数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 110-115

On finite termination of iterative methods

秋田県立大学 システム科学技術学部 松下 慎也* (Shin-ya Matsushita)
徐 粒 (Li Xu)
Department of Electronics and Information Systems
Akita Prefectural University

1 はじめに

本論文を通して H を実 Hilbert 空間とし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ を H の内積とノルム、$f: H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を下半連続な真凸関数とする。本論文では凸関数の最小化問題の解、つまり

$$f(u)=\min_{x\in H}f(x) \tag{1.1}$$

となる u を求める問題を考える。ここで、関数 f の劣微分 ∂f を以下のように定義する。

$$\partial f(x)=\{x^*\in H: f(y)\geq\langle y-x,x^*\rangle+f(x)\quad(\forall y\in H)\}\quad(x\in H). \tag{1.2}$$

このとき ∂f は集合値写像となり、(1.1) は次のように表すことができる。

$$0\in\partial f(u). \tag{1.3}$$

凸関数の劣微分の性質に焦点を当てることで、これまでに多くの求解法が提案されている ([12, 17, 4, 13, 11, 18, 19, 9, 20] 参照)。そのような求解法の 1 つに近接点がある。近接点法は、Martinet [12] によって提案され、Rockafellar [17] によって極大単調作用素の零点を求める手法として研究されている。近接点法は凸関数の最小化問題の他にも、変分不等式問題、相補性問題、均衡問題等、幅広い分野の問題に適用できる求解法として知られている。本研究では、近接点法が有限回の反復で問題 (1.1) の解に到達するための条件について考える。

近接点法は任意の初期点 $x_1\in H$ に対して、反復

$$x_{n+1}=(I+r_n\partial f)^{-1}(x_n) \tag{1.4}$$

によって点列 $\{x_n\}$ を生成する。ただし、$\{r_n\}$ は正の実数列とする。近接点法の収束について、Rockafellar [17] は以下の結果を示している。

定理 1.1 (Rockafellar [17, Theorem 1]) $\{x_n\}$ を近接点法 (1.4) によって生成された点列とする。ただし、$\{r_n\}$ は条件 $\liminf_{n\to\infty}r_n>0$ を満たす。このとき問題 (1.1) が少なくとも 1 つ解を持てば、$\{x_n\}$ は (1.1) のある解 u に弱収束する。

*e-mail : matsushita@akita-pu.ac.jp (〒 015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4)
url : http://web.sc.eis.akita-pu.ac.jp/~matsushita/

近接点法はその後 Banach 空間において詳しく研究されている ([11, 10] 参照)。一方、近接点法には必ずしも強収束しない例があり ([8, 3] 参照)、有限回の反復で解に到達することを保証するにはさらに条件を追加する必要がある。

Rockafellar [17] は劣微分 ∂f が条件 $0 \in \mathrm{int}\partial f(u)$ を満たせば近接点法が有限回で解に到達することを示した。ここで、$\mathrm{int}D$ は集合 D の内点をあらわす。この結果は Kassay [11] によって Banach 空間へ拡張されている。しかし、条件 $0 \in \mathrm{int}\partial f(u)$ が成り立つとき、u は問題 (1.1) の一意の解となるため、解が一意でない問題に対しても適用できる条件が好ましい。

一方、Ferris [7] は有限次元空間において凸計画問題に近接点法を適用し、点列が有限回で解に到達するための条件について研究した。Ferris は次の条件を用いて近接点法の収束について議論した：ある $\alpha > 0$ が存在し、

$$f(x) \geq f^* + \alpha d(x, S) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

が成り立つ。ここで S は問題 (1.1) の解集合、$f^* = f(u)$ $(u \in S)$、$d(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ とする。条件 (1.5) については [14, 5, 6] 等で詳しく研究されている。

本論文では Ferris の研究に動機付けられて、Hilber 空間において近接点法が有限回の反復で解に到達する条件について考える。

2 準備

C を H の空でない閉凸集合とする。このとき任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

を満たす C の点 x_0 が一意に存在する。H から C の上への距離射影 $P_C : H \to C$ を $P_C(x) = x_0$ $(x \in H)$ と定義する。距離射影には次のような性質がある ([1, 19] 参照)。

$$\langle y - P_C(x), x - P_C(x) \rangle \leq 0 \ (\forall y \in C). \tag{2.1}$$

$x \in C$ に対して

$$N_C(x) = \{u \in H : \langle y - x, u \rangle \leq 0 \ (\forall y \in C)\} \tag{2.2}$$

とする。関数 $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が真であるとは f の定義域 $D(f) = \{x \in H : f(x) \in \mathbb{R}\}$ が空でないことをいう。関数 f が凸であるとは、任意の $x, y \in H$ と $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

が成り立つことをいう。f が下半連続であるとは、任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in H : f(x) \leq r\}$$

が閉集合となることをいう。f を下半連続で真凸関数とする。このとき f の劣微分は (1.2) で定義される。$G(\partial f) = \{(x, x^*) \in H \times H : x^* \in \partial f(x)\}$ を ∂f のグラフという。∂f は極大単調作用素、つまり

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad (\forall (x, x^*), (y, y^*) \in G(\partial f)),$$

かつ

$$\langle x - a, x^* - a^* \rangle \geq 0 \quad (\forall (x, x^*) \in G(\partial f)) \quad \Rightarrow \quad (a, a^*) \in G(\partial f)$$

が成り立つ ([15, 19, 20] 参照)。また、

$$\partial f^{-1}(0) = \left\{ u \in H : f(u) = \min_{x \in H} f(x) \right\}$$

となる。下半連続な真凸関数 f に対して、任意の $x \in H$ と $r > 0$ に対して

$$x \in x_r + r\partial f(x_r) \tag{2.3}$$

を満たす $x_r \in H$ が一意に存在する ([16, 19, 20] 参照)。∂f の resolvent を $J_r(x) = x_r$ $(x \in H)$ と定義する。(2.3) より $J_r(x) = (I + r\partial f)^{-1}(x)$ となる。$Q_r = I - J_r$ とすると ∂f の単調性から

$$\|J_r(x) - J_r(y)\|^2 + \|Q_r(x) - Q_r(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (\forall x, y \in H) \tag{2.4}$$

が成り立つ。

次に条件 (1.5) を満たす具体例を考える。以下のような線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{目的関数} &: \langle c, x \rangle \longrightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件} &: x \in Q = \{y \in \mathbb{R}^n : A(y) \leq b\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで $c \in \mathbb{R}^n$、$b \in \mathbb{R}^m$、A は $m \times n$ 定数行列とする。問題 (2.5) の解集合を X^* とし、X^* は空でないとする。このとき、ある $\alpha > 0$ が存在して

$$\langle c, x \rangle \geq f^* + \alpha d(x, X^*) \quad (\forall x \in Q) \tag{2.6}$$

が成り立つ。ただし、$f^* = \langle c, u \rangle$ $(u \in X^*)$ とする。線形計画問題は解が存在すれば条件 (2.6) が成り立つ事が保証されている ([14] 参照)。ここで、指示関数 ([2, 20] 参照) を用いることで、条件 (2.6) は条件 (1.5) のように表すことができる。一方、条件 (1.5) には次のような特徴付けが得られている。

命題 2.1 (Burke and Deng [6]) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続な真凸関数、S を問題 (1.1) の解集合とする。このとき条件 (1.5) と以下の条件は同値である。

$$B(0, \alpha) \bigcap \left(\bigcup_{x \in S} N_S(x) \right) \subset \partial f(S), \tag{2.7}$$

ここで $B(x, \epsilon)$ は中心 x、半径 ϵ の閉球をあらわす。

3 主結果

下半連続な真凸関数の劣微分には次のような性質がある。

補助定理 3.1 $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続な真凸関数とし、$(x, x^*), (y, y^*) \in G(\partial f)$ とする。このとき

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y^*), (y, x^*) \in G(\partial f)$$

が成り立つ。

証明の概略
関数 f_0 を以下のように定義する。

$$f_0(z) = f(z) + \langle x - z, x^* \rangle \ (x \in H).$$

このとき $\partial f_0(z) = \partial f(z) - x^*$ $(z \in H)$ となる。したがって $0 \in \partial f_0(x)$。一方、仮定より

$$f(x) - f(y) \leq \langle x - y, x^* \rangle = \langle x - y, y^* \rangle \leq f(x) - f(y).$$

したがって $f_0(y) = f(y) + \langle x - y, x^* \rangle = f(x) = f_0(x)$ となる。これと $0 \in \partial f_0(x)$ より $0 \in \partial f_0(y)$、つまり $x^* \in \partial f(y)$ が成り立つ。同様にして $y^* \in \partial f(x)$ も示すことができる。 ■

補助定理 3.2 S を問題 (1.1) の解集合、$z \in H$ とする。また、$\lambda > 0$ とし、$y^* = \lambda(z - P_S(z))$ とおく。ただし、P_S は H から S の上への距離射影とする。このとき $y^* \in \partial f(w)$ となる $w \in S$ が存在すれば $y^* \in \partial f(P_S(z))$ が成り立つ。

証明の概略
(2.1) と補助定理 3.1 を用いれば比較的容易に確かめられる。 ■

補助定理 3.3 ある $\alpha > 0$ が存在して条件 (2.7) が成り立つとする。このとき $\|w^*\| < \alpha$ かつ $w^* \in \partial f(z)$ を満たす z が存在するならば $z \in S$ である。

証明の概略
$z \notin S$ とする。ここで $y^* = \alpha \frac{z - P_S(z)}{\|z - P_S(z)\|}$ とおく。N_S の定義と (2.1) より $y^* \in B(0, \alpha) \bigcap \left(\bigcup_{x \in S} N_S(x) \right)$ となる。条件 (2.7) と補助定理 3.2 から $y^* \in \partial f(P_S(z))$ となり、∂f の単調性から $0 \leq \langle z - P_S(z), w^* - y^* \rangle$ が成り立つ。これと y^* の定義から $\alpha \leq \|w^*\|$ となるが、これは仮定に矛盾する。したがって $z \in S$ が成り立つ。 ■

上記で示された補助定理を用いることで、近接点法が有限回で解に到達することを証明する。

定理 3.1 $\{x_n\}$ を近接点法 (1.4) で生成された点列とする。ただし、$\{r_n\}$ は条件 $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす。問題 (1.1) の解集合 S は空でないとする。このとき条件 (2.7) が成り立てば、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$x_n \in S \ (n \geq n_0)$ となる。

証明の概略
(1.4) より

$$\frac{1}{r_n}(x_n - x_{n+1}) \in \partial f(x_{n+1}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.1}$$

$u \in S$ とする。(2.4) より

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u\|^2 &\leq \|x_{n+1} - u\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 \\ &= \|J_{r_n}(x_n) - u\|^2 + \|(I - J_{r_n})(x_n)\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2\end{aligned}$$

となる。上記の不等式から $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$ が存在し、$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$ が成り立つ。条件 $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ と (3.1) より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n}(x_n - x_{n+1}) = 0$。したがって、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\|\frac{1}{r_n}(x_n - x_{n+1})\| < \alpha \ (\forall n \geq n_0)$ となる。補助定理3.3より $x_{n+1} \in S \ (\forall n \geq n_0)$ が示された。 ■

参考文献

[1] Alber, Y. I.: Metric and generalized projection operators in Banach spaces:properties and applications. in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos ed.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Marcel Dekker, New York, 15-50 (1996)

[2] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis.* John Wiley & Sons, New York 1984.

[3] H. H. Bauschke, J. V. Burke, F. R. Deutsch, H. S. Hundal and J. D. Vanderwerff, *A new proximal point iteration that converges weakly but not in norm*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 1829-1835.

[4] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329-345.

[5] J. V. Burke and M. C. Ferris, *Weak sharp minima in mathematical programming*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 1340-1359.

[6] J. V. Burke and S. Deng, *Weak sharp minima revisited, part I: basic theory*, Control & Cybernetics **31** (2002), 439-469.

[7] M. C. Ferris, *Finite termination of the proximal point algorithm*, Math. Program. **50** (1991), 359-366.

[8] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403-419.

[9] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226-240.

[10] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417-429.

[11] G. Kassay, *The proximal point algorithm for reflexive Banach spaces*, Studia Univ. Babes Bolyai Math. **30** (1985), 9-17.

[12] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Fran, caise Informat. Recherche Opérationnelle 4 (1970), 154-158.

[13] G. Morosanu. *Asymptotic behaviour of resolvent for a monotone set in a Hilbert space*, Atti Accad. Naz. Lincei **61** (1977), 565-570.

[14] B. T. Polyak, *Introduction to Optimization*, Optimization Software, Inc., Pulications, (1987).

[15] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209-216.

[16] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75-88.

[17] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. 14 (1976), 877-898.

[18] M.V. Solodov and B.F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189-202.

[19] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[20] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.