数理解析研究所講究録
第 1745 巻 2011 年 110-115

Relative rounding and submersivity of log smooth maps

Arthur Ogus 氏との共同研究. Chikara Nakayama (Tokyo Inst. of Tech.)

研究の出発点である, 臼井三平氏の定理を紹介する前に, 必要な定義を復習する.

Real blowing up

X を fs log analytic space とするとき, 集合

$\{(x,h)\,|\,x$ は X の点, $h\colon M_{X,x}\to\mathbb{S}^1$ は準同型で, $h|_{\mathcal{O}^{\times}_{X,x}}$ が x での偏角に一致する$\}$

に自然な位相を与えたものを $X^{\log}$ と書く. ここで, M_X は X の log 構造, $\mathbb{S}^1$ は $\mathbb{C}$ 内の unit circle である.

$X^{\log}$ は, 連続写像 $\tau\colon X^{\log}\to X;\ (x,h)\mapsto x$ によって, X 上の位相空間とみなせる.

例えば X を, 複素平面に原点で log を与えたもの $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mathbb{N}]_{\mathrm{an}}$ とすれば, $X^{\log}$ は, 複素平面の原点を $\mathbb{S}^1$ に置き換えたものになり, τ は, 原点以外では同相, 原点上の fiber が $\mathbb{S}^1$ であるような固有射となる.

もっと一般に, P を fs monoid とし, X を affine toric 多様体 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[P]_{\mathrm{an}} = \operatorname{Hom}(P,\mathbb{C})$ としたとき,

$$X^{\log}=\operatorname{Hom}(P,\mathbb{R}^{\mathrm{mult}}_{\geq 0})\times\operatorname{Hom}(P,\mathbb{S}^1)$$

である. ここで $\mathbb{R}^{\mathrm{mult}}_{\geq 0}$ は, 0 以上の実数の集合を, 実数の積によって, 半群とみなしたものである. この場合, X は位相多様体であるとは限らないが, $X^{\log}$ はつねに (境界付き) 位相多様体であることに注意する. 上式右辺の第一成分 $\operatorname{Hom}(P,\mathbb{R}^{\mathrm{mult}}_{\geq 0})$ は, toric 多様体に付随する角付き多様体であり, これを, 以下 X_P で表わす. 第二成分は, $\mathbb{S}^1$ の, P^{gp} の階数個の直積である.

History

出発点となるのは, 次の, 臼井三平氏の定理である.

定理 1 (Usui, 2001). $f\colon X \to \Delta$ を単位円板上の *proper semistable* な族とする. X, Δ に自然な *log* 構造を与える. このとき $f^{\log}\colon X^{\log} \to \Delta^{\log}$ は, 位相的に局所自明である.

注意. その後, 臼井氏はこの結果を, polydisk 上の generalized multi semistable な族の場合に拡張した.

定理 1 の証明は, $X^{\log}$ 上局所的な自明化を取り, 貼り合わせて $\Delta^{\log}$ 上局所的な自明化を与えるという流れであるが, このうち今日の主題は, $X^{\log}$ 上局所的な自明化 (submersivity) の方である.

最も簡単な退化, すなわち半安定曲線の退化 "$xy = t$" の場合の定理 1 について考えてみよう. これは X 上局所的には, $\mathbb{N} = \langle t \rangle$ から $\mathbb{N}^2 = \langle x, y \rangle$ への対角射 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2; t \mapsto xy$ に伴う $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[h]_{\mathrm{an}}$ とみなせる. この $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[h]_{\mathrm{an}}$ を前節のように計算してみると,

$$\mathbb{R}^2_{\geq 0} \times (\mathbb{S}^1)^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1; (x, x', \zeta, \zeta') \mapsto (xx', \zeta\zeta')$$

となる. このうち後半の $\mathbb{S}^1$ 成分が product map であることは明らかであるが, 前半の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 成分 $X_{\mathbb{N}^2} = \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to X_{\mathbb{N}} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ も位相的には product map になっている. つまり, 全空間 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ が, 底空間 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\{0\}$ 上の fiber $\{(x, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, x') \mid x' \geq 0\}$ との直積になっている. このことを relative rounding と呼ぶ.

系. 定理 1 の仮定のもとで, 任意の q に対し, $R^q f^{\log}_*$ は局所定数層を局所定数層にうつす.

一方, その後, 次の定理が証明された.

定理 2 (Kajiwara-N). $f\colon X \to Y$ を *fs log analytic spaces* 間の *proper log smooth* な射とする. このとき任意の q に対し, $R^q f^{\log}_*$ は局所定数層を局所定数層にうつす.

この定理は位相的な局所自明性を経由せずに直接別の方法で示された. そこで自然に次の問題が考えられる.

問題. 定理 2 の仮定のもとで, さらに f を *exact* とすると, $f^{\log}$ は位相的に局所自明であるか?

今回の主結果は, この問題の肯定的解決であり, これは定理 1 および定理 2 を導く. (exact という仮定がついているが, これは log blowing up を排除する条件である. 定理 1 の状況ではみたされている. また, 定理 2 は exactification によって簡単に exact の場合に帰着する.)

Main results

主定理. $h\colon P \to Q$ を *fs monoids* 間の *local* かつ $\mathbb{Q}$*-integral* な準同型写像とする. (用語は次節で解説する.) このとき位相空間の連続写像 $X_h\colon X_Q \to X_P$ は *product map* である.

系 1. $f\colon X \to Y$ を *fs log analytic spaces* 間の *log smooth* かつ *exact* な射とする. このとき $f^{\log}$ は *submersive* である.

系 2. さらに f を *proper* とすると, $f^{\log}$ は位相的に局所自明である.

前節最後に述べたように, 系 2 から, 定理 1, 2 が導かれる.

系 1, 2 の証明であるが, 主定理から系 1 を出すには, $\mathbb{Q}$-integral な chart をとればよい. 系 1 から系 2 を出すには, $X^{\log}$ 上局所的な自明化を取り, 貼り合わせて $Y^{\log}$ 上局所的な自明化を得る.

次節で主定理の証明の概略を述べる.

Proofs

まず idea を説明する. Q を fs monoid として, $X_Q = \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathrm{mult}})$ を扱わなければならない. Q が free の場合, つまり, $Q = \mathbb{N}^r$ の場合は, $X_Q = \mathbb{R}_{\geq 0}^r$ であるからわかりやすい. しかし一般には, X_Q が曲がっているので扱いにくい. 例えば $Q = \langle a, b, c, d \,|\, a + b = c + d \rangle$ であれば, $X_Q = \{(x, y, z, w) \,|\, xy = zw\}$ である.

そこで moment map を用いて, cone の話に移る. ここで momemt map とは次のような同相写像である. Q の一つの有限生成系 $S \subset Q$ をとる. このとき

$$\mu\colon X_Q \xrightarrow{\approx} C_Q;\ x \mapsto \textstyle\sum_{s \in S} x(s)s$$

は同相写像であり, moment map と呼ばれる. ここで, $C_Q := Q \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{R}_{\geq 0} \subset Q^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は, Q によって張られる real cone であり, これは曲がっていないので, X_Q よりは扱いやすいことが期待される.

次に, h が $\mathbb{Q}$-integral であるという仮定を用いなければならない.

定義. P を sharp fs monoid, Q を fs monoid とする. Local な単射 $h\colon P \to Q$ が次の同値な条件のうちの一つをみたすとき, h は $\mathbb{Q}$-*integral* であるという.

(1) 環準同型写像 $\mathbb{Z}[C_P] \to \mathbb{Z}[C_Q]$ は flat である.

(2) C_Q は C_P-set として free である.

(3) $C_{Q,P} \subset C_Q$ を, C_P との交わりが自明であるような, C_Q の face たち全部の合併集合とする. このとき

$$C_{Q,P} \times C_P \xrightarrow{\approx} C_Q;\ (q,p) \mapsto q+p$$

は同相写像となる.

例. Q を先のものとし, $P = \langle a,b \rangle$ とすると, 包含写像 $P \to Q$ は $\mathbb{Q}$-integral である. このとき, $C_{Q,P}$ は, c の張る face と d の張る face との合併集合である.

さて (3) に現れた $C_{Q,P}$ は, ちょうど, X_h の special fiber $X_h^{-1}(0)$ (X_P の頂点の逆像) を, moment map $\mu\colon X_Q \to C_Q$ で写したものになっていることがすぐわかる: $\mu(X_h^{-1}(0)) = C_{Q,P}$. これから,

$$X_Q \approx C_Q \stackrel{(3)}{=} C_{Q,P} \times C_P \stackrel{\mathrm{pr}_1}{\to} C_{Q,P} \approx X_h^{-1}(0)$$

という全射連続写像が得られるので, これが, 目的の自明化を与えていると示せばよい. つまり, この写像と, $X_h\colon X_Q \to X_P$ とからできる, 連続写像

$$X_Q \to X_h^{-1}(0) \times X_P$$

が同相であるということが, 主定理の内容である.

問題はここからで, moment map は functorial でないため, この同相 (特に全射性) が意外に難しい. つまり, P の生成系を適当に取り,

$$\begin{array}{ccccc} X_Q & \xrightarrow{\approx} & C_Q & = & C_{Q,P} \times C_P \\ {\scriptstyle X_h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \\ X_P & \xrightarrow{\approx} & C_P & & \end{array}$$

という図式を考えても, これが一般には可換にはならないのである. 換言すれば, ここで問題になっているのは, X_Q や X_P という absolute なものの性質ではなく, X_h という relative なものの性質であり, たとえ X_Q, X_P を同時に C_Q, C_P に置き換えたとしても, X_h から誘導される連続写像 $C_Q \to C_P$ は依然として曲がっているので難しいということである.

以下, 上の $X_Q \to X_h^{-1}(0) \times X_P$ の bijectivity を, 簡単のために, $P = \mathbb{N}$ の場合に説明する.

$h\colon \mathbb{N} \to Q$ による 1 の像を $q \neq 0$ とする. $q_0 \in C_{Q,P}$ を固定し, $x_t := \mu^{-1}(q_0 + tq)$ とおく. $\mathbb{R}_{\geq 0} \to X_Q \to X_{\mathbb{N}} = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $t \mapsto x_t \mapsto x_t(q)$ が全単射であるといえばよい. $x_0(q) = 0$ であり, 増加関数であることは比較的容易にわかるので, $\lim_{t\to\infty} x_t(q) = \infty$ を示せばよい. 次の条件をみたす非負実数列 $t_1, t_2, t_3, \ldots \to \infty$ が存在する: 有限生成系 S が二つの部分集合 S_1, S_2 の和に分かれ, $s \in S_1$ ならば, $x_{t_n}(s) \to \infty$ となり, $s \in S_2$ ならば, $x_{t_n}(s)$ は有界となる. すると moment map の定義から

$$q_0 + t_n q = \mu(x_{t_n}) := \textstyle\sum_{s\in S} x_{t_n}(s)s = \sum_{s\in S_1} x_{t_n}(s)s + \sum_{s\in S_2} x_{t_n}(s)s$$

であるが, この右辺第二項は, 有界である. これから,

$$q = \tfrac{1}{t_n} \textstyle\sum_{s\in S_1} x_{t_n}(s)s + \frac{\text{(bounded)}}{t_n}$$

で, 右辺第二項は 0 に収束する. 故に, q は S_1 によって張られる real cone の触点であり, その cone は閉であるから, 結局, その cone に属する: $q = \sum_{s\in S_1} c_s s$, $c_s \geq 0$. $q \neq 0$ であるから, ある $c_s > 0$ である. 従って, $x_{t_n}(q) = \prod_{s\in S_1} x_{t_n}(s)^{c_s} \to \infty$. □

Applications

いくつかの応用があるが, ここでは, Poincaré duality について述べる.

定理 (Poincaré duality). $f\colon X \to Y$ を *fs log analytic spaces* 間の *log smooth, exact* かつ *vertical* な射とする. 任意の *fiber* が連結かつ d-次元であると仮定する. このとき

$$Rf^{\log !}G = f^{\log\,-1}G[2d] \quad (G \in \mathrm{ob}\,(D^+(Y^{\log})))$$

であり, 従って,

$$R\mathcal{H}om\,(Rf^{\log}_{!}F, G) = Rf^{\log}_{*}R\mathcal{H}om\,(F, f^{\log\,-1}G[2d]) \quad (F \in \mathrm{ob}\,(D^-(X^{\log})))$$

である. 特に, $f^{\log}$ は, 向き付け可能である.

証明は, 系 1 より得られる, 局所的な orientation sheaf の記述が貼り合うことを確かめればよい. なおこの定理は, vertical でない場合にも拡張することができる.

Variants

今まで fs の範疇で考えて来たが, 主結果は, relatively coherent な場合にも拡張することができる. (Relatively coherent な log 構造とは, 最近注目されている, 応用上自然に現れるある種の log 構造である. 必ずしも coherent ではなく, 従って, fine とも fs とも限らない.)

また, idealized log analytic space の場合にも, 拡張することができる.

References

[1] Kajiwara, T. and Nakayama, C., *Higher direct images of local systems in log Betti cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **15** (2008), pp.291–323.

[2] Nakayama, C. and Ogus, N., *Relative rounding*, preprint, submitted.

[3] Usui, S., *Recovery of vanishing cycles by log geometry*, Tohoku Math. J. **53** (1) (2001), pp. 1–36.