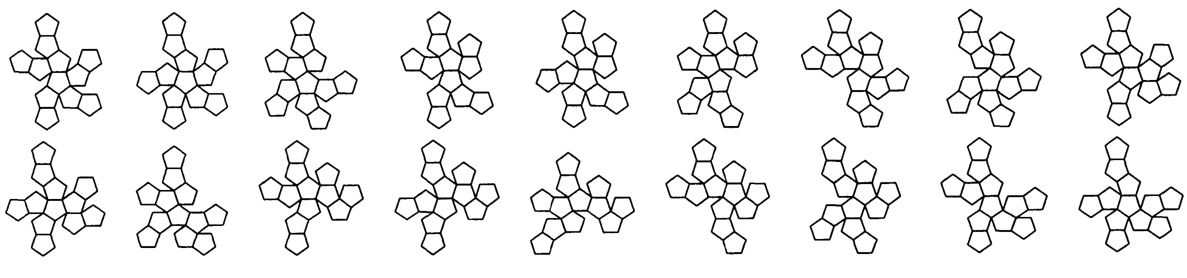

Figure 1: Partial List of Edge-Developments of a Dodecahedron.

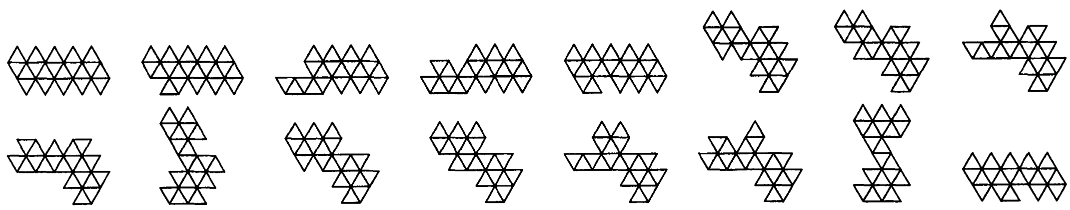

Figure 2: Partial List of Edge-Developments of an Icosahedron.