数理解析研究所講究録
第 1745 巻 2011 年 63-70

Generic Torelli theorem for one-parameter mirror families to weighted hypersurfaces

大阪大学大学院理学研究科数学専攻　白河　憲一郎 (Kennichiro Shirakawa)
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

1 序

すべて複素数体上で話をする。4 次元重み付き射影空間中の超曲面で Picard 数が 1 の Calabi-Yau 多様体であるものが丁度 4 種類存在することが知られている。その 1 つが 5 次超曲面である。5 次超曲面の鏡映像のなす 1 パラメータの族に対して generic Torelli theorem が成り立つことが臼井 [U2] により証明されている。本講演ではその他の 3 種類の超曲面の鏡映像のなす 1 パラメータの族に対して generic Torelli theorem が成り立つことを臼井の方法を参考にして証明する。

2 対象

対象の族の構成は [M1] を参考にしている。まず次の 4 種類の重み付き射影空間中の Calabi-Yau 超曲面の 1 パラメータの族を考える。$\psi \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ に対して

(1) $\{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{P}^{(1,1,1,1,1)} \mid x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5\psi x_1x_2x_3x_4x_5 = 0\}$,

(2) $\{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{P}^{(2,1,1,1,1)} \mid 2x_1^3 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 - 6\psi x_1x_2x_3x_4x_5 = 0\}$,

(3) $\{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{P}^{(4,1,1,1,1)} \mid 4x_1^2 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8 + x_5^8 - 8\psi x_1x_2x_3x_4x_5 = 0\}$,

(4) $\{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{P}^{(5,2,1,1,1)} \mid 5x_1^2 + 2x_2^5 + x_3^{10} + x_4^{10} + x_5^{10} - 10\psi x_1x_2x_3x_4x_5 = 0\}$

とする。μ_k を $1 \in \mathbb{C}$ の k 乗根のなす群とする。(1), (2), (3), (4) の超曲面をそれぞれ $(\mu_5)^3$, $\mu_3 \times (\mu_6)^2$, $(\mu_8)^3$, $(\mu_{10})^2$ と同型な群を作用させ商をとると標準特異点が現れる。$\psi \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ に対して、これらの商特異点の同時特異点解消が存在することが知られており、(1), (2), (3), (4) の鏡映像のなす 1 パラメータの族 $(W_\psi^i)_{\psi \in \mathbb{P}^1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ が得られる。

$\nu_i = \mu_5$, μ_6, μ_8, μ_{10} $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする。$(W_\psi^i)_{\psi \in \mathbb{P}^1}$ のファイバーは次の様になっている。

- $\psi \in \nu_i \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ の時、W_ψ^i は通常 2 重点を 1 つもつ。
- W_∞^i は全空間の中で正規交叉因子である。

- その他のファイバーは非特異であり、Hodge 数は $h^{p,q}=1$ $(p+q=3)$ である。

作用 $\alpha\in\nu_i$, $(x_1,\cdots,x_5)\mapsto(x_1,\cdots,x_4,\alpha^{-1}x_5)$ により、W^i_ψ から $W^i_{\alpha\psi}$ への同型が存在する。そこで $\lambda=\psi^5,\ \psi^6,\ \psi^8,\ \psi^{10}$ $(i=1,2,3,4)$ とし、

$$\begin{array}{ccc} (W^i_\lambda)_\lambda & = & ((W^i_\psi)_\psi)/\nu_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\lambda\text{平面}) & = & (\psi\text{平面})/\nu_i \end{array}$$

とすることにより対象の族 $(W^i_\lambda)_\lambda$ が得られる。$(W^1_\lambda)_\lambda$ が 5 次鏡映族である。

3 局所モノドロミー

対象の族 $(W^i_\lambda)_\lambda$ の局所モノドロミーは既に詳しく計算されている。5 次鏡映族に対しては Candelas, de la Ossa, Green, Parks [COGP] は 3 次ホモロジー群のシンプレクティック基底を具体的に構成し、その基底上での 3 次正則形式の周期積分が局所モノドロミーの作用でどれだけ変化するかを計算した。その他の 3 つの族に対しては Klemm, Theisen [KT] が Candelas 達と同様の計算を行っている。また彼らの構成した 3 次ホモロジー群の基底の双対基底と周期積分との関係 [M2, Appendix C] から局所モノドロミーの 3 次コホモロジー群のシンプレクティック基底に関する行列表示が直ちに得られる。以下では彼らの結果を引用する。

$(W_\lambda)_\lambda=(W^i_\lambda)_\lambda$ $(i=1,2,3,4)$ とし、λ 平面上で 1 点 $b\in\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を固定する。この時 $H^3(W_b,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底が存在し、$\lambda=0,1,\infty$ の周りの局所モノドロミーの行列表示は次の様になる。

$i=1$ の場合、

$$A=\begin{pmatrix}11&8&-5&0\\5&-4&-3&1\\20&15&-9&0\\5&-5&-3&1\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ T_\infty=\begin{pmatrix}-9&-3&5&0\\0&1&0&0\\-20&-5&11&0\\-15&5&8&1\end{pmatrix}.$$

$i=2$ の場合、

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\3&-3&-1&1\\3&6&1&0\\3&-4&-1&1\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ T_\infty=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\-3&-3&1&0\\-6&4&1&1\end{pmatrix}.$$

$i=3$ の場合、

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&-3&-1&1\\2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ T_\infty=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\-2&-2&1&0\\-4&4&1&1\end{pmatrix}.$$

$i=4$ の場合、

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\-1&-2&0&1\\0&-1&1&0\\-1&-3&0&1\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ T_\infty=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&3&1&1\end{pmatrix}.$$

A の位数は 5, 6, 8, 10 $(i=1,2,3,4)$ である。また $(T-I)^2=0$, $(T_\infty-I)^3\neq 0$, $(T_\infty)^4=0$ である。ここで I は単位行列である。

4 分類空間の拡張と周期写像

定理の証明に用いる加藤和也-臼井の log Hodge 理論 [KU] を今の場合に即して説明する。

重みを 3、Hodge 数を $h^{p,q}=1$ $(p+q=3,\ p,q\geq 0)$, $H_0=\bigoplus_{j=1}^4\mathbb{Z}e_j$ とし、偏極を $\langle e_3,e_1\rangle_0=\langle e_4,e_2\rangle_0=1$ で与える。D を偏極 Hodge 構造の分類空間、$\check{D}$ をコンパクト双対とする。$(W_\lambda)_\lambda=(W_\lambda^i)_\lambda$ $(i=1,2,3,4)$ とし、λ 平面上の 1 点 $b\in\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を固定する。この時 $H^3(W_b,\mathbb{Z})$ と H_0 を同一視する。$\Gamma=\mathrm{Image}\bigl(\pi_1(\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\})\to \mathrm{G}_\mathbb{Z}\bigr)$ とする。ここで $\mathrm{G}_\mathbb{Z}=\mathrm{Aut}(H_0,\langle\ ,\ \rangle_0)$ である。

加藤-臼井は一般の Hodge 構造の型、偏極、$\mathrm{G}_\mathbb{Z}$ の部分群 Γ が与えられた時に拡張された分類空間 D_Σ を構成し $\Gamma\backslash D_\Sigma$ に log manifold と呼ばれる幾何的構造を与えた。$\Gamma\backslash D_\Sigma$ を考えることにより周期写像を境界まで延長でき、境界上で周期写像を調べることができる。

まず D を拡張する。Hodge 構造の型、偏極、Γ ははじめに定めたものとする。$N_1=\log T$, $N_\infty=\log T_\infty\in\mathrm{End}(\mathbb{Q}\otimes H_0,\langle\ ,\ \rangle_0)$ とする。ここで $\langle\ ,\ \rangle_0$ は $\mathbb{Q}$ 双線型形式としての $\mathbb{Q}\otimes H_0$ への自然な拡張である。$0,N_1,N_\infty$ から定まる weight filtration と $\check{D}$ の元が偏極混合 Hodge 構造をなす時、それぞれの偏極混合 Hodge 構造の型は次の様になる。

$$0:\quad \underset{(3,0)}{\bullet}\quad \underset{(2,1)}{\bullet}\quad \underset{(1,2)}{\bullet}\quad \underset{(0,3)}{\bullet}$$

$$N_1: \quad \begin{array}{ccc} & \overset{\bullet}{(2,2)} & \\ \overset{\bullet}{(3,0)} & \downarrow & \overset{\bullet}{(0,3)} \\ & \overset{\bullet}{(1,1)} & \end{array}$$

$$N_\infty: \quad \begin{array}{c} \overset{\bullet}{(3,3)} \\ \downarrow \\ \overset{\bullet}{(2,2)} \\ \downarrow \\ \overset{\bullet}{(1,1)} \\ \downarrow \\ \overset{\bullet}{(0,0)} \end{array}$$

$\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}N_1$, $\sigma_\infty = \mathbb{R}_{\geq 0}N_\infty$ とし、$\Xi = \{\mathrm{Ad}(g)\sigma \mid \sigma = \{0\}, \sigma_1, \sigma_\infty,\ g \in \Gamma\}$ とする。この時 Γ は Ξ と strongly compatible である。即ち次を満たす。

- 任意の $\sigma \in \Xi$, $g \in \Gamma$ に対して $\mathrm{Ad}(g) \in \Xi$,
- 任意の $\sigma \in \Xi$ に対してある $\gamma \in \Gamma(\sigma) = \Gamma \cap \exp(\sigma)$ が存在し、$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\log(\gamma)$.

拡張された分類空間は集合として

$$D_\Xi = \{(\sigma, Z) : \text{冪零軌道} \mid \sigma \in \Xi,\ Z \subset \check{D}\}$$

と定義される。ここで (σ, Z) が冪零軌道であるとは、$\mathbb{R}_{\geq 0}N = \sigma$ と $F \in Z$ に対して $Z = \exp(\mathbb{C}N)F$, $NF^p \subset F^{p-1}$ $(p \in \mathbb{Z})$, $\exp(iyN)F \in D$ $(y \gg 0)$ を満たすことである。$D \simeq \{(\{0\}, F) \mid F \in D\}$ により D は D_Ξ の部分集合と見なせる。また $(\sigma, Z) \mapsto (\mathrm{Ad}(g)\sigma, gZ)$ により Γ は D_Ξ に作用する。

$\Gamma\backslash D_\Xi$ の幾何的構造を見る。$0 \neq \sigma \in \Xi$ とする。γ を $\Gamma(\sigma)$ の生成元とし、$N = \log\gamma$ とする。この時

$$E_\sigma = \left\{ (q, F) \in \mathbb{C} \times \check{D} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \exp((2\pi i)^{-1}\log(q)N)F \in D & (q \neq 0 \text{ の時}) \\ \exp(\mathbb{C}N)F : \sigma\text{冪零軌道} & (q = 0 \text{ の時}) \end{array} \right\}$$

と定める。ここで $Z \in \check{D}$ が σ 冪零軌道であるとは (σ, Z) が冪零軌道であることである。$\mathbb{C} \times \check{D}$ は明らかに複素多様体である。$\mathbb{C} \times \check{D}$ に因子 $\{0\} \times \check{D}$ に付随した log 構造

$M_{\mathbb{C}\times\check{D}} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\check{D}} \mid f$ は $(\mathbb{C}\times\check{D}) - (\{0\}\times\check{D})$ 上で可逆 $\}$ を与える。E_σ に強位相と呼ばれる位相を入れる。E_σ の部分集合 U が次の条件を満たす時に開集合であると言う：

任意の解析空間 Y と $f(Y) \subset E_\sigma$ となる任意の解析的な射 $f : Y \to \mathbb{C}\times\check{D}$ に対して、$f^{-1}(U)$ は Y の開集合である。

この強位相は通常の位相（$\mathbb{C}\times\check{D}$ の位相から誘導される位相）よりも強い位相である。この時 $E_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}\times\check{D}$ により E_σ 上に構造層 $\mathcal{O}_{E_\sigma}$ と log 構造 M_{E_σ} が誘導される。更に次の写像を考える。

$$E_\sigma \to \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma : (q,F) \mapsto \begin{cases} \exp((2\pi i)^{-1}\log(q)N)F \mod \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}} & (q \neq 0 \text{ の時}) \\ (\sigma, \exp(\mathbb{C}N)F) \mod \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}} & (q = 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

ここで $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}$ は $\Gamma(\sigma)$ で生成される Γ の部分群であり、D_σ は $\{0\}$ と σ からなる扇により拡張された分類空間である。この写像により $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma$ に商位相を与え、構造層 $\mathcal{O}_{\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma}$ と log 構造 $M_{\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma}$ を $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma$ 上に誘導する。$\Gamma\backslash D_\Xi$ の位相はすべての $\sigma \in \Xi$ に対して $\pi_\sigma : E_\sigma \to \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma \to \Gamma\backslash D_\Xi$ が連続になる最も強い位相として定義する。また $\Gamma\backslash D_\Xi$ の開集合 U に対して

$$\mathcal{O}_{\Gamma\backslash D_\Xi}(U) = \{\text{ 写像 } f : U \to \mathbb{C} \mid \text{任意の } \sigma \text{ に対して } f \circ \pi_\sigma \in \mathcal{O}_{E_\sigma}(\pi_\sigma^{-1}(U))\},$$

$$M_{\Gamma\backslash D_\Xi}(U) = \{\text{ 写像 } f : U \to \mathbb{C} \mid \text{任意の } \sigma \text{ に対して } f \circ \pi_\sigma \in M_{E_\sigma}(\pi_\sigma^{-1}(U))\}$$

とすることにより $\Gamma\backslash D_\Xi$ 上の構造層、log 構造を定義する。この時 $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma, \Gamma\backslash D_\Xi$ はハウスドルフ空間であり、更に $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma$ は log manifold になっている。log manifold とは裂け目をもつ log 解析空間の様な空間である。正確な定義は [KU, Definition 3.5.7.] を参照してほしい。Γ が neat（即ち Γ の各元に対してその元のすべての固有値で生成される $\mathbb{C}^\times$ の部分群が torsion free）である場合には $\Gamma\backslash D_\Xi$ も log manifold になり $\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma$ と $\Gamma\backslash D_\Xi$ は log manifold として局所同型になるが、今の場合の Γ は neat ではない。実際 Γ の元 A は有限位数であった。しかし今の場合は境界上の各点 $Q \in (\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma) - (\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D)$ に対して Q の十分小さな開近傍 $V \subset \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma$ を取れば、$\Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_\sigma \to \Gamma\backslash D_\Xi$ を V 上に制限した写像 $\rho : V \to \Gamma\backslash D_\Xi$ により V と $\rho(V)$ とは log 環付き空間として同型になっている。

$\Gamma\backslash D$ を $\Gamma\backslash D_\Xi$ に拡張したメリットの 1 つは周期写像 $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\} \to \Gamma\backslash D$ が $\mathbb{P}^1$ 上まで延長でき、しかも境界での点の対応の仕方が分かることである。$\mathbb{P}^1$ に $\{1,\infty\}$ に付随した log 構造を与え、$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_\infty \subset \mathbb{P}^1$ をそれぞれ $0, 1, \infty \in \mathbb{P}^1$ を中心とする開円板とする。$\lambda = 0$ の周りの局所モノドロミーは有限位数であるから、Δ_0 上で周期写像は解析空間の射として $\Delta_0 \to \Gamma\backslash D$ に延長できる。また [KU, Corollary 4.3.3.] により Δ_1, Δ_∞ 上では周期写像はそれぞれ log 環付き空間の射として $\Delta_1 \to \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_{\sigma_1} \to \Gamma\backslash D_\Xi$, $\Delta_1 \to \Gamma(\sigma)^{\mathrm{gp}}\backslash D_{\sigma_\infty} \to \Gamma\backslash D_\Xi$ に延長できる。この 3 つの射を貼り合わすことで周期写像は log 環

付き空間の射として $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \Gamma\backslash D_\Xi$ に拡張される。この時 [KU, 3.4.4. (i)] と Schmid の冪零軌道定理により、境界上での点の対応の仕方は

$$\begin{aligned}&\varphi(0) \in \Gamma\backslash D,\\ &\varphi(1) = (\sigma_1\text{冪零軌道 mod }\Gamma),\\ &\varphi(\infty) = (\sigma_\infty\text{冪零軌道 mod }\Gamma)\end{aligned}$$

となる。[U1] により φ の像が解析的曲線になることも分かる。

$X = \Gamma\backslash D_\Xi$ とおく。$P_1 = 1, P_\infty = \infty \in \mathbb{P}^1$ とし、$Q_1 = \varphi(P_1), Q_\infty = \varphi(P_\infty) \in X$ とする。上の点の対応の仕方から

$$\varphi^{-1}(Q_\lambda) = \{P_\lambda\} \quad (\lambda = 1, \infty)$$

である。

5 主定理

$(W_\lambda^i)_\lambda$ $(i = 2, 3, 4)$ に対する generic Torelli theorem の証明を与える。$(W_\lambda^1)_\lambda$ に対する証明は臼井 [U2] により与えられており、その他の 3 つ族に対しても同様の議論を行うことにより証明できる。

定理　$i = 2, 3, 4$ に対して、φ は $\varphi(\mathbb{P}^1)$ の解析空間としての正規化である。

境界上の fs log 点 P_1 と Q_1 を使った証明は $(W_\lambda^1)_\lambda$ に対しての証明 [U2, §4] と全く同様である。ここでは境界上の fs log 点 P_∞ と Q_∞ を使ったもう 1 つの証明を与える。

証明　$\varphi^{-1}(Q_\infty) = \{P_\infty\}$ であるので Q_∞ での局所分岐指数が 1 であることを示せば良い。即ち次の主張を示せば良い。

主張　$(M_X/\mathcal{O}_X^\times)_{Q_\infty} \to (M_{\mathbb{P}^1}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^\times)_{P_\infty}$ は全射である。

N を $\lambda = \infty$ の周りの局所モノドロミーの対数とする。$\beta^1, \beta^2, \alpha_1, \alpha_2$ を 3 節の行列表示を与える H_0 のシンプレクティック基底とする。主張の証明の前に補題を用意する。

補題　各 $i = 2, 3, 4$ に対して H_0 のシンプレクティック基底 g_3, g_2, g_1, g_0 が存在して N の行列表示は次の様になる。

$i = 2$ の場合、

$$\big(N(g_3), N(g_2), N(g_1), N(g_0)\big) = (g_3, g_2, g_1, g_0)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & -9/2 & 0 & 0\\ -9/2 & 7/2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$i=3$ の場合、

$$\big(N(g_3),N(g_2),N(g_1),N(g_0)\big)=(g_3,g_2,g_1,g_0)\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&-3&0&0\\-3&11/3&1&0\end{pmatrix}.$$

$i=4$ の場合、

$$\big(N(g_3),N(g_2),N(g_1),N(g_0)\big)=(g_3,g_2,g_1,g_0)\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1/2&0&0\\-1/2&17/6&1&0\end{pmatrix}.$$

補題の証明　基底 g_3,g_2,g_1,g_0 は次で与えられる。

$$i=2,3\ \text{の場合、}\quad g_3=\beta^1,\ g_2=\beta^2,\ g_1=\alpha_1,\ g_0=\alpha_2.$$

$$i=4\ \text{の場合、}\quad g_3=-\alpha_1,\ g_2=\beta^2,\ g_1=\beta^1,\ g_0=\alpha_2.$$

□

主張の証明　$\tilde{q}$ を P_∞ の開近傍 $U\subset\mathbb{P}^1$ の局所座標とし、$z=(2\pi i)^{-1}\log\tilde{q}$ を $U-\{P_\infty\}$ 上の分枝とする。この時 $\exp(-zN)g_1=g_1-zg_0$ は 1 価関数となる。$\omega(\tilde{q})$ を局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 加群 F^3 の局所枠とし、$\omega(\tilde{q})=\sum_{j=0}^{3}b_j(\tilde{q})g_j$ と書く。ここで $t=b_3(\tilde{q})/b_2(\tilde{q})$ と定めると、

$$\begin{aligned}t&=\frac{\langle g_1,\omega(\tilde{q})\rangle_0}{\langle g_0,\omega(\tilde{q})\rangle_0}\\&=\frac{\langle\exp(-zN)g_1,\omega(\tilde{q})\rangle_0+z\langle g_0,\omega(\tilde{q})\rangle_0}{\langle g_0,\omega(\tilde{q})\rangle_0}\\&=z+(\tilde{q}\ \text{に関する 1 価正則関数})\end{aligned}$$

となる。そこで $q=e^{2\pi it}$ と定めると、$u\in\mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1,P_\infty}$ が存在して $q=u\tilde{q}$ となる。$V\subset X=\Gamma\backslash D_\Xi$ を Q_∞ の開近傍とし、$\mathbb{C}$ に $\{0\}$ に付随した log 構造を与える。この時 fs log 局所環付き空間の射

$$U\to V\to\mathbb{C},\quad \tilde{q}\mapsto q=e^{2\pi i(b_3/b_2)}\ (=u\tilde{q})$$

が得られる。これより既約な log 構造の射 $(M_{\mathbb{P}^1}/\mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1})_{P_\infty}\leftarrow(M_X/\mathcal{O}^\times_X)_{Q_\infty}\leftarrow(M_{\mathbb{C}}/\mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}})_0$ が得られ、これらの射の結合は同型である。従って主張が成り立つ。□

以上より主定理が成り立つことが分かった。□

参考文献

[COGP] P. Candelas, C. de la Ossa, P. S. Green, and L. Parks, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Phys. Lett. B 258 (1991), 21–74.

[KT] A. Klemm, S. Theisen, Considerations of one-modulus Calabi-Yau compactifications: Picard-Fuchs equations, Kähler potentials and mirror maps, Nucl. Phys. B389 (1993), 153–180.

[KU] K. Kato and S. Usui, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. Math. Studies 169, Princeton Univ. Press, Princeton, 2009.

[M1] D. Morrison, Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces, in Essays on mirror manifolds (S.-T. Yau, ed.), International Press, Hong Kong, 1992, 241–264.

[M2] D. Morrison, Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), no. 1, 223–247.

[U1] S. Usui, Images of extended period maps, J. Alg. Geom. 15-4 (2006), 603–621.

[U2] S. Usui, Generic Torelli theorem for quintic mirror familly, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 84, Number 8 (2008), 143–146.