数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 127-139

バナッハ空間における strongly relatively nonexpansive sequence について
(On strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

バナッハ空間における写像列に対し, strongly relatively nonexpansive sequence という概念を定義する. また, この性質を持つ写像列から定まる逐次近似列の漸近挙動を調べる. さらに, 得られた収束定理を単調作用素の零点問題と relatively nonexpansive 写像族の共通不動点問題に応用する.

1 はじめに

X をバナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{S_n\}$ を C 上の写像列で共通不動点集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ が空でないものとする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = S_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義される逐次近似列 $\{x_n\}$ が F の要素に収束するための十分条件を考察する. Bruck–Reich [9] は写像の強非拡大性を定義し, $\{S_n\}$ が一つの写像 $S\colon C \to C$ からなる列 $\{S, S, \dots\}$ である場合に, $\{x_n\}$ の漸近挙動を研究した. 最近になり, Aoyama–Kimura–Takahashi–Toyoda [2, 3] は写像列 $\{S_n\}$ に対する強非拡大性を定義し, 幾つかの適用例を考察することでその有用性を示した. この概念は, Bruck–Reich による強非拡大性を一般化するものである.

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

論文 [5] では, strongly relatively nonexpansive sequence という写像列 $\{S_n\}$ に対する概念を定義した. さらに, $\{S_n\}$ がこの性質を持つ場合について, 点列 $\{x_n\}$ の漸近挙動を考察するとともに, relatively nonexpansive 写像の共通不動点問題への応用を議論した. 本稿では論文 [5] で得られた結果の一部について解説する. また, 単調作用素の零点問題と relatively nonexpansive 写像の共通不動点問題への適用例を紹介する.

2 準備

本稿で取り扱う線型空間は全て実線型空間であるとする. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ で, それぞれ実数全体の集合及び正の整数全体の集合を表す. X をバナッハ空間とするとき, その双対空間を X^* で表す. また, $x^* \in X^*$ と $x \in X$ に対し, $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表すこともある. X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に強収束すること及び弱収束することを, それぞれ $x_n \to x$ 及び $x_n \rightharpoonup x$ で表す. X の部分集合 F のノルムの意味での内部を $\operatorname{int} F$ で表す. バナッハ空間の幾何学に関する用語については, 文献 [10, 15, 21, 22] に従う. なお, 滑らかなバナッハ空間 X から X^* への双対写像 J が点列的に弱連続であるとは, $\{x_n\}$ が X の点列で $x \in X$ に弱収束するとき, $\{Jx_n\}$ が Jx に汎弱収束することを言う.

X を滑らかなバナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. また,

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in X) \tag{2.1}$$

により関数 $\phi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を定める (*cf.* [1, 11]). 写像 $S\colon C \to X$ の不動点集合 $\{z \in C : Sz = z\}$ を $F(S)$ で表す. また, $z \in C$ が S の漸近的不動点であるとは, C の点列 $\{z_n\}$ で $z_n \rightharpoonup z$ かつ $\|Sz_n - z_n\| \to 0$ を満たすものが存在することを言う. S の漸近的不動点全体の集合を $\widehat{F}(S)$ で表す (*cf.* [16]). 写像 $S\colon C \to X$ に対する幾つかの定義を与える.

- S が (r) 型であるとは, $F(S) \neq \emptyset$ であり, 任意の $u \in F(S)$ と $x \in C$ について, $\phi(u, Sx) \leq \phi(u, x)$ が成り立つことを言う (*cf.* [4]).
- $\widehat{F}(S) = F(S)$ を満たす (r) 型の写像を relatively nonexpansive 写像と言う (*cf.* [13, 14]).
- S が (sr) 型であるとは, S が (r) 型であり, さらに, $\{z_n\}$ が C の有界点列で, $\phi(u, z_n) - \phi(u, Sz_n) \to 0$ がある $u \in F(S)$ について成り立つならば, $\phi(Sz_n, z_n) \to 0$ となることを言う (*cf.* [4]).
- $\widehat{F}(S) = F(S)$ を満たす (sr) 型の写像を strongly relatively nonexpansive 写像と言う (*cf.* [8, 12, 16]).

X がさらに狭義凸であれば, (r) 型の写像 $S\colon C \to X$ の不動点集合 $F(S)$ は閉凸集合となる (*cf.* [14]).

C を滑らかなバナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $\{S_n\}$ を C から X への写像列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ が空でないものとする. このとき, $\{S_n\}$ が strongly relatively nonexpansive sequence であるとは, 以下が成り立つことを言う (*cf.* [5]).

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, S_n は (r) 型である.
- $\{z_n\}$ が C の有界点列で, $\phi(u, z_n) - \phi(u, S_n z_n) \to 0$ がある $u \in F$ について成り立つならば, $\phi(S_n z_n, z_n) \to 0$ となる.

また, $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $\{z_n\}$ が C の有界点列で $\|S_n z_n - z_n\| \to 0$ を満たすとき, $\{z_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限が F に属することを言う. さらに, $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすとは, C の任意の空でない有界部分集合 B と $\mathbb{N}$ の任意の単調増加列 $\{n_i\}$ に対し, ある写像 $S\colon C \to E$ と $\{n_i\}$ の部分列 $\{n_{i_j}\}$ が存在し, $\widehat{F}(S) = F$ 及び

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{y\in B} \left\| S_{n_{i_j}} y - Sy \right\| = 0$$

が成り立つことを言う.

補足 2.1. C を滑らかなバナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $S\colon C \to X$ を不動点を持つ写像とする. このとき, 次が成り立つ.

- 写像列 $\{S, S, \dots\}$ が strongly relatively nonexpansive sequence であることは, S が (sr) 型であることと同値である.
- 写像列 $\{S, S, \dots\}$ が条件 (Z) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence であることは, S が strongly relatively nonexpansive 写像であることと同値である.

条件 (B) が満たされることは, 条件 (Z) が満たされるための十分条件である.

補題 2.2 ([5]). C を滑らかなバナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $\{S_n\}$ を C から X への写像列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ が空でないものとする. このとき, $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすならば, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たす.

C を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とするとき, 任意の $x \in X$ に対して, $\phi(z_x, x) = \min_{y\in C} \phi(y, x)$ を満たす $z_x \in C$ が一意に存在する. X から C 上への generalized projection Π_C は $\Pi_C(x) = z_x$ $(\forall x \in X)$ により定義される

(*cf.* [1,11]). よく知られているように, $(x,z) \in X \times C$ とするとき,

$$\begin{aligned} z = \Pi_C(x) &\Longleftrightarrow \sup_{y \in C} \langle y - z, Jx - Jz \rangle \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \phi(y,z) + \phi(z,x) \leq (y,x) \quad (\forall y \in C) \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ. また, $\Pi_C \colon X \to X$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(\Pi_C) = C$ が成り立つ. 特に, X がヒルベルト空間であれば, Π_C は X から C 上への距離射影と一致する.

関数 ϕ の定義 (2.1) により, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が滑らかなバナッハ空間 X の有界点列であるとき, $\|x_n - y_n\| \to 0$ であれば $\phi(x_n, y_n) \to 0$ が成り立つ. 次の補題は, X が一様凸であれば, その逆が成り立つことを主張する.

補題 2.3 ([11]). X を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を X の点列で $\phi(x_n, y_n) \to 0$ を満たすものとする. また, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の少なくとも一方は有界であるとする. このとき, $\|x_n - y_n\| \to 0$ となる.

次の補題も必要となる.

補題 2.4 ([5]). X を滑らかなバナッハ空間とし, F を X の空でない閉凸集合とする. $\{x_n\}$ を X の点列で,

$$\phi(u, x_{n+1}) \leq \phi(u, x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N},\, u \in F)$$

を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

(a) X が一様凸であれば, $\{\Pi_F(x_n)\}$ は強収束する.
(b) X^* が Fréchet 微分可能なノルムを持ち, $\operatorname{int} F$ が空でないならば, $\{x_n\}$ は強収束する.

補題 2.5 ([5,6]). C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とするとき, Π_C は X の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である.

3 Strongly relatively nonexpansive sequence に対する収束定理

条件 (Z) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence $\{S_n\}$ に対し, 次の収束定理が成り立つ.

定理 3.1 ([5]). X を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{S_n\}$ を C 上の写像列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ が空でないものとし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = S_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する. また, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(a) C がコンパクトであるか, $\operatorname{int} F$ が空でないならば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に強収束する.

(b) J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に弱収束する.

写像列 $\{S_n\}$ に対する仮定がどのように使われるかということを確認するため, (a) の証明の概略を述べる.

(a) の証明の概略. 点 $p \in F$ を任意に固定すると, 各 S_n は (r) 型であるので,

$$(\|p\| - \|x_{n+1}\|)^2 \leq \phi(p, x_{n+1}) = \phi(p, S_n x_n) \leq \phi(p, x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

となり, $\{\phi(p, x_n)\}$ の極限が存在すること及び $\{x_n\}$ の有界性が従う. よって,

$$\phi(p, x_n) - \phi(p, S_n x_n) \to 0$$

となる. $\{S_n\}$ は strongly relatively nonexpansive sequence であるので, $\phi(S_n x_n, x_n) \to 0$ となり, 補題 2.3 により $\|S_n x_n - x_n\| \to 0$ を得る. $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たすので, $\{x_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限は F に属する. また, (3.1) が任意の $p \in F$ について成り立つので, 補題 2.4 の (a) より $\Pi_F(x_n) \to z \in F$ となる.

C がコンパクトであるとき, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ で $u \in C$ に強収束するものがある. 上記の考察により, $u \in F$ となる. よって, generalized projection の基本性質 (2.2) より

$$\langle u - \Pi_F(x_n), Jx_n - J\Pi_F(x_n) \rangle \leq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

を得る. (3.2) において, $n = n_i$ として極限操作すると, $\langle u - z, Ju - Jz \rangle \leq 0$ となる. X は狭義凸でもあるため, $u = z$ が従う. よって, $x_n \to z = \lim_n \Pi_F(x_n)$ を得る.

次に, $\operatorname{int} F$ が空でない場合を考える. X の一様凸性から, X^* は一様に滑らかである. よって, 補題 2.4 の (b) より $\{x_n\}$ は強収束するので, 前者の場合と同様にして結論を得る. □

4 単調作用素に対する応用

本節では, 定理 3.1 を単調作用素の零点問題に適用する. X をバナッハ空間とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ とする. このとき, A の定義域, 値域及びグラフは

$$D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}, \quad R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax, \quad G(A) = \{(x, x^*) : x^* \in Ax\}$$

により定まる. 点 $z \in X$ が A の零点であるとは $Az \ni 0$ が成り立つことを言い, A の零点全体の集合を $A^{-1}0$ で表す. A が単調作用素であるとは,

$$(x, x^*), (y, y^*) \in G(A) \Longrightarrow \langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことを言う. 単調作用素 A が極大であるとは, $G(A) \subset G(B)$ かつ $A \neq B$ となる単調作用素 $B\colon X \to 2^{X^*}$ が存在しないことを言う. Rockafellar の定理 [17, 18] によって, proper で下半連続な凸関数 $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ の劣微分 $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ は極大単調となる. この場合, $(\partial f)^{-1}(0) = \{z \in X : f(z) = \inf f(X)\}$ となる.

C を滑らかな狭義凸バナッハ空間 X の空でない閉凸集合とし, $A\colon X \to 2^{X^*}$ を単調作用素で

$$D(A) \subset C \subset \bigcap_{\lambda > 0} J^{-1} R(J + \lambda A) \tag{4.1}$$

を満たすものとする. このとき, 各 $\lambda > 0$ について, $Q_\lambda^A x = (J + \lambda A)^{-1} Jx$ $(\forall x \in C)$ により定義される写像 Q_λ^A を A のリゾルベントと言う. Q_λ^A は一価写像であり, (4.1) によって C 上の写像となる. また, $F(Q_\lambda^A) = A^{-1}0$ が成り立つ. 特に, X がさらに回帰的であり, $A\colon X \to 2^{X^*}$ が極大単調であるとき, $R(J + \lambda A) = X^*$ が任意の $\lambda > 0$ について成り立つ (*cf.* [19, 22]). この場合, $C = X$ の下で (4.1) が成立し, $Q_\lambda^A\colon X \to X$ となる. 凸解析については文献 [22] を参照すると良い.

単調作用素のリゾルベントに関する次の性質は重要である.

補題 4.1 ([7]). X を滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $A\colon X \to 2^{X^*}$ を単調作用素で (4.1) を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ.

(a) 任意の $\lambda, \mu > 0$ と $x, y \in C$ について

$$\begin{aligned}
&\lambda\phi\left(Q_\lambda^A x, Q_\mu^A y\right) + \mu\phi\left(Q_\mu^A y, Q_\lambda^A x\right) + \mu\phi\left(Q_\lambda^A x, x\right) + \lambda\phi\left(Q_\mu^A y, y\right) \\
&\qquad \leq \lambda\phi\left(Q_\lambda^A x, y\right) + \mu\phi\left(Q_\mu^A y, x\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(b) X がさらに一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つとし, $\{\lambda_n\}$ を正の数列で $\inf_n \lambda_n > 0$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \rightharpoonup u$ 及び $\left\|Q^A_{\lambda_n} x_n - x_n\right\| \to 0$ を満たすならば, u は $A^{-1}0$ に属する.

補題 4.1 を用いると, 次を示すことができる.

補題 4.2. X を狭義凸バナッハ空間で一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つものとし, C を X の空でない閉凸集合とする. $A\colon X \to 2^{X^*}$ を単調作用素で (4.1) と $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たすものとし, $\{\lambda_n\}$ を正の数列で $\inf_n \lambda_n > 0$ を満たすものとする. このとき, C 上の写像列 $\{Q^A_{\lambda_n}\}$ は条件 (Z) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F\bigl(Q^A_{\lambda_n}\bigr) = A^{-1}0$ が成り立つ.

証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $F\bigl(Q^A_{\lambda_n}\bigr) = A^{-1}0$ であるので, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F\bigl(Q^A_{\lambda_n}\bigr) = A^{-1}0$ となる. また, $\{z_n\}$ が X の有界点列で,

$$\phi(u, z_n) - \phi\left(u, Q^A_{\lambda_n} z_n\right) \to 0$$

がある $u \in F$ について成り立つとすると, 補題 4.1 の (a) によって,

$$\phi\left(Q^A_{\lambda_n} z_n, z_n\right) \leq \phi(u, z_n) - \phi\left(u, Q^A_{\lambda_n} z_n\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって, $\phi\left(Q^A_{\lambda_n} z_n, z_n\right) \to 0$ となり, $\left\{Q^A_{\lambda_n}\right\}$ は strongly relatively nonexpansive sequence である.

また, $\{x_n\}$ を C の有界点列で $\left\|Q^A_{\lambda_n} x_n - x_n\right\| \to 0$ を満たすとものとし, $\{x_{n_i}\}$ をその部分列で $x_{n_i} \rightharpoonup z$ を満たすものとする. このとき, 明らかに $\inf_i \lambda_{n_i} > 0$ と

$$\left\|Q^A_{\lambda_{n_i}} x_{n_i} - x_{n_i}\right\| \to 0$$

が成り立つので, 補題 4.1 の (b) より $z \in F$ となる. よって, $\left\{Q^A_{\lambda_n}\right\}$ は条件 (Z) を満たす. □

定理 3.1 と補題 4.2 から次の収束定理を得る. この結果は, Rockafellar [20] によって証明された近接点法に関する収束定理の一般化である.

定理 4.3. X, C, A 及び $\{\lambda_n\}$ を補題 4.2 と同じものとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = Q^A_{\lambda_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する. このとき, 次が成り立つ.

(a) C がコンパクトであるか, $\mathrm{int}\, A^{-1}0$ が空でないならば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_{A^{-1}0}(x_n)$ に強収束する.

(b) J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_{A^{-1}0}(x_n)$ に弱収束する.

5 Relatively nonexpansive 写像の有限列に対する応用

次に, 定理 3.1 を relatively nonexpansive 写像の有限列に対する共通不動点問題に適用する. 本節では, $m \in \mathbb{N}$ 及び $K = \{0, 1, \ldots, m\}$ を仮定する. 次の補題が必要である.

補題 5.1 ([4]). X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ を C から X への relatively nonexpansive 写像の有限列で $F = \bigcap_{k=1}^{m} F(T_k)$ が空でないものとし, $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ を $(0,1)$ の有限数列で $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1$ が成り立つものとする. また,

$$V = J^{-1}\left(\lambda_0 J + \lambda_1 J T_1 + \cdots + \lambda_m J T_m\right)$$

とする. このとき, $V\colon C \to X$ と $\Pi_C V\colon C \to C$ は strongly relatively nonexpansive 写像であり, $F(V) = F(\Pi_C V) = F$ が成り立つ.

補題 5.2 ([5]). X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{T_n\}$ を C から X への (r) 型の写像の列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が空でないものとし, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1)$ の数列で $\inf_n \alpha_n > 0$ が成り立つものとする. このとき,

$$S_n = \Pi_C J^{-1}\left(\alpha_n J + (1-\alpha_n) J T_n\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で定義される写像列 $\{S_n\}$ は strongly relatively nonexpansive sequence であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = F$ が成り立つ.

補題 5.1 と補題 5.2 を用いて次を示す. なお, 証明には [5, §6] における手法を用いる.

補題 5.3. X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ を C から X への relatively nonexpansive 写像の有限列で $F = \bigcap_{k=1}^{m} F(T_k)$ が空でないものとし, $\{\lambda_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k \in K\}$ を $(0,1)$ の数列で次を満たすものとする.

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\sum_{k=0}^{m} \lambda_{n,k} = 1$ が成り立つ.
- 任意の $k \in K$ について, $\inf_n \lambda_{n,k} > 0$ が成り立つ.

このとき,

$$S_n = \Pi_C J^{-1}(\lambda_{n,0}J + \lambda_{n,1}JT_1 + \cdots + \lambda_{n,m}JT_m) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.1}$$

により定義される写像列 $\{S_n\}$ は条件 (B) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = F$ が成り立つ.

証明. まず, 補題 5.1 から $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = F$ となることが分かる. 次に,

$$U_n = J^{-1}\left(\frac{\lambda_{n,0}}{2-\lambda_{n,0}}J + \sum_{k=1}^{m}\frac{2\lambda_{n,k}}{2-\lambda_{n,0}}JT_k\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと, 補題 5.1 により, 各 $U_n\colon C \to X$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(U_n) = F$ が成り立つ. よって, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(U_n) = F \neq \emptyset$ である. また,

$$S_n = \Pi_C J^{-1}\left(\frac{\lambda_{n,0}}{2}J + \left(1 - \frac{\lambda_{n,0}}{2}\right)JU_n\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となることに注意する. そこで, 補題 5.2 を用いると, 写像列 $\{S_n\}$ は strongly relatively nonexpansive sequence となることが分かる.

次に, $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすことを示す. B を C の任意の空でない有界部分集合とし, $\{n_i\}$ を $\mathbb{N}$ の任意の単調増加列とする. 仮定より, $1 > \lambda_{n,k} \geq \inf_n \lambda_{n,k} > 0$ $(\forall k \in K = \{0, 1, \ldots, m\})$ であるので, $\{n_i\}$ の部分列 $\{n_{i_j}\}$ と正の数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ が存在し,

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{n_{i_j},k} = \lambda_k \quad (\forall k \in K)$$

が成り立つ. $\sum_{k=0}^{m} \lambda_{n,k} = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるので, $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1$ となる. そこで, 写像 $S\colon C \to C$ を

$$S = \Pi_C J^{-1}(\lambda_0 J + \lambda_1 JT_1 + \cdots + \lambda_m JT_m)$$

により定義する. 補題 5.1 を用いると, $\hat{F}(S) = F(S) = F$ となる. 以下で, T_0 を C 上の恒等写像とし,

$$V_n = J^{-1}\sum_{k=0}^{m} \lambda_{n,k}JT_k \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad V = J^{-1}\sum_{k=0}^{m}\lambda_k JT_k$$

により, C から X への写像列 $\{V_n\}$ と写像 $V\colon C \to X$ を定めると, $S_n = \Pi_C V_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 及び $S = \Pi_C V$ となる. $p \in F$ とすると, $k \in K$ と $y \in B$ につき, $(\|p\| - \|T_k y\|)^2 \leq$

$\phi(p, T_k y) \le \phi(p, y)$ となるため, $\{T_k y : k \in K,\ y \in B\}$ は有界である.

$$\begin{aligned}\sup_{y\in B}\left\|JV_{n_{i_j}}y - JVy\right\| &= \sup_{y\in B}\left\|\sum_{k=0}^{m}\lambda_{n_{i_j},k}JT_k y - \sum_{k=0}^{m}\lambda_k JT_k y\right\| \\ &\le \sum_{k=0}^{m}\left|\lambda_{n_{i_j},k} - \lambda_k\right| \cdot \sup_{y\in B}\|T_k y\| \to 0 \quad (j\to\infty)\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる. J^{-1} は X^* の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続であるので, (5.2) から

$$\sup_{y\in B}\left\|V_{n_{i_j}}y - Vy\right\| = \sup_{y\in B}\left\|J^{-1}JV_{n_{i_j}} - J^{-1}JVy\right\| \to 0 \quad (j\to\infty) \tag{5.3}$$

が従う. さらに, 補題 2.5 より, Π_C は X の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続であるので, (5.3) から

$$\sup_{y\in B}\left\|S_{n_{i_j}}y - Sy\right\| = \sup_{y\in B}\left\|\Pi_C V_{n_{i_j}}y - \Pi_C Vy\right\| \to 0 \quad (j\to\infty)$$

が従う. つまり, $\lim_j \sup_{y\in B}\left\|S_{n_{i_j}}y - Sy\right\| = 0$ が成り立つ. よって, $\{S_n\}$ は条件 (B) を満たす. □

定理 3.1, 補題 2.2 及び補題 5.3 から次の収束定理を得る.

定理 5.4. X, C, $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$, F 及び $\{\lambda_{n,k} : n \in \mathbb{N},\ k \in K\}$ を補題 5.3 と同じものとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(\lambda_{n,0}Jx_n + \lambda_{n,1}JT_1x_n + \cdots + \lambda_{n,m}JT_mx_n\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する. このとき, 次が成り立つ.

(a) C がコンパクトであるか, $\operatorname{int} F$ が空でないならば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に強収束する.

(b) J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に弱収束する.

6 Relatively nonexpansive 写像の可算族に対する応用

文献 [5] では, より一般的に relatively nonexpansive 写像の可算族に対し, 条件 (B) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence を構成する方法について議論した. ここでは, そこで得られた結果を紹介する.

補題 6.1 ([5]). X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{T_n\}$ を C から X への relatively nonexpansive 写像の列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が空でないものとする. $\{\lambda_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ を $(0,1)$ の数列で次を満たすものとする.

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$ が成り立つ.
- $\inf_n \lambda_{n,0} > 0$,
- $(0,1)$ の数列 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在し, $\lim_n \sum_{k=0}^{n} |\lambda_{n,k} - \lambda_k| = 0$ が成り立つ.

このとき,

$$S_n = \Pi_C J^{-1} (\lambda_{n,0} J + \lambda_{n,1} J T_1 + \cdots + \lambda_{n,n} J T_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

により定義される写像列 $\{S_n\}$ は条件 (B) を満たす strongly relatively nonexpansive sequence であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = F$ が成り立つ.

定理 3.1, 補題 2.2 及び補題 6.1 から次の収束定理を得る.

定理 6.2 ([5]). X, C, $\{T_n\}$, F, $\{\lambda_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ 及び $\{S_n\}$ を補題 6.1 と同じものとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = S_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって定義する. このとき, 次が成り立つ.

(a) C がコンパクトであるか, $\operatorname{int} F$ が空でないならば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に強収束する.

(b) J が点列的に弱連続であれば, $\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に弱収束する.

定理 6.2 において, $\{\lambda_{n,k} : n \in \mathbb{N},\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ を

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} 1/2^{k+1} & (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ 1/2^n & (k = n) \end{cases}$$

とすると次の系を得ることができる.

系 6.3 ([5]). X を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする. $\{T_n\}$ を C から X への relatively nonexpansive 写像の列で $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が空でないものとし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_2 = \Pi_C J^{-1} \left(\frac{J x_1 + J T_1 x_1}{2} \right),$$

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(\frac{1}{2}Jx_n + \frac{1}{4}JT_1x_n + \cdots + \frac{1}{2^n}JT_{n-1}x_n + \frac{1}{2^n}JT_nx_n\right) \quad (\forall n \geq 2)$$

により定義する．このとき，次が成り立つ．

(a) C がコンパクトであるか，$\operatorname{int} F$ が空でないならば，$\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に強収束する．

(b) J が点列的に弱連続であれば，$\{x_n\}$ は $\lim_n \Pi_F(x_n)$ に弱収束する．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[3] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[4] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[5] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[6] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[7] ———, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.

[8] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[9] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[10] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[13] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[14] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[15] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[16] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*,

Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[17] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[18] ———, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209-216.

[19] ———, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[20] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[21] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] ———, *Convex analysis & approximation of fixed points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).