数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 90-96

Monotonicity of absolute norms and its applications
(Absolute ノルムの単調性とその応用) [1]

斎藤吉助 (新潟大学理学部)
三谷健一 (新潟工科大学工学部)
小室直人 (北海道教育大学旭川校)

1 序文

最近, $\mathbb{C}^2$ 上及び $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm について, 幾何学的性質の研究が活発に行われている. 2000 年, 斎藤–加藤–高橋 [10] において, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm における von Neumann-Jordan 定数を計算及び評価した. また, [9] の論文においては $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を $\Delta_n(=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:t_j\geq 0\ (\forall j),\ \sum_{j=1}^{n-1}t_j\leq 1\})$ 上のある条件を持つ凸関数と 1 対 1 に対応することを示し, さらにこの結果の応用として, $\mathbb{C}^n$ 上の狭義凸性 (strict convexity) を対応する凸関数を用いて特徴づけた. $\mathbb{C}^n$ 上の平滑性 (smoothness) については論文 [7] によって同様の考察が見られる.

また, absolute norm の凸関数による特徴づけの結果に関連して, 2 個又は n 個のバナッハ空間における ψ 直和の概念が導入された. これは ℓ_p 直和の概念の拡張の一つであることが知られている. バナッハ空間の ψ 直和空間における幾何学的性質の研究も同様に考察されている. 例えば, [2, 3, 8, 11] などがある.

本研究では, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm におけるノルムの単調性を考察する. 初めに, $\mathbb{C}^2$ の場合を考える. 2002 年, 高橋-加藤-斎藤 [11] は $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm 及び 2 個のバナッハ空間の ψ-直和空間の狭義凸性を調べる際に, absolute norm の単調性のある結果を特徴づけた.

本研究ではこの結果をより詳細に調べ, ノルムの単調性の結果を改良する. さらに, $\mathbb{C}^n$ 上の場合に対しても同様に行うとする. 応用として, $\mathbb{C}^2$ 上におけるノルムの単調性の特徴づけの結果を用いて, バナッハ空間の幾何学的定数を考察する.

[1]2000 *Mathematics Subject Classification*. 46B20.

Keywords. absolute normalized norm, monotonocity of norm, uniformly non-square

準備として, absolute norm の凸関数による特徴づけを述べる. $\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは,

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| = \|(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)\| \quad ((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n)$$

であるときを言う. また normalized であるとは,

$$\|(1, 0, \cdots, 0)\| = \|(0, 1, 0, \cdots, 0)\| = \cdots = \|(0, \cdots, 0, 1)\| = 1$$

であるときを言う. 例えば, ℓ_p-ノルム $\|\cdot\|_p$ は最も基本的な例である:

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} & \text{if } p = 1. \end{cases}$$

AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norm 全体とする. 2000 年, 斎藤-加藤-高橋 [9] は $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を Δ_n 上の連続凸関数を使って特徴づけた. 実際, 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して

$$\psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) = \|(1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i, s_1, \cdots, s_{n-1})\| \quad ((s_1, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n) \tag{1}$$

と定義する. このとき ψ は Δ_n 上の連続凸関数であり, 次の条件を満たす:

$$\begin{aligned} &\psi(0, 0, \cdots, 0) = \psi(1, 0, 0, \cdots, 0) = \psi(0, 1, 0, \cdots, 0) && (A_0) \\ &\quad = \cdots = \psi(0, \cdots, 0, 1) = 1, \\ &\psi(s_1, \ldots, s_{n-1}) \geq && (A_1) \\ &\quad (s_1 + \cdots + s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{s_1 + \cdots + s_{n-1}}, \cdots, \frac{s_{n-1}}{s_1 + \cdots + s_{n-1}}\right), \\ &\qquad\qquad \text{if } s_1 + \cdots + s_{n-1} \neq 0, \\ &\psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) \geq (1 - s_1)\psi\left(0, \frac{s_2}{1 - s_1}, \cdots, \frac{s_{n-1}}{1 - s_1}\right), \quad \text{if } s_1 \neq 1, && (A_2) \\ &\qquad \vdots && \vdots \\ &\psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) \geq (1 - s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{1 - s_{n-1}}, \cdots, \frac{s_{n-2}}{1 - s_{n-1}}, 0\right), \quad \text{if } s_{n-1} \neq 1. && (A_n) \end{aligned}$$

Ψ_n を Δ_n 上の連続凸関数であり, (A_0), (A_1), $\cdots$, (A_n) を満たす関数全体とする. 任意の $\psi \in \Psi_n$ に対して

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + \cdots + |x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1| + \cdots + |x_n|}, \cdots, \frac{|x_n|}{|x_1| + \cdots + |x_n|}\right) & \text{if } (x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0), \\ 0 & \text{if } (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0). \end{cases}$$

と定義する. このとき, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ であり, (1) を満たす. 従って, AN_n と Ψ_n は (1) の下で 1 対 1 対応である.

2 Absolute norm の単調性

初めに, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm の単調性を考える. 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して, 次が成り立つ:

$$|z| \leq |u|,\ |w| \leq |v| \Rightarrow \|(z,w)\| \leq \|(u,v)\|.$$

証明は容易である. 実際, $0 \leq z \leq u$ かつ $w \geq 0$ とすると, $z = (1-\lambda)(-u) + \lambda u$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ と表すことができる. よって

$$\|(z,w)\| \leq (1-\lambda)\|(-u,w)\| + \lambda\|(u,w)\|.$$

$\|\cdot\|$ は absolute より, $\|(z,w)\| \leq \|(u,w)\|$. 他も同様である.

また,

$$|z| < |u|,\ |w| < |v| \Rightarrow \|(z,w)\| < \|(u,v)\|.$$

も成立する. これは, $|z| < \lambda|u|,\ |w| < \lambda|v|$ なる $\lambda(0 < \lambda < 1)$ をとれば, 容易に示すことができる.

ところが, 高橋-加藤-斎藤 [11] にあるように, 一般の $\psi \in \Psi_2$ に対して次は成り立たない:

$|z| \leq |u|,\ |w| \leq |v|$ とする. $|z| < |u|$ または $|w| < |v|$ ならば,

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi. \tag{2}$$

例えば, (2) は $\psi = \psi_p (1 \leq p < \infty)$ のとき成立するが, $\psi = \psi_\infty$ のときは成立しない.

高橋-加藤-斎藤 [11] は (2) を満たすための ψ の必要十分条件を与えた.

定理 1 ([11]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > t$.

(ii) $\psi(t)/t$ は $(0,1]$ 上狭義単調減少.

(iii) $|z| < |u|,\ |w| \leq |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

定理 2 ([11]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > 1-t$.

(ii) $\psi(t)/(1-t)$ は $[0,1)$ 上狭義単調増加.

(iii) $|z| \leq |u|,\ |w| < |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

定理 3 ([11]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 < t < 1$ なる任意の t に対して $\psi(t) > \psi_\infty(t)$.

(ii) $|z| \leq |u|, |w| < |v|$ または $|z| < |u|, |w| \leq |v|$ ならば $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

我々は上記の単調性の結果を次のように改良した.

定理 4 ([6]) $\psi \in \Psi_2$ とし, $1/2 \leq t_0 \leq 1$ とする. このとき次は同値:
(i) 任意の $0 < t < t_0$ なる t に対して $\psi(t) > t$. また任意の $t_0 \leq t \leq 1$ なる t に対して $\psi(t) = t$.
(ii) $\psi(t)/t$ は $(0, t_0)$ 上狭義単調減少. また任意の $t_0 \leq t \leq 1$ なる t に対して $\psi(t)/t = 1$.
(iii) $|z| < |u|$ とする. $\frac{|w|}{|u|+|w|} < t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(u,w)\|_\psi.$$

また $\frac{|w|}{|u|+|w|} \geq t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi = \|(u,w)\|_\psi.$$

定理 5 ([6]) $\psi \in \Psi_2$ とし, $0 \leq t_0 \leq 1/2$ とする. このとき次は同値:
(i) 任意の $t_0 < t < 1$ なる t に対して $\psi(t) > 1 - t$. また任意の $0 \leq t \leq t_0$ なる t に対して $\psi(t) = 1 - t$.
(ii) $\psi(t)/(1-t)$ は $(t_0, 1)$ 上狭義単調増加. また任意の $0 \leq t \leq t_0$ なる t に対して $\psi(t)/(1-t) = 1$.
(iii) $|w| < |u|$ とする. $\frac{|v|}{|z|+|v|} > t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi < \|(z,v)\|_\psi.$$

$\frac{|v|}{|z|+|v|} \leq t_0$ ならば

$$\|(z,w)\|_\psi = \|(z,v)\|_\psi.$$

$\mathbb{C}^n$ 上に対しても同様に行う.

定理 6 $\psi \in \Psi_n$ とし, $s_1 + \cdots + s_{n-1} = 1$ なる $(s_1, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n$ とおく. このとき次は同値:
(i) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda < \lambda_0 &\Rightarrow \psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{n-1}) > \lambda \psi(s_1, \cdots, s_{n-1}), \\ \lambda_0 \leq \lambda \leq 1 &\Rightarrow \psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{n-1}) = \lambda \psi(s_1, \cdots, s_{n-1}). \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$f(\lambda) := \frac{\psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{n-1})}{\lambda}$$

は $(0, \lambda_0]$ 上狭義単調増加であり, $(\lambda_0, 1]$ 上において $f(\lambda) = \psi(s_1, \cdots, s_{n-1})$.

(iii) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$0 \leq p_1 < a_1,\ \frac{p_2 + \cdots + p_n}{a_1 + p_2 + \cdots + p_n} < \lambda_0 \Rightarrow \|(p_1, p_2, \cdots, p_n)\|_\psi < \|(a_1, p_2, \cdots, p_n)\|_\psi,$$

$$0 \leq p_1 < a_1,\ \frac{p_2 + \cdots + p_n}{a_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq \lambda_0 \Rightarrow \|(p_1, p_2, \cdots, p_n)\|_\psi = \|(a_1, p_2, \cdots, p_n)\|_\psi.$$

定理 7 $\psi \in \Psi_n$ とし, また $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $(s_1, \cdots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n$ とする. このとき次は同値:

(i) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$\begin{aligned}
&0 \leq \lambda < \lambda_0 \\
&\Rightarrow \psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{i-1}, 1-\lambda, \lambda s_{i+1}, \cdots, \lambda s_{n-1}) > \lambda \psi(s_1, \cdots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \cdots, s_{n-1}), \\
&\lambda_0 \leq \lambda \leq 1 \\
&\Rightarrow \psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{i-1}, 1-\lambda, \lambda s_{i+1}, \cdots, \lambda s_{n-1}) = \lambda \psi(s_1, \cdots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \cdots, s_{n-1}).
\end{aligned}$$

(ii) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$f(\lambda) := \frac{\psi(\lambda s_1, \cdots, \lambda s_{i-1}, 1-\lambda, \lambda s_{i+1}, \cdots, \lambda s_{n-1})}{\lambda}$$

は $(0, \lambda_0]$ 上狭義単調増加であり, $(\lambda_0, 1]$ 上において

$$f(\lambda) = \psi(s_1, \cdots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \cdots, s_{n-1}).$$

(iii) $0 \leq \lambda_0 < 1$ なる λ_0 が存在し,

$$\begin{aligned}
&0 \leq p_i < a_i, \frac{p_1 + \cdots + p_{i-1} + p_{i+1} + \cdots + p_n}{p_1 + \cdots + p_{i-1} + a_i + p_{i+1} + \cdots + p_n} \leq \lambda_0 \\
&\Rightarrow \|(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)\|_\psi < \|(p_1, \cdots, p_{i-1}, a_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)\|_\psi, \\
&0 \leq p_i < a_i, \frac{p_1 + \cdots + p_{i-1} + p_{i+1} + \cdots + p_n}{p_1 + \cdots + p_{i-1} + a_i + p_{i+1} + \cdots + p_n} > \lambda_0 \\
&\Rightarrow \|(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)\|_\psi = \|(p_1, \cdots, p_{i-1}, a_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)\|_\psi.
\end{aligned}$$

3 Absolute norm の単調性の応用

X をバナッハ空間とする. また, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく. このとき

$$\rho_X(t) = \sup\{\frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\}$$

を X の modulus of smoothness と言う. Yang-Wang[12] はバナッハ空間 X 上の幾何学的定数 γ_X を導入した:

$$\gamma_X(t) = \sup\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\}.$$

本章では, これらの定数を一般化したバナッハ空間上の幾何学的定数 $\gamma_{X,\psi}$ を導入する.

バナッハ空間 X, Y と $\psi \in \Psi_2$ に対し, 次のノルムを持つ X, Y の直和空間をバナッハ空間 X, Y の ψ-直和といい, $X \oplus_\psi Y$ と表す:

$$\|(x,y)\|_\psi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\psi \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

このとき, バナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対し, [0,1] 上の関数 $\gamma_{X,\psi}$ を以下のように定義する:

$$\gamma_{X,\psi}(t) = \sup\left\{\|(x+ty, x-ty)\|_\psi : x, y \in S_X\right\}.$$

明らかに,

$$\gamma_{X,\psi_1}(t) = 2(\rho_X(t) + 1).$$

ここで ψ_1 は ℓ_1-ノルムに対応する関数である. また

$$\gamma_{X,\psi_2}(t) = \sqrt{2\gamma_X(t)}.$$

ここで ψ_2 は ℓ_2-ノルムに対応する関数である.

定義 8 バナッハ空間 X が一様 *non-square* であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|(x-y)/2\| \geq 1-\delta$ なる $x, y \in S_X$ ならば $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$ であるときを言う.

定理 4 及び定理 5 を用いることにより, 以下の結果を導くことができる.

定理 9 **([6])** X をバナッハ空間, $\psi \in \Psi_2$ とする. また $\psi \neq \psi_\infty$ とする. このとき次は同値:

(i) X が一様 non-square.

(ii) 任意の $0 < t \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t) < 2(1+t)\psi(\frac{1}{2})$.

(iii) ある $0 < t_0 \leq 1$ に対して $\gamma_{X,\psi}(t_0) < 2(1+t_0)\psi(\frac{1}{2})$.

参考文献

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[2] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity, J. Austral. Math. Soc. 75 (2003) 413–422.

[3] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, Uniform non-squareness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004) 429–437.

[4] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ-direct sums, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 898–907.

[5] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A new geometrical constant and ψ-direct sums of Banach spaces, Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces II, Yokohama Publishers, (2008) 385–391.

[6] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, A new geometrical constant of Banach spaces and the uniform normal structure, Commentationes Mathematicae, 49 (2009), 3–13.

[7] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, T. Suzuki, Smoothness of absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Convex Anal. 10, No.1, (2003) 89–107.

[8] K.-S. Saito and M. Kato, Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 1–11.

[9] K.-S. Saito, M. Kato and Y, Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000) 879–905.

[10] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. 244 (2000) 515–532.

[11] Y. Takahashi, M. Kato and K.-S. Saito, Strict convexity of absolute normes on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces, J. Inequal. Appl. 7 (2002) 179–186.

[12] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 555–565.