

Anti-Loewner 行列について

山形大学大学院理工学研究科 日高 知佳良 (Chikara HIDAKA)
Graduate School of Science and Engineering,
Yamagata University

山形大学理学部数理科学科 佐野 隆志 (Takashi SANNO)
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science,
Yamagata University

この小論では [2] の概略を述べる. 詳細については [2], [1] を参照せよ.

まず定義などを簡単に説明する. n 次正方行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, $A \geq B$ を $\langle x, Ax \rangle \geq \langle x, Bx \rangle$ ($\forall x \in \mathbb{C}^n$) と定義する. $A \geq 0$ のとき A は *positive semidefinite* であるという.

$H^n := \{x = (x_i) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ とおく. エルミート行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ ($\forall x \in H^n$) をみたすとき *conditionally positive definite* であるという (略して c.p.d.). また $-A$ が c.p.d. であるとき *conditionally negative definite* であるという (略して c.n.d.).

$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ が *matrix monotone of order n (n -monotone)* とは, 可逆な positive semidefinite $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $A \geq B \implies f(A) \geq f(B)$ が成立することをいう.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して n -monotone であるとき *operator monotone* であるという.

相異なる $t_1, \dots, t_n > 0$ に対し

$$L_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) := \left[\frac{f(t_i) - f(t_j)}{t_i - t_j} \right]_{i,j=1}^n$$

を (f に関する) *Loewner 行列* といい, 次が成り立つ.

$$f : \text{operator monotone} \iff L_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0 : \text{distinct})$$

$$\iff f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{t}{\lambda + t} d\nu(\lambda)$$

$$(\alpha, \beta \geq 0, \nu : \text{positive measure on } (0, \infty))$$

$t_1, \dots, t_n > 0$ に対し

$$K_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) := \left[\frac{f(t_i) + f(t_j)}{t_i + t_j} \right]_{i,j=1}^n$$

を (f に関する) *anti-Loewner* 行列 という.

最近, Audenaert が次のような特徴付けを得た.

Theorem (Audenaert[1])

$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, C^1 とすると, 次は同値である.

- (a) $K_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0$: distinct).
- (b) $t \mapsto f(\sqrt{t})\sqrt{t}$ on $(0, \infty)$ は operator monotone.
- (c) $t \mapsto -\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ on $(0, \infty)$ は operator monotone.
- (d) $f(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t + \int_0^\infty \frac{t}{\lambda + t^2} d\nu(\lambda)$ ($\alpha, \beta \geq 0, \nu$: positive measure on $(0, \infty)$).

Proposition

$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, differentiable, $f(0) = f'(0) = 0$ とする.

$t_1, \dots, t_n > 0$ が任意に与えられたとき

$$K_{f(t)}(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \text{ c.n.d. } (\forall t_{n+1} > 0)$$

$$\implies K_{\frac{f(t)}{t^2}}(t_1, \dots, t_n) \geq 0$$

$$\implies K_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) \text{ c.n.d.}$$

が成り立つ.

この Proposition と Audenaert の特徴付けより次の Theorem を得る.

Theorem

$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, C^1 , $f(0) = f'(0) = 0$ とする.

次は同値である.

$$(a) K_{f(t)}(t_1, \dots, t_n) \text{ c.n.d. } (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0 : \text{distinct})$$

$$(b) K_{\frac{f(t)}{t^2}}(t_1, \dots, t_n) \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_i > 0 : \text{distinct})$$

このとき

$$f(t) = \beta t^3 + \int_0^\infty \frac{t^3}{\lambda + t^2} d\nu(\lambda)$$

$\beta \geq 0, \nu$: positive measure on $(0, \infty)$, である.

このとき, f は単調増加関数であるので逆関数を考えることができる.

ここで infinitely divisible の定義を述べる. $X = [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, $x_{ij} \geq 0$,
が $[x_{ij}^k] \geq 0 (\forall k > 0)$ をみたすとき X は *infinitely divisible* であるという.

Bapat の定理より次の事がわかる.

Corollary

$K_{f^{-1}}$ は infinitely divisible である.

参考文献

- [1] K. M. R. Audenaert, *A characterisation of anti-Löwner functions*, preprint.
- [2] C. Hidaka and T.Sano, *Conditional negativity of anti-Loewner matrices*, preprint.