

距離空間における不動点定理の 4 つの分類

九州工業大学

鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

距離空間における不動点定理の代表格は縮小写像の不動点定理である. この定理は「Banach の縮小原理」とも呼ばれる.

定理 1 (Banach [1], Caccioppoli [2]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の縮小写像 (contraction) とする. すなわち, $r \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $d(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$ を満たすとする. このとき, (A) が成立する.

(A) T は唯一つの不動点 $z \in X$ を持ち, 任意の $x \in X$ に対して $\{T^n x\}$ は z に収束する

この定理は様々な分野で応用され, また多くの拡張定理を持っている. 押しも押されもせぬ代表的な不動点定理である. 空間に距離構造しか入っていない為, 命題はとてもシンプルである. 特に, 命題の結論部分がシンプルであることに注目したい. 本稿では, 空間に距離構造しか入っていない不動点定理について取り扱う. すなわち, 線形構造や順序構造の入っていない純粋な距離空間のみを対象とする. 距離空間における不動点定理の中には複雑な仮定をする定理もあるが, 結論の部分はどの定理も非常にシンプルであり, 次の 4 タイプに分類できる.

- (T1) T は不動点を唯一つ持ち, $\{T^n x\}$ はその不動点に収束する
- (T2) T は不動点を唯一つ持つ ($\{T^n x\}$ の収束性は保証されない)
- (T3) $\{T^n x\}$ は不動点に収束する (不動点の唯一性は保証されない)
- (T4) T は不動点を持つ ($\{T^n x\}$ の収束性, および不動点の唯一性は保証されない)

この分類で考えると, 定理 1 は (T1) に属する.

本稿では, (T1)–(T4) について, 最近の結果を交えて論じる.

MSC (2000). 54H25.

キーワード. 距離空間, 不動点.

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.

電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

2. (T1)

定理 1 は距離空間における全不動点定理の代表格なので, (T1) を代表する不動点定理に自動的になる. Meir & Keeler の不動点定理 [10], Ćirić の不動点定理 [5] 等も (T1) に属するが, 後の議論展開を考え, ここでは次の 2 つを挙げる.

定理 2 (Edelstein [6]). (X, d) をコンパクト距離空間とし, T を X 上の写像とする. 任意の $x, y \in X$ に対して

$$x \neq y \implies d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, (A) が成立する.

定理 3 ([15]). 関数 $\theta: [0, 1) \rightarrow (1/2, 1]$ を

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq r \leq (\sqrt{5} - 1)/2 \\ (1 - r)r^{-2} & \text{if } (\sqrt{5} - 1)/2 \leq r \leq 2^{-1/2} \\ (1 + r)^{-1} & \text{if } 2^{-1/2} \leq r < 1 \end{cases}$$

と定義する. (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. $r \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \implies d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, (A) が成立する.

(T1) に関しては, 最近, 条件 (A) を特徴づける定理が得られている.

定理 4 ([16, 19]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. このとき, 条件 (A)–(C) はすべて同値である:

(B) 次の 2 条件を満たす:

- 任意の $x, y \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ と $\nu \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$d(T^i x, T^j y) < \varepsilon + \delta \implies d(T^{i+\nu} x, T^{j+\nu} y) < \varepsilon$$

を満たす

- 任意の $x, y \in X$ に対して, $\nu \in \mathbb{N}$ と数列 $\{\alpha_n\} \subset (0, \infty)$ が存在して, 任意の $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d(T^i x, T^j y) < \alpha_n \implies d(T^{i+\nu} x, T^{j+\nu} y) < 1/n$$

を満たす

- (C) τ -distance p と $r \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \neq y$ ならば $p(Tx, T^2x) \leq rp(x, Tx)$ と $p(Tx, Ty) < p(x, y)$ を満たす

この定理により, (T1) に属する不動点定理をこれ以上拡張することはできないことが分かる. なお, τ -distance に関しては [13, 14] 等を参照のこと. また, Leader の素晴らしい論文 [9] も参照されたい.

3. (T2)

「(T2) に属する定理はどのようなものだろうか」ということを考えていて, 筆者は最近次の定理を見つけた.

定理 5 ([18]). (X, d) をコンパクト距離空間とし, T を X 上の写像とする. 任意の $x, y \in X$ に対して

$$(1/2) d(x, Tx) < d(x, y) \implies d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, T は不動点を唯一つ持つ.

この定理は, 定理 2 と定理 3 を足し合わせてできたものである. 実際, 「 $x \neq y$ 」は「 $0 < d(x, Tx) < d(x, y)$ 」と同値であるし, $\lim_{r \rightarrow 1-0} \theta(r) = 1/2$ である. $\{T^n x\}$ の収束性について考えなければ, 定理 5 は定理 2 の拡張定理である. 以下は, 定理 5 の仮定を満たすが, $\{T^n x\}$ が収束しない例である. この例により, 定理 5 が (T2) に属することが分かる.

例 6 ([18]). $X = [-11, -10] \cup \{0\} \cup [+10, +11]$ とし, 写像 T を以下で定める.

$$Tx = \begin{cases} + \frac{11(-x) - 100}{(-x) - 9} & \text{if } x \in [-11, -10) \\ 0 & \text{if } x \in \{-10, 0, +10\} \\ - \frac{11x - 100}{x - 9} & \text{if } x \in (+10, +11] \end{cases}$$

このとき, T は定理 5 の仮定を満たす. しかし $y \notin \{-10, 0, +10\}$ のとき, $\{T^n y\}$ は収束しない.

定理 5 の応用は — その動機から容易に推察できるように — 今の所, ない. しかしながら, 思わぬ所に思わぬ応用があるのが科学の常であり, 「動機が変な分, 何かしら変わった面白い応用がそのうちできるのでは…」と期待している.

4. (T3)

次の定理は (T3) に属する.

定理 7 (Rus [11], Subrahmanyam [12]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. $r \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対して $d(Tx, T^2x) \leq r d(x, Tx)$ を満たすと仮定する. このとき, (D) が成立する.

(D) 任意の $x \in X$ に対して $\{T^m x\}$ は T の不動点に収束する

「この定理の証明は定理 1 の証明の一部である」という残念な特徴があるが、この定理が (T3) を代表する定理になるであろう。この残念な特徴があるために、(T3) 自体が一見無意味に思えてしまうかも知れないが、実は最近、(T3) に属する定理は盛んに研究されている。ただし、距離構造に加えて順序構造を仮定しているものが多いため、本稿ではこれ以上触れない。

条件 (A) と同様に、条件 (D) の特徴づけ定理も得られている。注意しておかねばならないのは、条件 (A) と (T1) は密接なものと言えるが、条件 (D) と (T3) の関係はそうではないということである。条件 (D) は (T1) と (T3) を合わせたものとの関係がある。

定理 8 ([18, 19]). (X, d) を完備距離空間とし、 T を X 上の写像とする。このとき、条件 (D)–(F) はすべて同値である:

(E) 次の 2 条件を満たす:

- 任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ と $\nu \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$d(T^i x, T^j x) < \varepsilon + \delta \implies d(T^{i+\nu} x, T^{j+\nu} x) < \varepsilon$$

を満たす

- 任意の $x, y \in X$ に対して、 $\nu \in \mathbb{N}$ と数列 $\{\alpha_n\} \subset (0, \infty)$ が存在して、任意の $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$d(T^i x, T^j y) < \alpha_n \implies d(T^{i+\nu} x, T^{j+\nu} y) < 1/n$$

を満たす

- (F) τ -distance p と $r \in (0, 1)$ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して $p(Tx, T^2x) \leq r p(x, Tx)$ と $p(Tx, Ty) \leq p(x, y)$ を満たす

条件 (B) と (E) の違い、条件 (C) と (F) の違いにも注目して頂きたい。この違いが条件 (A) と (D) の違いになる。

5. (T4)

Caristi & Kirk の不動点定理 [3, 4] は (T4) に属する。

定理 9 (Caristi [3], Caristi & Kirk [4]). (X, d) を完備距離空間とし、 T を X 上の写像とし、 f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数とする。任意の $x \in X$ に対して $d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$ を満たすと仮定する。このとき、 T は不動点を持つ。

$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$ という条件は非常に人工的に見えてしまうかも知れないが、定理 9 は、非常に有用な Ekeland の変分原理と同値な命題である。

定理 10 (Ekeland [7, 8]). (X, d) を完備距離空間とし、 f を X で定義された下半連続で、下から有界な実数値関数とする。このとき、 $f(u) \leq \inf f(X) + \alpha\beta$ を満たす $u \in X$, $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ に対して、以下を満たす $v \in X$ が存在する。

- $f(v) \leq f(u)$
- $d(u, v) \leq \alpha$
- $w \neq v \implies f(w) > f(v) - \beta d(v, w)$

6. 最後に

(T1) に属する定理は、結論が強いことにより、昔から使われてきた。一方、(T4) に属する定理は、仮定が弱いため、使い勝手がよい。距離構造に順序構造を入れた空間という設定で (T3) に属する定理は最近急速に発展している。そして、(T2) は生まれたばかりである。これら 4 タイプの不動点理論が今後どのように発展していくのか、興味のある所である。

参考文献

- [1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.
- [2] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **11** (1930), 794–799.
- [3] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., **215** (1976), 241–251. MR0394329
- [4] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975. MR0399968
- [5] Lj. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), 267–273. MR0356011
- [6] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., **37** (1962), 74–79. MR0133102
- [7] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353. MR0346619
- [8] ———, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474. MR0526967
- [9] S. Leader, *Equivalent Cauchy sequences and contractive fixed points in metric spaces*, Studia Math., **76** (1983), 63–67. MR0728197
- [10] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., **28** (1969), 326–329. MR0250291
- [11] I. A. Rus, *The method of successive approximations*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **17** (1972), 1433–1437. MR0322610

- [12] P. V. Subrahmanyam, *Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle*, J. Math. Phys. Sci., **8** (1974), 445–457. MR0358749
- [13] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458. MR1808147
- [14] ———, *Several fixed point theorems concerning τ -distance*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 195–209. MR2096951
- [15] ———, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1861–1869. MR2373618
- [16] ———, *A sufficient and necessary condition for the convergence of the sequence of successive approximations to a unique fixed point*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 4089–4093. MR2425751
- [17] ———, *Subrahmanyam's fixed point theorem*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 1678–1683. MR2524381
- [18] ———, *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 5313–5317. MR2560200
- [19] ———, *Convergence of the sequence of successive approximations to a fixed point*, Fixed Point Theory Appl., **2010** (2010), Article ID 716971, 1–14. MR2595834