

## Brouwer's fixed point theorem とその周辺

高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)

Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

### 1 Introduction

#### Brouwer's fixed point theorem

次の定理は、*the Brouwer fixed point theorem* と呼ばれ多くの分野に応用を持つ、最も有用な数学の定理の 1 つと考えられています。また、この定理を起点とする多くの拡張定理が存在します。

**Theorem 1.1** (Brouwer [1], Hadamard [2]).  $n \in \mathbb{N}$  とし、 $g$  を  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]^n$  への連続写像とします。このとき  $g(z) = z$  を満たす  $z \in [0, 1]^n$  が存在します。

この定理は、19 世紀初頭に Bolzano が「中間値の定理に証明が必要だ」と考えた時点に淵源を持ちます。19 世紀後半に、Poincaré は彼の研究の中でこの問題を考察しました。Bohl の研究成果を経て、1910 年に Hadamard が初めてこの定理を  $n$  次元で証明したといわれています。この定理には、Brouwer の写像度による方法、ホモロジー群による方法、KKM-Theorem による方法、Milnor による解析的な方法、など多様な証明が存在します。Brouwer の定理において、 $g(z) = z$  を満たす点を  $g$  の不動点と呼び、不動点の存在は  $g$  の定義域  $C$  を位相同型な図形に代えても変化しません。証明の際には、 $C$  の選び方に自由度があります。2 人の天才的な数学者 Brouwer と Sperner が、 $n$  次元単体を単体分割する手法を選んだために、この権威と影響によって、通常は  $C$  として  $n$  次元単体を選びます。しかし、 $n$  次元立方体  $[0, 1]^n$  を選ぶ事も可能です。また、 $n$  次元立方体で考える方が自然だと思われる面も多々あります。事実、彼ら以前には、この問題は  $n$  次元の矩形で考察されていました。

一般には、Sperner's Lemma [3] を使用した手法がこの定理の初等的証明とされます。この証明には単体分割という概念が必要です。単体分割という言葉を使用するためには、単体とは何か? 単体分割とは何か? ということが当然問題となります。位相幾何の用語  $n$  次元単体の単体分割とは、イメージとしては  $n$  次元 3 角形を小  $n$  次元 3 角形に分割することです。このような分割を考えたときに、小 3 角形が元の 3 角形を覆っているか、小 3 角形同士の接続はどのようになっているのか、などを厳密にチェックすることは大変な作業です。単体分割を安心して使用するのに必要な事項について、証明を厳密に書こうとすれば非常に長く読みにくいものになり、これを簡潔に書こうとすれば数学的直感を補強する説明のようなものになると著者は考えます。位相幾何の概念は通常考えられるよりも遥かに複雑です。Stuckless [4] には「95% の数学者が Brouwer の定理を記述できるが、10% に満たない数学者がこの証明を知っている」と推定されると記述されています。著者の認識では、大学の教養程度の知識だけで理解できる、この定理の証明は知られていなかったと思います。

このような事情に刺激されて、九州工業大学の鈴木智成先生と著者は、新しい手法を開拓しこの定理の初等的証明を提出しました [5]。この証明は、*the Bolzano-Weierstrass theorem* と「奇数に偶数を加えると奇数になる」という事実だけを使用した完全に初等的なものです。私たちは、いかなる幾何学的なアイデア (もちろん単体分割という概念を含みます) も必要としません。

## Sperner のアイデアとその射程

*the Brouwer fixed point theorem* の通常の定式化において、 $C$  はコンパクトで凸な集合、 $g$  は  $C$  上の連続な自己写像とされます。Brouwer の定理の条件及び証明を検討すると興味深い点があります。1つ目は次のことです。1次元の Brouwer の定理は、1次元中間値の定理の直接の結果であることはよく知られています。しかし、この2つの定理の条件には異なる点があります。1次元中間値の定理では、条件の1つは  $g$  の境界条件です。2つ目は次の事実です。この定理の中で  $g$  の定義域が凸という条件は位相的な条件ではありません。これは、やや不自然にも思える条件です。この様な疑問点に関連して、どのような空間とどのような部分集合  $C$  を選べば  $C$  上の連続写像  $g$  の不動点が存在するのかと考えるのは当然です。シャウダーの不動点定理、ティコノフの不動点定理などはこの方向で得られた拡張定理です。次にフォン・ノイマンの定理に関連して、角谷によって多価写像の不動点定理が提出されました。この方向では、ファン・ブラウダーの定理などがあります。しかし、これらの研究は Brouwer の定理が成立し摘要できる舞台を考える傾向が強く、直接 Brouwer の定理の条件そのものを問題とするものは少ないように思います。Brouwer の定理の既存の証明を検討すると、 $g$  が自己写像であるという条件  $g(C) \subset C$  は使用されていないことに気がきます。 $\partial C$  を  $C$  の境界として、 $g(\partial C) \subset C$  という条件だけが使用されています。定理の条件は、より弱い境界条件  $g(\partial C) \subset C$  に代えることができます。この事実が暗示する様に、Brouwer の定理の条件は明示されていない1つの境界条件を定めることが本質的だと著者は考えます。

Sperner の天才は、彼のアイデアを Sperner's Lemma と呼ばれる非常に美しく印象的な Lemma に仕上げました。しかし、彼のアイデアの広範な射程はこのことによって隠されてしまったと著者は考えます。彼のアイデアは、Brouwer の定理をはるかに超え、中間値原理とでも呼ぶべき汎用性を持つと著者は思います。著者は、Sperner のアイデアを一般的に議論する学力を持ちません。したがって、 $R^2$  に話を限定し、 $C$  を大小の正方形を組み合わせてできる図形として議論し問題提起とします。彼のアイデアを検討すると、Brouwer の定理の条件は、私たちの用語で記述した次の1つの条件に還元されます。 $C$  を大きさの等しい小矩形へ分割すると、どのような細かい分割についても

- ・  $\partial C$  の上にあって  $n$ -string に含まれる  $(n-1)$ -fully labeled な集合の数は奇数個である

ということになります。この条件を満たす図形と写像の組み合わせを考える時、 $g$  は  $C$  上の自己写像である必要はありません。また定義域  $C$  も、非連結であったりトーラスであってもかまいません。

## Sperner のアイデアと本稿の議論

数学の議論は、簡単な事実でも式だけで書くと複雑に感じることがあります。本稿では読者として学部生も想定し、図と解説を適宜補うことにします。

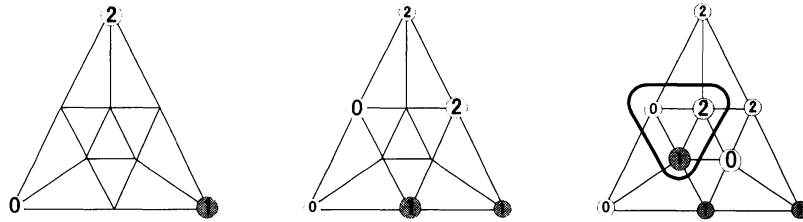
本稿の議論の中心となる Sperner のアイデアについて簡単に説明します。正確に彼の議論をなぞるには  $n$  次元の単体分割という概念が必要ですので、3角形についての直観を利用して2次元で説明します。図1の様に大きな3角形を小さな3角形に分割します。大きな3角形の

- ・ 3つの頂点に  $\{0, 1, 2\}$  という3つのラベルをつけます。
- ・ 辺の上にある小さな3角形の頂点に辺の両端のラベルのどちらかと同じラベルをつけます。
- ・ 内部にある小さな3角形の頂点には  $\{0, 1, 2\}$  という3つのラベルを自由につけます。

このようなラベルのつけ方を Sperner labeling といいます。このとき

- ・ 3つの頂点に  $\{0, 1, 2\}$  という3つのラベルを総て持った小3角形が奇数個存在します。

図 1: Sperner's Lemma



これを Sperner's Lemma といいます。一般には、この Lemma を使用した Brouwer の定理の証明が初等的とされています。Sperner's Lemma は非常に印象的な定理ですが、彼のアイデア自体はこの Lemma に縛られない広範な射程を持ちます。この時点では明確ではありませんが、重要な点は

- 彼のアイデアは、最初の図形を 3 角形 ( $n$  次元単体) とすることを必要としない。
- 彼のアイデアは、もっと緩い条件のラベリングにも適応する。
- 彼のアイデアを生かす媒体は単体とは限らない (単体分割という概念を必要としない)。

となります。本稿の議論は、 $n$  次元単体に代えて  $n$  次元立方体を使用し、もう少し複雑な図形についても考察します。また、 $n$  次元単体分割で作られる  $k$  次元単体 ( $k$  次元小 3 角形) の代わりに  $k$ -string という概念を、ある条件を満たすラベルの付いた  $(k-1)$  次元単体 ( $k$  次元小 3 角形の辺) の代わりに、 $k$ -string に含まれる  $(k-1)$ -fully labeled な集合という概念を使用します。この 2 つの概念を使用することによって、大学の教養程度の知識だけで Brouwer の定理を証明することが可能になります。また、証明自体が非常に簡潔になります。本稿の議論は、先入観さえなければ、Sperner の論文 [3] 以降に、いつ現れても不思議ではなかったと思います。

## 2 Preliminaries

本稿を通じて、 $N$  は正の整数の集合、 $N_0$  は非負の整数の集合、 $R$  は実数の集合を表します。 $N(i, j)$  を次の様に定義します。

$$N(i, j) = \{k : k \in N_0, i \leq k \leq j\}.$$

$x \in R^n$  とするとき、 $(x)_i$  で  $x$  の  $i$ -成分を表します。任意の集合  $B$  について  $\#B$  は  $B$  のカージナル数 (有限集合の場合は要素の個数) を表すことにします。 $L$  を任意の集合、 $n \in N$ 、 $k \in N(0, n)$  として、 $L$  から  $N(0, n)$  への写像  $\ell$  を  $L$  の labeling と呼びます。 $L$  の部分集合  $B$  が  $\#B = k+1$  と  $\ell(B) = N(0, k)$  を満たすとき  $k$ -fully labeled と呼ぶことにします。次の簡単な事実が本稿では重要な役割をします。

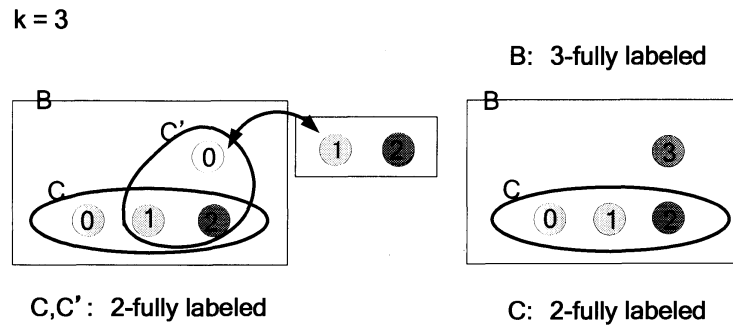
**Lemma 2.1.**  $L$  を任意の集合、 $n \in N$ 、 $k \in N(1, n)$  とします。 $\ell$  を  $L$  から  $N(0, n)$  への labeling とします。 $L$  の部分集合  $B$  が  $\#B = k+1$  と  $\ell(B) \subset N(0, k)$  を満たすとき、次の事項が成立します。

- $B$  は高々 2 つの  $(k-1)$ -fully labeled な集合を含みます。
- 次の 2 つの事項は同値です。

$B$  が  $(k-1)$ -fully labeled な集合を 1 つだけ含む  $\Leftrightarrow B$  は  $k$ -fully labeled な集合。

$k=3$  のケース、点の数が 4 個の場合について図示します。0, 1, 2 の 3 つのラベルを持つ 3 点の集合を 1 つ含む 4 点の集合は図 2 の場合に限られます。証明もほとんど自明です。

図 2: Lemma 2.1  $k$ -fully labeled



### 3 A Labeling Theorem

$n, m \in \mathbb{N}$  を固定します。  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$  を次の様に定義します。

$$e_1 = (1/m, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1/m, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1/m).$$

$L_0 = \{0\}$ 、  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  として、  $n$  個の集合  $L_1, \dots, L_n \subset [0, 1]^n$  を次の様に定義します。

$$(3.1) \quad L_k = \{ \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{N}(0, m) \}$$

$L_n$  は  $[0, 1]^n$  を  $m$  等分した立方格子、  $L_{k-1}$  は  $L_k$  の底面の立方格子に相当します。

#### Brouwer labeling

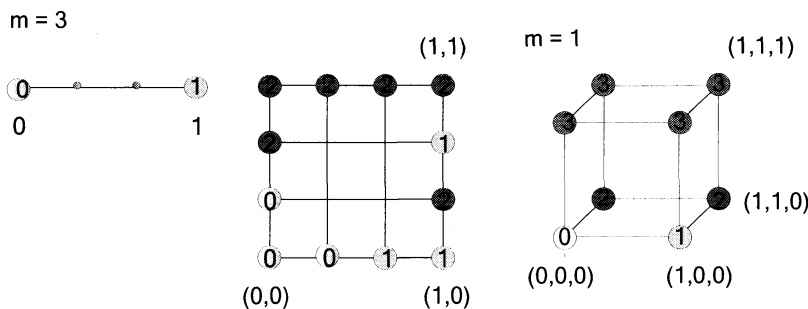
$L_n$  から  $\mathbb{N}(0, n)$  への labeling  $\ell$  が次の条件を満たすとき *Brouwer labeling* と呼びます。

(B1) ある  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  について  $(x)_k = 0$  であれば、  $\ell(x) \neq k$

(B2) ある  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  について  $(x)_k = 1$  であれば、  $\ell(x) \geq k$ .

これも図を示した方が理解しやすいと思いますので 3 次元までの図 3 を示します。

図 3: Brouwer labeling



右端の 3 次元の図で確認します。 上面  $[(x)_3 = 1]$  には 3 以上のラベルだけがあり、 底面  $[(x)_3 = 0]$  にはラベル 3 がありません。 向う側の面  $[(x)_2 = 1]$  には 2 以上のラベルだけがあり、 手前の面  $[(x)_2 = 0]$  にはラベル 2 がありません。 右側の面  $[(x)_1 = 1]$  には 1 以上のラベルだけがあり、 左側の面  $[(x)_1 = 0]$  にはラベル 1 がありません。 これが *Brouwer labeling* です。 内部の点のラベルは何でも構いません。 定義からほとんど自明な *Brouwer labeling* の重要な特徴を確認します。  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  とします。

- $L_k$  の底面  $L_{k-1}$  は  $N(0, k-1)$  の丁度  $k$  個のラベルを含む面です。
- 底面  $L_{k-1}$  だけが  $N(0, k-1)$  の  $k$  個のラベルを含む  $L_k$  の面です。

この事実は  $(k-1)$ -fully labeled な集合を含む  $L_k$  の面は底面  $L_{k-1}$  だけだということを意味します。

- Brouwer labeling は  $L_n$  の境界面の点だけについての labeling と捉えることもできます。

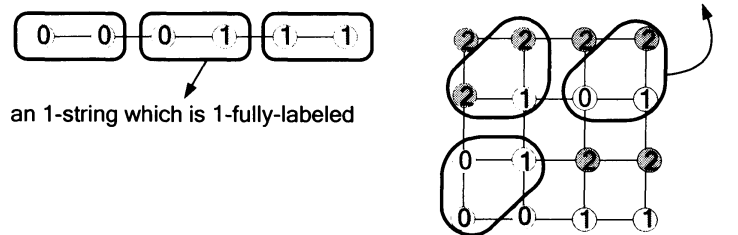
**$k$ -string と  $k$ -fully labeled**

$L_k$  の部分集合  $B$  が次の条件を満たすとき  $k$ -string と呼びます。  $(k+1)$  個の点  $x_0, \dots, x_k \in L_k$  と  $N(1, k)$  上の置換  $\sigma$  が存在して

$$(1) B = \{x_0, \dots, x_k\}, \quad (2) x_j = x_0 + \sum_{i=1}^j e_{\sigma(i)} \text{ for } j \in N(1, k).$$

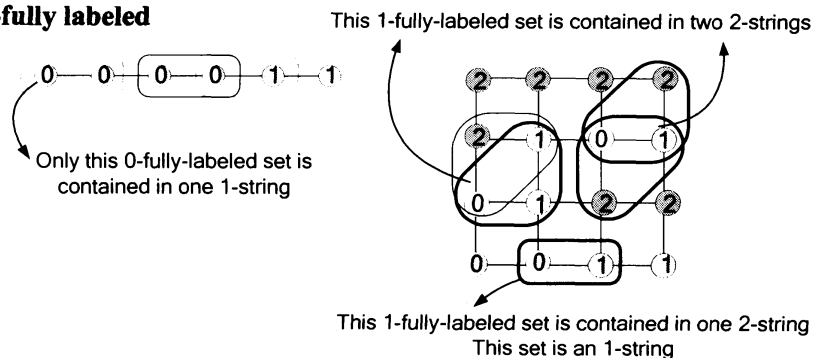
$B = \{0\}$  を 0-string と呼びます。  $B$  が  $k$ -string であるとき、しばしば  $B = (x_0, \dots, x_k)$  と書きます。  $L_n$  は Brouwer labeling  $\ell$  によってラベルがついているとします。 理解を助けるために 1次元と 2次元について図を示し解説します。 図4の太枠で囲んだ各成分方向に 1マスずつ増える  $(k+1)$  個の点の集合が  $k$ -string の例です。

図4  $k$ -string



1次元の場合 0-fully labeled な集合はラベル 0 を持つ 1 点の集合です。 (0-fully labeled な) 0-string は左端 (底面) の 1 つ (奇数個) だけです。 1-string は 0-fully labeled な集合を最大 2 つしか持てません。 また、 0-fully labeled な集合を 1 つだけ持つ 1-string は 1-fully labeled (0 と 1 のラベルを両方持つ) です。 2次元の場合 1-fully labeled な集合はラベル 0 と 1 を持つ 2 点の集合です。 (1-fully labeled な) 1-string は底面だけに存在します。 2-string は 1-fully labeled な集合を最大 2 つしか含みません。 また、 1-fully labeled な集合を 1 つだけ含む 2-string は 2-fully labeled (0, 1, 2 の 3 つのラベルを持つ) です。 次に図5で fully labeled な集合の立場から事情を確認します。

図5  $k$ -fully labeled



1次元の場合、 0-fully labeled な集合が 1-string に含まれるとすれば、 この 0-fully labeled な集合を含む 1-string は 1 つまたは 2 つです。 左端 (底面) の 1 つ (奇数個) だけが 1 つの 1-string に含まれる

0-fully labeled な集合 (同時に 0-string) です。その他の 0-fully labeled な集合は 2 つの 1-string に含まれます。2 次元の場合も、1-fully labeled な集合が 2-string に含まれるとすれば、この 1-fully labeled な集合を含む 2-string は 1 つまたは 2 つです。底面の隣り合った 2 点の集合で 1-fully labeled (同時に 1-string) であるものだけが 1 つの 2-string に含まれます。その他の 1-fully labeled な集合は 2 つの 2-string に含まれます。

ここで解説した事情は次元が大きくなっても同様です。Lemma にまとめます。証明は数学的帰納法こそ必要としますが、数学・理工学・数理経済を専攻する学部 3・4 年生であれば自分で証明できるレベルです。Lemma 3.1 は実質的に Lemma 2.1 ですが、 $\ell$  が  $L_n$  の Brouwer labeling であるとき、 $k$ -string は Lemma 2.1 の条件を明らかに満たしますので、該当箇所を変更してあります。

**Lemma 3.1.**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  とします。  $\ell$  を  $L_n$  から  $N(0, n)$  への Brouwer labeling とします。  $k$ -string  $B \subset L_k$  について、次の事項が成立します。

- (i)  $k$ -string  $B$  は高々 2 つの  $(k-1)$ -fully labeled な集合を含みます。
- (ii) 次の 2 つの事項は同値です。

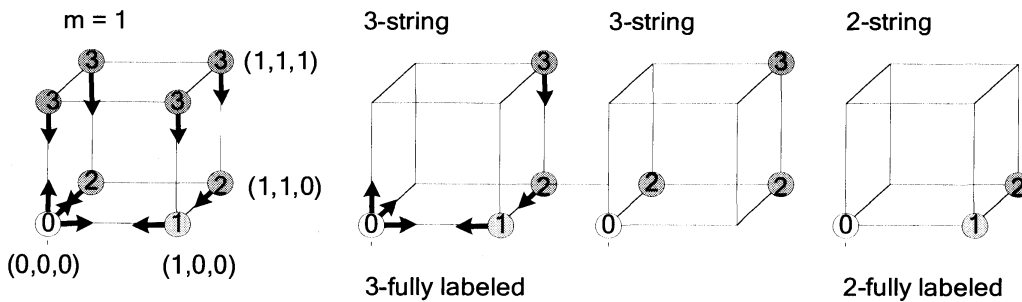
$k$ -string  $B$  が  $(k-1)$ -fully labeled な集合を 1 つだけ含む  $\Leftrightarrow B$  は  $k$ -fully labeled な  $k$ -string。

**Lemma 3.2.**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  とします。  $\ell$  を  $L_n$  から  $N(0, n)$  への Brouwer labeling とします。  $C \subset L_k$  が  $(k-1)$ -fully labeled とすれば、次の事項が成立します。

- (i)  $(k-1)$ -fully labeled な集合  $C$  は高々 2 つの  $k$ -string に含まれます。
- (ii) 次の 2 つの事項は同値です。

$(k-1)$ -fully labeled な  $C$  が唯 1 つの  $k$ -string に含まれる  
 $\Leftrightarrow C$  は  $(k-1)$ -fully labeled な  $(k-1)$ -string。

参考のために 3 次元のケースを図示しておきます。左端が 3 次元の Brouwer labeling です。後述しますが、矢印は Brouwer の定理の仮定を満たす写像による点の運動成分です。



**A labeling theorem**

ここまでの議論によって、次の Lemma が成立します。

**Lemma 3.3.**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}(1, n)$  とします。  $\ell$  を  $L_n$  から  $N(0, n)$  への Brouwer labeling とします。 $(k-1)$ -fully labeled な  $(k-1)$ -string の数が奇数個ならば、 $k$ -fully labeled な  $k$ -string の数も奇数個です。

**証明の要点.** 証明の要点といっても、 $k$ -string に含まれる  $(k-1)$ -fully labeled な集合の延べ数を異なる 2 つの方法で数えるだけです。4 つの集合  $S_1, S_2, T_1$  と  $T_2$  を次の様に定義します。

$S_1$ :  $(k-1)$ -fully labeled な集合を 1 つだけ含む  $k$ -string の集合

$S_2$ :  $(k-1)$ -fully labeled な集合を 2 つ含む  $k$ -string の集合

$T_1$ : 1 つの  $k$ -string だけに含まれる  $(k-1)$ -fully labeled な集合の全体

$T_2$ : 2 つの  $k$ -string に含まれる  $(k-1)$ -fully labeled な集合の全体

$k$ -string に含まれる  $(k-1)$ -fully labeled な集合の延べ数を、Lemma 3.1, 3.2 によって 2 重に数えると

$$\#S_1 + 2\#S_2 = \#T_1 + 2\#T_2.$$

となります。Lemma 3.2 より  $\#T_1$  は  $(k-1)$ -fully labeled な  $(k-1)$ -string の数と一致しますから、仮定によって  $\#T_1$  は奇数です。したがって  $\#S_1$  も奇数となります。Lemma 3.1 によって、 $\#S_1$  は  $k$ -fully labeled な  $k$ -string の数と一致しますから、結論を得ます。□

この Lemma によって、 $n$ -次元立方格子の Sperner's Lemma に相当する次の定理を得ます。

**Theorem 3.4.**  $n \in N$  とし、 $\ell$  を  $L_n$  から  $N(0, n)$  への Brouwer labeling とします。このとき、 $n$ -fully labeled な  $n$ -string が存在します。

*Proof.* 0-fully labeled な 0-string は明らかに 1 つ (奇数) ですから、Lemma 3.3 と数学的帰納法によって  $n$ -fully labeled な  $n$ -string が奇数個存在します。これは、 $n$ -fully labeled な  $n$ -string が少なくとも 1 つは存在することを意味します。□

## 4 Brouwer's fixed point theorem

Theorem 1.1 を再掲し証明します。

**Theorem 4.1** (Brouwer's fixed point theorem).  $n \in N$  とし、 $g$  を  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]^n$  への連続写像とします。このとき  $g(z) = z$  を満たす  $z \in [0, 1]^n$  が存在します。

*Proof.*  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]$  への  $n$  個の連続写像  $g_1, \dots, g_n$  を  $g_k(x) = (g(x))_k$  for  $k \in N(1, n)$  で定義します。 $m \in N$  を固定します。 $L_n$  を (3.1) で定義された格子とし、 $L_n$  から  $N(0, n)$  への labeling  $\ell$  を次の様に定義します。

$$\ell(x) = \max\{k \in N(1, n) : (x)_k > 0, g_k(x) \leq (x)_k\},$$

ただし、 $\max \emptyset = 0$  とします。 $\ell$  の定義から、 $\ell$  が (B1) を満たすことは明らかです。 $(x)_k = 1$  であれば  $g_k(x) \leq (x)_k$  ですから  $\ell(x) \geq k$  となります。したがって、 $\ell$  は (B2) も満たし Brouwer labeling です。Theorem 3.4 によって、 $n$ -fully labeled な  $n$ -string  $B^{(m)}$  が存在します。したがって、 $\ell(y_k^{(m)}) = k$  for  $k \in N(0, n)$  を満たす  $(n+1)$  個の点  $y_0^{(m)}, \dots, y_n^{(m)} \in B^{(m)}$  が存在します。

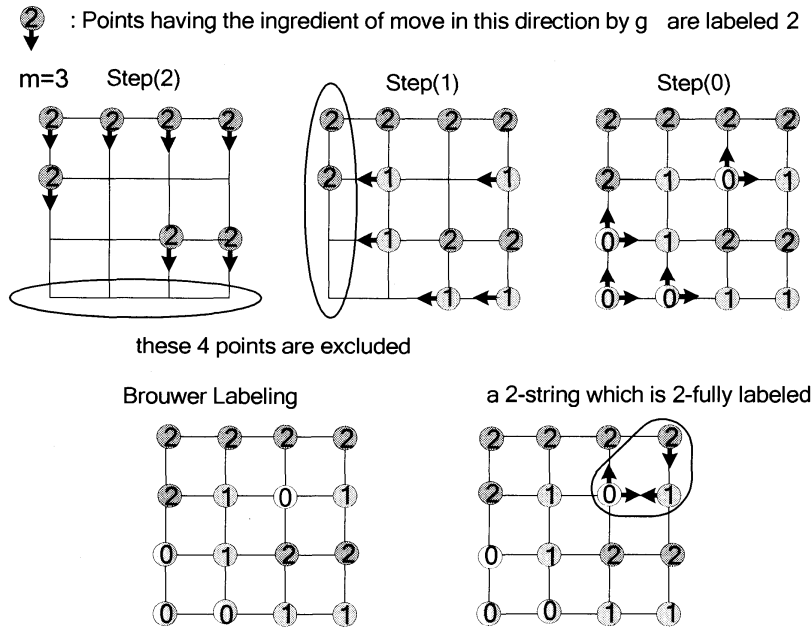
$[0, 1]^n$  は compact ですから、the Bolzano-Weierstrass theorem によって  $\{y_0^{(m)}\}_m$  は収束部分列を持ちます。一般性を失わずに、 $\{y_0^{(m)}\}_m$  がある  $z \in [0, 1]^n$  に収束すると考えることができます。 $B^{(m)}$  の直径は  $\sqrt{n}/m$  ですから、任意の  $k \in N(1, n)$  について  $\{y_k^{(m)}\}_m$  も  $z$  に収束します。 $\ell(x) = 0$  であれば、 $(x)_j \leq g_j(x)$  for  $j \in N(1, n)$  となることを再度確認します。 $(y_0^{(m)})_j \leq g_j(y_0^{(m)})$  for  $j \in N(1, n)$  と  $g_k(y_k^{(m)}) \leq (y_k^{(m)})_k$  for  $k \in N(1, n)$  より、 $g_k(z) = (z)_k$  for all  $k \in N(1, n)$  を得ます。したがって、 $g(z) = z$  となります。□

本質的な考え方は変わりませんので、次の2次元の図によってラベリングの定義式

$$l(x) = \max\{k \in N(1, n) : (x)_k > 0, g_k(x) \leq (x)_k\}, \quad \text{ただし } \max \emptyset = 0$$

の意味と証明の要点を解説します。

$g$  は自己写像ですから、境界の点の  $g$  による運動方向は必ず内側を向きます。最初に、底面の点を除いて下向きの運動成分を持つ点にラベル 2 を付けます。上面の点は必ず下向きの運動成分を持ちますから、上面の点にはすべてラベル 2 が付きます。底面にラベル 2 はありません。次に、左の面の点を除いて左向きの運動成分を持つ点にラベル 1 を付けます。右の面の点は必ず左向きの運動成分を持ちますから、右の面でラベル 2 のついていない点にはすべてラベル 1 が付きます。右の面のラベルは 1 以上です。左の面にラベル 1 はありません。残された点にはラベル 0 を付けます。ラベル 0 の点は上向きと右向きの運動成分を持ちます。ただし、ここでいう運動成分は運動成分 0 の場合を含みます。この操作ですべての点にラベル 0, 1, 2 が付き、このラベリング (左下の図) は明らかに Brouwer labeling です。この操作を 1 つの式で書いたものがラベリングの定義式です。



Theorem 3.4 によって右下の図の様に、2-fully labeled な 2-string が存在します。つまり、0, 1, 2 のすべてのラベルを持つ 3 点が  $\sqrt{2}/m$  の範囲に存在します。このときラベリングの定義から、ラベル 0 の点とラベル 1 の点は第 1 軸の方向の運動成分が逆向きです。第 1 成分の不動点が 2 点を結ぶ線分上に存在します。また、ラベル 0 の点とラベル 2 の点は第 2 軸の方向の運動成分が逆向きです。したがって、第 1 成分の不動点と第 2 成分の不動点が  $2\sqrt{2}/m$  の範囲に閉じ込められます。 $m$  をどんなに大きくしても (格子の間隔を小さくしても) この事情は変わりません。 $[0, 1]^n$  は compact ですから、ラベル 0 の点で作った点列はある  $z \in [0, 1]^n$  に収束する部分列を持ちます。ラベル 1, 2 の点で作った点列の同じ番号の項を選んだ部分列も同一の点  $z \in [0, 1]^n$  に収束します。当然各成分の不動点も  $z \in [0, 1]^n$  に収束します。 $z$  は  $g$  の不動点になります。

この節までの議論は、Brouwer の定理の証明をより簡潔に記述するために、string の議論を label の議論から明確に分けずに記述しました。string とその部分集合は、本来 label とは独立に議論できる対象です。次節では、この点に少しだけ留意していただければと思います。



## 5 Sperner のアイデアとその射程 (Brouwer's fixed point theorem の仮定の検討)

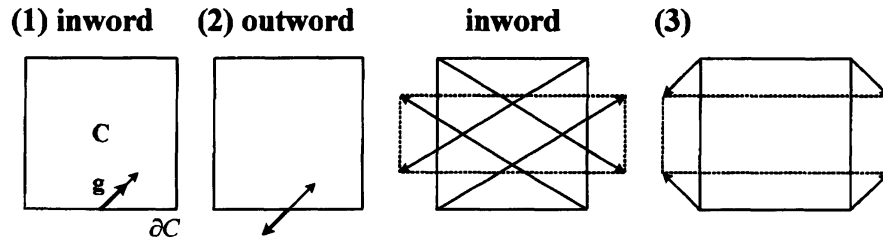
Brouwer's fixed point theorem は、適当に強い条件を仮定として持つために、使いやすい美しい定理となっています。この定理の仮定は、 $g$  の不動点が存在することを示すために、便利な条件ではありませんが必要な条件ではありません。本稿では、Brouwer's fixed point theorem の仮定が、 $g$  の不動点が存在するための、この定理では明示されていない、境界条件群の中の1つであるという立場をとります。通常次の様に記述される Brouwer's fixed point theorem の仮定を検討します。

$$C \subset \mathbb{R}^n : \text{compact, (convex)}, \quad g : C \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{continuous, } (g(C) \subset C).$$

ここで2つの条件についての疑問が浮かびます。1つは  $g(C) \subset C$  という条件です。証明に使用される条件は実質的に  $g(\partial C) \subset C$  という境界条件です。もう1つは  $C$  が convex(凸) という条件です。 $C$  が convex という仮定は位相的な条件ではありません。

### $C = [0, 1]^n$ 上の連続写像 $g$ の条件

$C = [0, 1]^n$  はそのままにして、連続写像  $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  の不動点が存在するための境界条件について議論します。 $g$  の条件を境界条件として捉える考え方は従来から存在していました。



(1) の inword と呼ばれる条件は、 $x \in \partial C$  について  $g(x) - x = \lambda(z - x)$  となるような  $\lambda > 0$  と  $z \in C$  が存在することです。左から3番目の図を見ると分かるように、この条件は  $g(\partial C) \subset C$  より緩い条件です。(2) の outword と呼ばれる条件は、 $x \in \partial C$  について  $g(x) - x = \lambda(z - x)$  となるような  $\lambda < 0$  と  $z \in C$  が存在することです。1次元で考えると、 $[0, 1]$  から  $\mathbb{R}$  への連続関数  $g$  の中間値の定理から導かれる不動点定理は、1次元 Brouwer's fixed point theorem (inword) と outword の2つケースで完結します(図6参照)。しかし2次元では、境界点が  $g$  によって、(3) の様な運動をする場合もやはり不動点が存在します。(3) は inword でも outword でもありません。inword とか outword の様な難しい用語を使用しなくても、これらを素朴に眺めれば、 $g$  によって向かい合った面が反対方向に運動していることが分かると思います。つまり、2次元の中間値の定理の条件とでも呼ぶべきものになります。整理すると、2組の向かい合った面が内部に向かって反対方向に運動をしているものが(1)、1組の向かい合った面が内部に向かって(1組の向かい合った面が外部に向かって)反対方向に運動をしているものが(3)、0組の向かい合った面が内部に向かって(2組の向かい合った面が外部に向かって)反対方向に運動をしているものが(2)ということになります。(3)には2種類の不動点定理が現れることも明らかだと思います。 $n$ 次元では、Brouwer's fixed point theorem と論理的に同等なこの種の不動点定理だけでも、 $g$  の境界条件によって  $(n+1)$  タイプ  ${}_n C_0 + \dots + {}_n C_n = 2^n$  個が存在します。この定理群の証明の要点を記述します。(3)は煩瑣ですので図に示した2次元のケース1つを扱います。

(1) 4節の Brouwer's fixed point theorem の証明が、そのままこのケースの証明になっています。

(2) 4節の Brouwer's fixed point theorem の証明でラベリングの定義を次の様に変更するだけです。

$$\ell(x) = \max\{k \in N(1, n) : (x)_k > 0, (x)_k \leq g_k(x)\}, \text{ where } \max \emptyset = 0.$$

(3) 4節の証明で、 $L_2$  から  $N(0, 2)$  へのラベリングを次の様な3つの step とするだけです。

(step 2)  $\ell(x) = 2$  if  $(x)_2 > 0$  and  $g_2(x) \leq (x)_2$ ,

(step 1)  $\ell(x) = 1$  if  $(x)_1 > 0$  and  $(x)_1 \leq g_1(x)$ ,

(step 0)  $\ell(x) = 0$  for other points in  $L_2$ .

**連続写像  $g$  と  $g$  の定義域  $C$  について**

冒頭に述べた様に、著者は Sperner のアイデアについて一般的に議論する学力を持ちませんので、 $R^2$  での Example を2つ示すことにします。

**Example I.**  $C_1 = [0, 1]^2$ ,  $C_2 = [1/8, 2/8]^2$  とします。

$C = C_1 - \text{Int}(C_2)$  とし、 $g$  を次の境界条件を満たす  $C$  から  $R^2$  への連続写像とします。

$$g(\partial C_1) \subset C_1, \quad g(\partial C_2) = (5/8, 0) + \partial C_2.$$

このとき、 $g(c) = c$  を満たす  $c \in C$  が存在します。 □

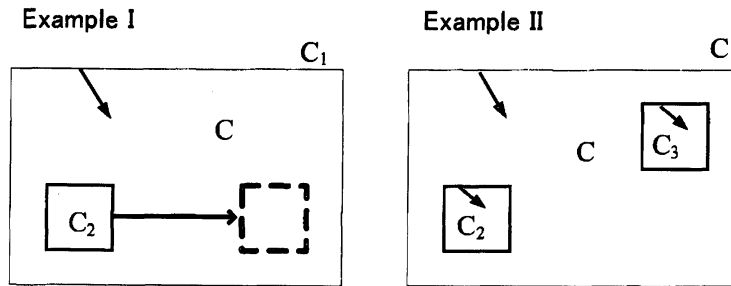
**Example II.**  $C_1 = [0, 1]^2$ ,  $C_2 = [1/8, 2/8]^2$ ,  $C_3 = [6/8, 7/8]^2$  とします。

$C = C_1 - (\text{Int}(C_2) \cup \text{Int}(C_3))$  とし、 $g$  を次の境界条件を満たす  $C$  から  $R^2$  への連続写像とします。

$$g(\partial C_1) \subset C_1, \quad g(\partial C_2) \subset C_2, \quad g(\partial C_3) \subset C_3.$$

このとき、 $g(c) = c$  を満たす  $c \in C$  が存在します。 □

Example I の  $C$  は1つ穴の開いた境界を含むトーラス、Example II の  $C$  は2つ穴の開いた境界を含むトーラスになります。 $g$  による境界の運動を図示すると次の様になります。



2つの Example の証明の要点を記述します。 $m = 2^k$ ,  $k \geq 3$  を固定し、3節と同じ様に  $C_1 = [0, 1]^2$  を  $m$  等分割し格子  $L_2$  を作ります。

*Remark 1.*  $m = 2^k$ ,  $k \geq 3$  とし次々に格子の間隔を半分にするのは、 $C_2, C_3$  の境界  $\partial C_2, \partial C_3$  が格子の上から外れないようにするためです。 $C_2$  と  $C_3$  を定義した数字も、境界が格子から外れないようにするためで、それ以上の意味はありません。

$L_2 \cap C$  から  $N(0, 2)$  への labeling  $\ell$  を次の様に定義します。

**Example I.**

For  $x \in \partial C_1 \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1, 2) : (x)_k > 0, g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ .

For  $x \in \partial C_2 \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1, 2) : (x)_k > 1/8, g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ .

For  $x \in \text{Int}(C) \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1, 2) : g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ . □

**Example II.**

For  $x \in \partial C_1 \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1,2) : (x)_k > 0, g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ .

For  $x \in \partial C_2 \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1,2) : (x)_k > 1/8, g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ .

For  $x \in \partial C_3 \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1,2) : (x)_k > 6/8, g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ .

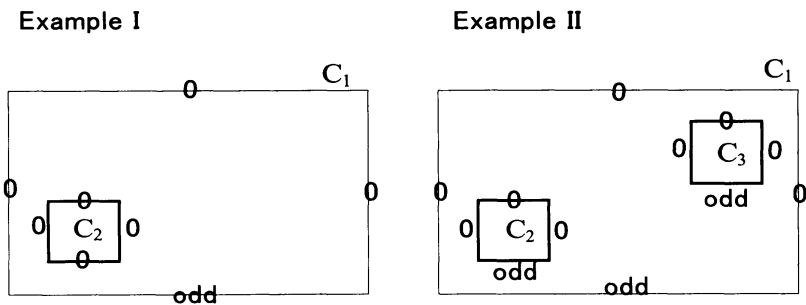
For  $x \in \text{Int}(C) \cap L_2$ ,  $\ell(x) = \max\{k \in N(1,2) : g_k(x) \leq (x)_k\}$ , where  $\max \emptyset = 0$ . □

4節の labeling との違いは、 $C$ の境界の点と $C$ の内点に別々にラベルを付けていることです。これは境界が置かれた位置が異なるため、本質的には4節と同種の labeling です。ラベルが同じ番号の点は、証明に必要な、 $g$ による運動成分は同じです。

$L_2$ の  $k$ -string を3節と同様に定義します。 $C_2 \cap L_2$ と $C_3 \cap L_2$ の ( $k$ -string) は $C_2, C_3$ の位置による変更を伴うものとします。 $C_2 \cap L_2$ と $C_3 \cap L_2$ の (1-string) は $L_2$ の 1-string ではありませんが、(2-string) は $L_2$ の 2-string となります。この (2-string) が 1-fully labeled な部分集合を含むとすれば1つだけです。 $C \cap L_2$ の 2-string を、Example I は  $\{L_2 \text{の 2-string}\} - \{C_2 \cap L_2 \text{の (2-string)}\}$  によって、Example II は  $\{L_2 \text{の 2-string}\} - \{C_2 \cap L_2 \text{の (2-string)}\} \cup \{C_3 \cap L_2 \text{の (2-string)}\}$  によって定義します。単に $C$ に含まれる $L_2$ の 2-string としない理由は、内部の境界の左上と右下にできる2つの異質な $L_2$ の 2-string を除外するためです(図6参照)。 $C$ に含まれる $L_2$ の 2-string  $B$ に、 $co(B) \subset C$ あるいは $B$ の2点を結ぶ線分が $C$ に含まれるという条件を要求しても構いませんが、議論が複雑になります。

**Example I.**  $\partial C_1 \cap L_2$ の labeling は本質的に Brouwer labeling です。 $\partial C_2 \cap L_2$ は右に $5/8$ 移動していますからラベル1を持ちません。 $\partial C_1 \cap L_2$ の底面について4節までとまったく同じ議論をすると、1-fully labeled な 1-string が奇数個存在することが分かります。 $\partial C_1 \cap L_2$ の他の面には 1-fully labeled な集合は存在しません。また、 $\partial C_2 \cap L_2$ に 1-fully labeled な集合は明らかに存在しません。 □

**Example II.**  $\partial C_1 \cap L_2, \partial C_2 \cap L_2, \partial C_3 \cap L_2$ の labeling は本質的に Brouwer labeling です。したがって4節までとまったく同じ議論で、 $\partial C_1 \cap L_2$ の底面には奇数個の 1-fully labeled な 1-string が、 $\partial C_2 \cap L_2, \partial C_3 \cap L_2$ の底面には奇数個の 1-fully labeled な (1-string) が存在し、他の面には 1-fully labeled な集合は存在しません。 □

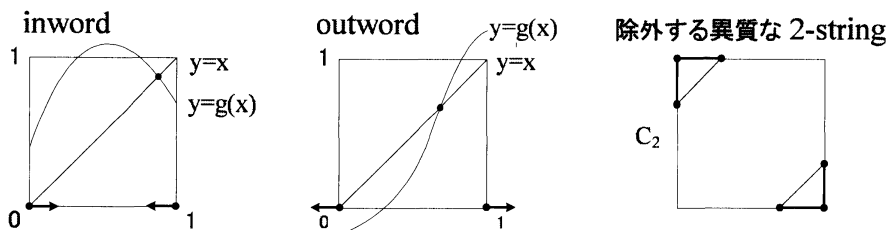


ここで確認したことは、 $\partial C \cap L_2$ 上であって $L_2$ の 2-string に含まれる 1-fully labeled な集合の数は、上の図のようになっていて総数は奇数個だということです。 $C_2$ を例にとると、 $\partial C_2 \cap L_2$ の 1-fully labeled な (1-string) は「2つの $L_2$ の 2-string に含まれ唯一つの $C_2 \cap L_2$ の (2-string) に含まれる」ことが分かり、これは、「唯一つの $C \cap L_2$ の 2-string に含まれる」ことを意味します。したがって、 $\partial C \cap L_2$ 上であって $C \cap L_2$ の 2-string に含まれる 1-fully labeled な集合は、唯一つの $C \cap L_2$ の 2-string に含まれます。Lemma 3.3 に相当する次の事項が成立します。

**Lemma 3.3** に対応する事項.  $C$  を Example I または Example II で定義されたものとします.  $l$  を  $C \cap L_2$  から  $N(0,2)$  への labeling とします.  $C \cap L_2$  の 2-string に含まれる  $\partial C \cap L_2$  上の 1-fully labeled な集合の数が奇数個ならば、2-fully labeled な  $C \cap L_2$  の 2-string の数も奇数個です。□

つまり、4 節までの議論よりやや複雑になることは避けられませんが、Sperner のアイデアは、 $C$  が convex でなくても  $\partial C \cap L_n$  の上にあって  $C \cap L_n$  の  $n$ -string に含まれる  $(n-1)$ -fully labeled な集合の数が奇数個であれば、 $g$  の不動点の存在を示す有効な手法を提供します。Example I と Example II の不動点の存在を示す、これ以降の議論は 4 節と同じです。

図 6：1 次元の中間値の定理から導かれる不動点定理, 除外する異質な 2-string



### Sperner のアイデアとその射程

$R^n$  の有界閉 (compact) 集合  $C$  から  $R^n$  への連続写像  $g$  が不動点を持つための  $C$  と  $g$  の条件を、Sperner のアイデアは広汎にカバーすると考えられます。これらの条件と、これによって導かれる多数の不動点定理の関係を、著者は中間値原理と呼んでいます。ここで考察した例はほんの一部です。本稿では、4 節までの議論がほとんどそのまま  $n$  次元まで適用できると思われる例だけを選びました。

これらの定理群の中で、Brouwer's fixed point theorem が有用で美しい定理であることは間違いがないと思います。その他の定理群を一般的に考察することは難しいかもしれません。しかし、物理的な要請や数理経済の要請などを考慮したとき、これらの定理群の中に有用なものが存在するのではないかと想像します。Sperner のアイデアは大きな研究分野を提供するかもしれません。

### References

- [1] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **71** (1912), 97–115.
- [2] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in J. Tannery (Ed.): *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Vol. 2, Hermann (1910), pp. 875–915.
- [3] E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), 265–272.
- [4] T. Stuckless, *Brouwer's fixed point theorem: Methods of proof and generalizations*, Thesis, Simon Fraser University (2003).  
available online at <http://oldweb.cecm.sfu.ca/Preprints03/preprints03.html>
- [5] T. Suzuki and Y. Takeuchi, "An easily verifiable proof of the Brouwer fixed point theorem", (2010)  
仮題・投稿予定.