

完全流体の変分原理と流体マクスウェル方程式

元東京大学教授 神部 勉 (Tutomu KAMBE)
Former Professor (Physics), University of Tokyo
kambe@ruby.dti.ne.jp

1 はじめに

流体マクスウェル方程式の導出を念頭において、まず初めに、電磁気学の電場 \mathbf{E}^{em} および磁場 \mathbf{H}^{em} に対する Maxwell 方程式をレビューし、次に完全流体の運動方程式を変分原理から導く。そのとき、連続の式、エントロピー式、および渦度方程式も同時に導かれる。以上を概観したうえで、流体マクスウェル方程式を提示する。ここで、電場、磁場に相当する流体電場 \mathbf{E} および流体磁場 \mathbf{H} が、流体の速度場、エンタルピー場を使って定義される。さらに変分原理から流体マクスウェル方程式を導く新しい方式を提示する。

流体系と電磁気学系との類似性は、次の例でさらに明らかになる。すなわち、完全流体の中で運動する微小固体粒子に作用する力を、ラグランジュ関数を使って導出する。さらにそれを \mathbf{E} および \mathbf{H} によって表現する。その結果、電磁場中の荷電粒子に作用する力と、流体中の固体粒子に作用する流体力とが、形式上まったく同じ式になることが示される。

最後に、流体マクスウェル方程式表現と、元の完全流体の方程式系との関係、およびその変換の一意性について考察をおこなう。

2 電磁場の Maxwell equations (review)

電場ベクトルを \mathbf{E}^{em} および磁場ベクトルを \mathbf{H}^{em} とすると、電磁気学のマクスウェル方程式は、次のように書ける：

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{em}} + c^{-1} \partial_t \mathbf{H}^{\text{em}} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{H}^{\text{em}} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H}^{\text{em}} - c^{-1} \partial_t \mathbf{E}^{\text{em}} &= \mathbf{J}^e, & \nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{em}} &= q^e. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $q^e = 4\pi \rho^e$ 、 $\mathbf{J}^e = (4\pi/c)\mathbf{j}^e$ 。ここで、 ρ^e および \mathbf{j}^e はそれぞれ電荷密度および電流密度ベクトル、 c は光速である。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} およびスカラーポテンシャル $\phi^{(e)}$ を使って、ベクトル場 \mathbf{E}^{em} および \mathbf{H}^{em} は次のように定義できる：

$$\mathbf{E}^{\text{em}} = -c^{-1} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi^{(e)}, \quad \mathbf{H}^{\text{em}} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

これらの定義¹より、上のマクスウェル方程式から、 \mathbf{A} および $\phi^{(e)}$ は次の方程式を満足し

¹ベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルは、すでに Maxwell (1873) によって導入され、電磁波の方程式がそれらのポテンシャルを使って導かれた。

なければならない (Landau & Lifshitz (1975), Chap.8):

$$c^{-1}\partial_t\phi^{(e)} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Lorentz condition}), \quad (2)$$

$$(c^{-2}\partial_t^2 - \nabla^2)\mathbf{A} = \mathbf{J}^e, \quad (c^{-2}\partial_t^2 - \nabla^2)\phi^{(e)} = q^e. \quad (3)$$

3 流体運動の方程式系

完全流体のオイラーの運動方程式は

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (4)$$

と表せ、次の三つの方程式でさらに補われる:

$$\partial_t\rho + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t\boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0, \quad (7)$$

(最後の式は式(4)に curl を作用させても得られる)。ただし、 ρ は密度、 s はエントロピー (単位質量当り)、 p は圧力。さらに本稿では次の記号、定義が使われる:

$$\partial_t = \partial/\partial t, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} = (x_i), \quad \mathbf{v} = (v_i), \quad \nabla = (\partial_i), \quad \partial_i \equiv \partial/\partial x_i.$$

等エントロピー流 ($s = \text{一定}$) では、エンタルピー変分 Δh 、密度変分 $\Delta\rho$ 、圧力変分 Δp の間に、次の関係が成り立つ:²

$$\Delta h = \frac{1}{\rho}\Delta p = \frac{a^2}{\rho}\Delta\rho, \quad (8)$$

ただし、 $a^2 = (\partial p/\partial\rho)_s$ で、 a は音速。式(8)の関係を使うと、式(4)、(5)はそれぞれ

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla h = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (10)$$

と書き換えられる。式(9)、(10)を線形化し、 a を定数 a_0 で置き換えると、

$$\partial_t\mathbf{v} + \nabla h = 0, \quad \partial_t h + a_0^2\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (11)$$

を得る。これらより次の波動方程式が得られる:

$$(\partial_t^2 - a_0^2\nabla^2)\mathbf{v} = 0, \quad (\partial_t^2 - a_0^2\nabla^2)h = 0. \quad (12)$$

以上を、式(2)、(3)と比べると、次の対応関係があることがわかる:

$$(\mathbf{A}, \phi^{(e)}) \leftrightarrow (a_0\mathbf{v}, h).$$

²熱力学では、 $dh = (1/\rho)dp + Tds$ がなりたつ。ただし、 T は温度。

この類似性から、(11)の2番目の式が Lorentz condition(2)に対応していることが知られる。

4 流体マクスウェル方程式

導出と表現を簡単にするために、流体エントロピー場は一様で、 $s = s_0$ と仮定する。まず最初に流体電場 \mathbf{E} および流体磁場 \mathbf{H} を次式で定義する：

$$\mathbf{E} \equiv -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h, \quad \mathbf{H} \equiv \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (13)$$

ここで \mathbf{v} および h は流体の速度場およびエントロピー場で、それぞれ電磁場のベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルに対応している。

このとき、流体マクスウェル方程式 (fMe) は次の形に表せる (Kambe 2010):

$$\text{fMe:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, & \text{(A)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = q, & \text{(B)} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{H} = 0, & \text{(C)} \\ a_0^2 \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, & \text{(D)} \end{array} \right.$$

ここで、 a_0 は、静止一様状態の流体中の音速であり、³ また右辺は次で与えられる：

$$q = -\partial_t(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 h, \quad \mathbf{J} = \partial_t^2 \mathbf{v} + \nabla \partial_t h + a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (14)$$

次の保存則が成り立つことは直ちに確められる：

$$\partial_t q + \text{div} \mathbf{J} = 0. \quad (15)$$

運動方程式(9)から、ベクトル \mathbf{E} の他の表現が得られる：

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla(\frac{1}{2} v^2). \quad (17)$$

式(14)の q および \mathbf{J} の他の表現が、それぞれ式(B)および(10)を使って得られる：

$$q = \text{div}[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \nabla^2(\frac{1}{2} v^2), \quad (18)$$

$$\mathbf{J} = \partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (19)$$

4.1 fMe 方程式系の導出

fMe 方程式系 (A) ~ (D) は以下のように導かれる。

まず最初、式(A)および(B)は定義式(13)の二式から直接に得られる。そのとき、 q は(14)または(18)によって与えられる。式(C)は定義式(13)の表現から得られる恒等式に他ならない。 \mathbf{E} の第二の表現式(16)を使うと、式(C)は渦度方程式(7)に帰着する。

最後の残りの式(D)は次のようにして得られる。式(13)からまず、 $\partial_t \mathbf{E} = -\partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla \partial_t h$ を得る。項 $\partial_t h$ に対しては式(10)を使うと、次式を得る：

$$-\partial_t \mathbf{E} - \partial_t^2 \mathbf{v} = \nabla \partial_t h = -\nabla \left(a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) h \right) \quad (20)$$

³もし $a_0 \mathbf{H}$ を \mathbf{H}^{em} で置き換えるなら、式(A)~(D)は電磁気学の式(1)に帰着し (Landau & Lifshitz 1975, Chap.4)、 a_0 は光速 c に対応する。

左辺第二項 $-\partial_t^2 \mathbf{v}$ を右辺に移項し、両辺に $a_0^2 \nabla \times \mathbf{H} = a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$ を加えれば、最終的に式 (D) が得られる。ここで、ベクトル \mathbf{J} は式 (14) で与えられる。fMe 方程式系 (A) ~ (D) を導くのに、式 (9) が使われなかったことは特筆に値いする。

流体電場 \mathbf{E} および流体磁場 \mathbf{H} の注目すべき性質は、その定義式 $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ および $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{v}$ から明らかなように、連続的な速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ に対してのみ定義される点である。というのは、速度場 \mathbf{v} の空間導関数によってそれらが定義されるからである。裏返して言えば、2つの場 \mathbf{E} および \mathbf{H} は、離散的な質点系では定義されない。離散的質点の速度場は時間 t だけの関数だからである。すなわち、流体電場 \mathbf{E} および流体磁場 \mathbf{H} は、連続場ではじめて現れる。

5 変分原理と Euler-Lagrange 方程式

5.1 Lagrangians

完全流体に対するガリレイ対称性の基本的ラグランジュ関数は次で与えられる：

$$L_G = \int_M \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \epsilon \right) \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (21)$$

その他に、時間 t に関する全微分の形で表せる次の3つの Trivial Lagrangians がある：⁴

$$\begin{aligned} L_\phi &= -\frac{d}{d\tau} \int_M \phi d^3 \mathbf{a} = -\int_M \rho D_t \phi d^3 \mathbf{x}, & d^3 \mathbf{a} &= \rho d^3 \mathbf{x} \\ L_\psi &= -\frac{d}{d\tau} \int_M s \psi d^3 \mathbf{a} = -\int_M \rho s D_t \psi d^3 \mathbf{x}, \\ L_A &= -\frac{d}{d\tau} \int_M \langle \mathbf{A}_a, \Omega_a \rangle d^3 \mathbf{a} = -\int_M \langle \partial_\tau \mathbf{A}_a, \Omega_a \rangle d^3 \mathbf{a} \quad (\partial_\tau \Omega_a = 0) \\ &= -\int_M \langle \mathcal{L}_W \mathbf{A}, \boldsymbol{\omega} \rangle d^3 \mathbf{x} = \int_M \langle \mathbf{A}, E_W[\boldsymbol{\omega}] \rangle d^3 \mathbf{x}, \\ &\partial_\tau = D_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla, & (\mathcal{L}_W \mathbf{A})_i &= \partial_t A_i + v^k \partial_k A_i + A_k \partial_i v^k, \\ &E_W[\boldsymbol{\omega}] = \partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Euler-Lagrange 方程式は、これらを加えても影響されない (Kambe 2008a,b)。というのは、以下で定義される作用積分 (24) は、Lagrangians の時間積分で与えられるからである。全ラグランジュ関数は、次で与えられる：

$$L_T = \int_M \Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}) d^3 \mathbf{x}, \quad (22)$$

ここで、 M はデカルト \mathbf{x} -空間の (任意に選んだ) 部分空間であり、ラグランジュ密度 Λ は次で定義される：

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda[\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}] &\equiv \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \rho \epsilon(\rho, s) \\ &\quad - \rho (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \phi - \rho s (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \psi + \langle \mathbf{A}, E_W[\boldsymbol{\omega}] \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

⁴ラグランジュ表示の独立変数を (τ, \mathbf{a}) 、オイラー表示の独立変数を (t, \mathbf{x}) と書く。ただし、両者の時間変数 τ と t とは同等： $\tau = t$ 。しかし偏微分作用素の $\partial/\partial\tau$ と $\partial/\partial t$ とは意味が異なる。前者では \mathbf{a} が固定されるのに対し、後者では \mathbf{x} が固定される。

作用積分 \mathcal{J} を

$$\mathcal{J} = \int_{M \otimes I_t} \Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}) d^4x, \quad d^4x = dt d^3\mathbf{x}, \quad (24)$$

で定義すると、作用原理は次で与えられる：

$$\delta \mathcal{J} = \int_{M \otimes I_t} \delta \Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}) d^4x = 0.$$

ただし、積分の時間区間は $I_t = [t_1, t_2]$.

5.2 Euler-Lagrange 方程式

無限小変分 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ に対する変分原理から、Euler-Lagrange 方程式を導こう。変分は次の条件に従うものとする：

$$\partial_\tau(dm) = 0, \quad \partial_\tau s = 0. \quad (25)$$

ここで、 ∂_τ はラグランジュ粒子座標 a^i を固定した時間微分である。

変分 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^k)$ は無限小で、積分領域 $M \otimes I_t$ の境界上ではゼロとなると仮定する。この変換 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ による変分を Δ で表すと、次を得る：⁵

$$d^3\mathbf{x} \rightarrow d^3\mathbf{x}' = (1 + \partial_k \xi^k) d^3\mathbf{x}, \quad \Delta(d^3\mathbf{x}) = \partial_k \xi^k d^3\mathbf{x}, \quad (26)$$

$$\Delta\rho = -\rho \partial_k \xi^k, \quad \Delta\mathbf{v} = D_t \boldsymbol{\xi}, \quad \Delta s = 0. \quad (27)$$

作用積分 \mathcal{J} の変分は

$$\Delta \mathcal{J} = \int_{M \otimes I_t} d^4x \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \Delta s + \Lambda \partial_k \xi^k \right].$$

と書ける。条件 (25)、および ϕ, ψ, \mathbf{A} 固定の下での変分とすると、 $\Delta\mathbf{v}, \Delta\rho, \Delta s, \Delta(d^3\mathbf{x})$ に上の (26) および (27) を代入すると、次を得る：

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J} &= \int d^4x \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} (\partial_t \xi^k + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi^k) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \rho \partial_k \xi^k + \Lambda \partial_k \xi^k \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(v^l \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\Lambda - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \right] \xi^k. \end{aligned} \quad (28)$$

変分原理は、任意の変分 ξ^k に対して、 $\Delta \mathcal{J} = 0$ を要請するので、最後の式の [] の部分が消えなければならない。すなわち、次の Euler-Lagrange の方程式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(v^l \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\Lambda - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (29)$$

同様に、 ϕ, ψ, \mathbf{A} の任意の変分に対する、 \mathcal{J} の不変性から、

$$\Delta \phi : \Delta_t \rho \equiv \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{連続の式}), \quad (30)$$

$$\Delta \psi : \partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (31)$$

$$\Delta \mathbf{A} : \partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{渦度方程式}), \quad (32)$$

⁵ $d^3\mathbf{x}' = J d^3\mathbf{x}$, where $J = \partial(x'^k)/\partial(x^k) = (1 + \partial_k \xi^k) + O(|\partial_t \xi^k|^2)$.

方程式 (29) に関して、運動量密度 m_k 、および運動量流量密度 M_k^l を

$$m_k = \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} = \rho v_k, \quad M_k^l = v^l \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} + \left(\Lambda - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) \delta_k^l = \rho v_k v^l + p \delta_k^l. \quad (33)$$

によって定義することができる。そのとき、Euler-Lagrange 方程式は次の運動量保存の方程式に帰着する：

$$\partial_t(\rho v^k) + \partial_l(\rho v^l v^k) + \partial_k p = 0, \quad (\partial_k = \partial/\partial x^k).$$

連続の式 (30) を使えば、

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (34)$$

となり、これはオイラーの運動方程式に他ならない。

エネルギー方程式は次で与えられる：

$$\partial_t \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \right] + \partial_k \left[\rho v^k \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right] = 0. \quad (35)$$

6 流体マクスウェル方程式を導く変分原理

変分原理から流体マクスウェル方程式を導くために、まず式 (33) を (28) に代入して、次のような変換を行う：

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J} &= \int_{M \otimes I_t} d^4 x \left\{ \partial_t(\rho v_k) + \partial_l(\rho v_k v^l + p \delta_k^l) \right\} \xi^k \\ &= \int d^4 x \left\{ \left[\partial_t v^k + (v^l \partial_l) v^k + \partial_k h \right] (\rho \xi^k) + \Delta_t \rho (v_k \xi^k) \right\} \\ &= \int d^4 x \left\{ \left[\partial_t v^k + (v^l \partial_l) v^k + \partial_k h \right] (\rho \xi^k) + \Delta_t h \left(\frac{\rho}{a^2} v_k \xi^k \right) \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Delta_t h = \frac{a^2}{\rho} \Delta_t \rho = \partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (37)$$

式 (36) の表現において、変分 $\rho \xi^k$ および $(\rho/a^2) v_k \xi^k$ を次のように表す：

$$\rho \xi = \nabla \times \delta \mathbf{B} + \nabla \delta \Phi, \quad \frac{\rho}{a^2} \mathbf{v} \cdot \xi = \nabla \cdot \delta \mathbf{C}.$$

ここで、任意の変分 $\delta \mathbf{B}$, $\delta \Phi$, $\delta \mathbf{C}$ は、領域 $M \otimes I_t$ の境界上で消えるものとする。

これらを (36) に代入し、部分積分を実行すると、以下を得る：

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J} = \int_{M \otimes I_t} d^4 x \quad & \left\{ \nabla \times \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla h \right) \cdot \delta \mathbf{B} \right. \\ & + \nabla \cdot \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla h \right) \delta \Phi \\ & \left. + \nabla \left(\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \delta \mathbf{C} \right\}. \end{aligned}$$

作用原理 $\Delta\mathcal{J} = 0$ から、次の3式が得られる：

$$\delta B : \nabla \times (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla h) = \nabla \times (-\mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = 0, \quad (38)$$

$$\delta \Phi : \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla h) = \nabla \cdot (-\mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = 0, \quad (39)$$

$$\delta C : \nabla (\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (40)$$

ここで、定義 $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h$ が使われた。式(39)は、 q の定義を使うと次の形になる：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q. \quad (41)$$

定義 $\mathbf{H} = \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ から、 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ が得られる。それ故、流体マクスウェル方程式の最初の2つの式(A), (B) が得られた。

残りの2式は次のように得られる。方程式(38)は

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = -\partial_t \boldsymbol{\omega}.$$

と書ける。定義 $\mathbf{H} = \boldsymbol{\omega}$ を使うと、これは流体マクスウェルの式(C)と同等である：

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{H} = 0. \quad (42)$$

3番目の式(40)については、 $\nabla \partial_t h$ を $-\partial_t \mathbf{E} - \partial_t^2 \mathbf{v}$ で置き換えると、次を得る：

$$-\partial_t \mathbf{E} = \partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}).$$

両辺に同じ項 $a_0^2 \nabla \times \mathbf{H}$ を加えると、

$$\begin{aligned} a_0^2 \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{J} &= \partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}) + a_0^2 \nabla \times \mathbf{H} \\ &= \partial_t^2 \mathbf{v} + \nabla \partial_t h + a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (43)$$

これは流体マクスウェルの式(D)に他ならない。このようにして、
流体マクスウェルの式が、変分原理から導かれた。

7 Lorentz 力、および流体電場

本節では流体力学と電磁気学とのもう一つの類似性を考察する。

- 完全流体の流れ場に固体微粒子が存在し、それを質量 m の質点と仮定する。
この粒子を流れ場の中の試験粒子とみなし、粒子の運動方程式を導くことを試みる。
時刻 t での粒子の位置を $\mathbf{x}_p(t)$ とする。
- 点 \mathbf{x}_p での流体速度は $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_p)$ であり、粒子はそれに相対的に速度 $\mathbf{u}(t)$ で運動するものとする。従って、粒子の全速度は $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 。粒子の位置は、 $\mathbf{x}_p(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{X}(t)$ で表わし、 $\mathbf{u} = d\boldsymbol{\xi}/dt = \dot{\boldsymbol{\xi}}$ 、および $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_p(t))$ とする。
- 流体力学理論によると、固体粒子が(静止)完全流体中を速度 u_i で運動するとき、粒子運動によって誘起される流体運動エネルギーは $\frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$ の2次形式で表される(Landau & Lifshitz (1987), §11)。ここで、 m_{ik} は流体の誘導質量である。

- 固体微粒子は、ポテンシャル ϕ による力 $-\nabla(m\phi)$ の作用を受ける。ただし、 $m\phi = m\phi_g + (\Delta V)p$ 。 ΔV は粒子の体積、 ϕ_g は単位質量の重力ポテンシャルである。
- 全運動エネルギーは $\frac{1}{2}m(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2$ で、ラグランジュ関数 L は次のように表せる：

$$\begin{aligned} L(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2}m(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 + \frac{1}{2}m_{jk}u_ju_k - m\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2}m_{jk}u_ju_k + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - m\phi, \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、流体に誘導された運動エネルギー $\frac{1}{2}m_{ik}u_iu_k$ が考慮されている。しかし、最後の式 (44) では、流体の無摂動エネルギー $\frac{1}{2}\mathbf{v}^2$ の方は省略された。というのは、無摂動の流体場 \mathbf{v} は次項の仮定を満すことを前提とするからである。

- 無摂動の流体場 \mathbf{v} は、圧縮性の非定常・回転性の流れ場とする。試験粒子は大きさも質量も十分小さく、流体の流れ場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ は、粒子の位置 $\boldsymbol{\xi}$ および速度 \mathbf{u} には影響されないと仮定し、また流体速度場の変化は、粒子の大きさ程度の距離ではあまり変化しないものとする。

7.1 微粒子の運動方程式

粒子の相対運動 $\boldsymbol{\xi}(t)$ の方程式は、次のラグランジュ方程式で記述される：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}, \quad \text{ただし } \boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_i), \quad \mathbf{u}(t) = \dot{\boldsymbol{\xi}} = (\dot{\xi}_i),$$

ここで、 $d/dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 、および $\partial/\partial \xi_i = \partial/\partial x_i = (\nabla)_i$ 。式 (44) より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} &= \frac{\partial L}{\partial u_i} = m u_i(t) + m_{ik}u_k + m v_i(t, \mathbf{x}), \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= m \partial_i(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}) - m \partial_i \phi. \end{aligned}$$

これらを代入すると、上のラグランジュ方程式は

$$m \frac{du_i}{dt} + m_{ik} \frac{du_k}{dt} + m \frac{\partial v_i}{\partial t} + m(\mathbf{u} \cdot \nabla)v_i = m \partial_i(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}) - m \partial_i \phi. \quad (45)$$

となる。左辺第4項と右辺第1項はまとめることができ、次のようになる：

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(x)) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

流体運動量 $\mathbf{P}^{(f)} = (P_i^{(f)})$ を、 $P_i^{(f)} = m_{ik}u_k$ で定義すると、方程式 (45) は次の形になる：

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}^{(f)}}{dt} = -m \partial_i \mathbf{v} + m\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - m \nabla \phi. \quad (46)$$

もし、 ρ_p (粒子密度) = ρ (流体密度) の場合には、 $\nabla \phi = \nabla \phi_g + \nabla h$ である。というのは、 $\nabla \phi = \nabla \phi_g + (\Delta V/m)\nabla p = \nabla \phi_g + \nabla p/\rho_p$ 、および $\nabla p = \rho \nabla h$ だからである。

全運動量を $\mathbf{P} = m\mathbf{u} + \mathbf{P}^{(f)}$ で定義し、式 (13) で定義された \mathbf{E} および \mathbf{H} を使うと、式 (46) は次のように簡潔な形になる：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = m \mathbf{E} + m\mathbf{u} \times \mathbf{H} - m \nabla \phi_g, \quad (P_i = m u_i + m_{ik} u_k). \quad (47)$$

これは、電磁場の荷電粒子の運動方程式と類似している。電荷 e の荷電粒子の運動方程式は次の形に書ける：

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_p^e) = e\mathbf{E}^{\text{em}} + (e/c)\mathbf{v}_p \times \mathbf{H}^{\text{em}} - m\nabla\Phi_g, \quad (48)$$

ここで、 \mathbf{v}_p^e は荷電粒子の速度、 c は光速、 $(\mathbf{E}^{\text{em}}, \mathbf{H}^{\text{em}})$ は電磁場、 Φ_g は重力ポテンシャル（単位質量当り）。

両者の比較のためには、流体場の \mathbf{H} は \mathbf{H}/a_0 で置き換える必要がある（第4節脚注3）。質点質量 m が流体系の *charge* に相当することがわかる。特に、コリオリ力 $m\mathbf{u} \times \mathbf{H}$ が電磁場のローレンツ力 $(e/c)\mathbf{v}_p \times \mathbf{H}^{\text{em}}$ に相当することが知られるのは、興味深い。

8 変換の一意性

流体マクスウェル方程式表現と、元の完全流体の方程式系との関係は如何なるものであろうか。その変換の一意性について考察をおこなう。

流体の方程式系 (7), (9), (10) を再び書く：

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0, \quad (49)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla h = 0, \quad (50)$$

$$\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (51)$$

これらは流体マクスウェル式 (A)~(D),

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (\text{A}); \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{H} = 0, \quad (\text{C})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q, \quad (\text{B}); \quad a_0^2 \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (\text{D})$$

から、どのように回復できるであろうか。

電磁気学を物理的観点からみると、電場 \mathbf{E}^{em} および磁場 \mathbf{H}^{em} は荷電粒子に働く力によって定義されている。実際、電荷 e の荷電粒子に働く力は、式 (48) の右辺の形で定義される。

この性質を流体マクスウェル系の指導原理とすることにして、次の原理から出発することにする。「流体速度場 \mathbf{v} の中で、速度 \mathbf{u} で運動する質量 m の試験粒子に作用する力は、 $m\mathbf{E} + m\mathbf{u} \times \mathbf{H}$ の形で与えられる」とする。ここで、 \mathbf{E}, \mathbf{H} はあるベクトル場である。試験粒子の運動の全運動量を \mathbf{P} とすると、その運動方程式は

$$d\mathbf{P}/dt = m\mathbf{E} + m\mathbf{u} \times \mathbf{H} - m\nabla\phi_g, \quad (52)$$

ここで、 ϕ_g は重力ポテンシャルである。この式を、式 (46) およびその下の $\rho_p = \rho$ の場合と比べると、次の関係式が得られる：

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (53)$$

これがベクトル場 \mathbf{E} および \mathbf{H} の、ベクトルポテンシャル \mathbf{v} 、スカラーポテンシャル h による表現となる。

これらの \mathbf{E} および \mathbf{H} を使うと、流体マクスウェル式の (A) と (C) は恒等的に満足される。それ故、流体式 (49), (50) および (51) を導くために、残りの2式 (B), (D) および (18), (19) の source terms,

$$q = \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}], \quad \mathbf{J} = \partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla[\mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}] + a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (54)$$

から出発する。

- 最初に式 (D) を使い、方程式 (51) を導くことを試みる。そのとき質量の'発生源なし'の条件を課す。実際、上の \mathbf{E} と \mathbf{H} の表現、および \mathbf{J} の式を代入すると、式 (D) は次のようになる：

$$a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \partial_t^2 \mathbf{v} + \nabla \partial_t h = \partial_t^2 \mathbf{v} - \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}] + a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

これから、 $\nabla (\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ を得る。それゆえ、

$$\partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + a^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = C(t) \quad (\text{時間 } t \text{ のある関数}). \quad (55)$$

質量源がない場合は、 $C(t) = 0$ でなければならない。もし $C(t) \neq 0$ なら、 $(\rho/a^2)C$ の形の項が質量源を表すからである。それ故、 $C(t) = 0$ を得るので、方程式 (51) が回復された。

等エントロピーの条件のもとでは、これは連続の式と同等である：

$$\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (56)$$

- 次に、式 (B) に $q = \text{div}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}]$ を代入して、1 回積分すると、次を得る：

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \times \xi, \quad (57)$$

ここで、 ξ は任意のベクトル場である。 $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h$ なので、これは

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla h = -\nabla \times \xi \quad (58)$$

となる。以下で考察するエネルギー式によって、右辺のベクトル場 $\nabla \times \xi$ は消えなければならない。従って、オイラーの方程式が得られる。

流体の単位堆積当りの全エネルギーは $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$ であり、エネルギー方程式は

$$\partial_t (\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + h)] = -\rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \xi) \quad (59)$$

で与えられる。エネルギー保存則から、右辺は消えなければならない。それ故、 $\nabla \times \xi$ という項はゼロでなければならない。従って、方程式 (58) はオイラー方程式 (50) に帰着する： $\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla h = 0$ 。

式 (57) で $\nabla \times \xi = 0$ とすると、式 (16) の $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ が得られる。この式を式 (C) に代入し、恒等式 (17) を適用し、 $\mathbf{H} = \boldsymbol{\omega}$ とすると、式 (C) は渦度方程式 (49) に帰着する。

以上のようにして、等エントロピー、質量源なし、およびエネルギー保存の条件のもとで、さらに微粒子に働く力の式 (52)、および source terms (18), (19) のもとで、流体方程式 (49), (50), (51) が、マクスウェル方程式 (A)~(D) から導かれた。

9 まとめ

流体方程式系は、オイラーの方程式、連続の式、エントロピー式、渦度方程式から成るが、⁶ それらから流体マクスウェル方程式が導かれた。詳細は以下の通りである。

⁶等エントロピー流では、連続の式とエントロピー式が結びついて、エンタルピー方程式 (10) となる。

(a) 2つのベクトル \mathbf{E} と \mathbf{H} がベクトル場 \mathbf{v} およびスカラー場 h によって定義され、 \mathbf{E} と \mathbf{H} に対して、流体マクスウェル方程式系が導かれた。その系の源密度 q , カレント密度ベクトル \mathbf{J} は保存形の次の方程式を充たしている: $\partial_t q + \text{div } \mathbf{J} = 0$.

(b) この類似対応では、ベクトル $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{v}$ (渦度) は磁場に対応し、ベクトル $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h$ は電場に対応している。運動方程式から、流体電場 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

と表せる。その結果、マクスウェル式の1つは渦度方程式に帰着する。

(c) もう一つの類似性は、流れ場中の試験粒子の運動方程式である。回転性の流れ場の試験粒子にはコリオリス力が働くが、それは電磁場のローレンツ力に対応している。

(d) 2つの場 $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ および $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{v}$ は連続場においてのみ定義される。というのは、両者は速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ の空間導関数に依存しているからである。そのような場は、離散的粒子系では定義されない。速度は時間 t だけの関数だからである。

(e) 流体方程式系と流体マクスウェル系との間の変換の一意性が考察された。そのとき、回転性の流れ場の中で運動する試験粒子に作用する流体力学的力の表現が、両者を関係づけるのに大きな役割を果たした。

本稿では述べられなかったが、以下も示すことができる重要な性質である。

(f) 流体マクスウェル方程式から、自然に音波の方程式が音源項つきで導かれる。それゆえ、音波は電磁波に対応する波動である。(Kambe 2010)

(g) 電磁気学はローレンツ対称性の系であるのに対し、流体力学はガリレイ対称性の系である。それにも拘らず、両者に類似性がある。このことは、対称性の存在が、その違いよりも基本的であることを示唆している。

(h) 本稿の方法は、粘性流体にも難なく適用される。(Kambe 2010)

10 References

Kambe T 2008a *Fluid Dyn. Res.* **40**, 399.

Kambe T 2008b *Physica D* **237**, 2067; *Proc. of Euler Equations: 250 Years On* (2007, France).

Kambe T 2010 *New formulation of equations of compressible fluids on analogy of Maxwell's equations*, accepted for publication in *Fluid Dyn. Res.* (2010).

Landau LD and Lifshitz EM 1975 *The Classical Theory of Fields* (4th-ed, Pergamon).

Landau LD and Lifshitz EM 1987 *Fluid Mechanics* (2nd ed, Pergamon Press).

Maxwell JC 1873 *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol.1 & 2 (Dover edition 1954).