数理解析研究所講究録
第 1756 巻 2011 年 1-12

Tridiagonal pair と Drinfel'd polynomial

金沢大学 数物科学系　伊藤達郎 (Tatsuro Ito)
Division of Mathematical and Physical Sciences
Kanazawa University

代数的組合せ論の中心問題のひとつに P- and Q-polynomial association scheme の分類がある．P- and Q-polynomial association scheme の局所構造を調べるための道具として導入されたのが Terwilliger 代数である．Terwilliger 代数の既約表現の決定は tridiagonal pair の分類に帰着する [2]. generic case における tridiagonal pair の分類が最近解決した [8].

Terwilliger 代数は P- and Q-polynomial association scheme に附随した有限次元代数で, その局所的組合せ構造を反映している. 従ってその既約表現から得られる tridiagonal pair も様々な個々の局所的組合せ構造を担っている. それにもかかわらず, 個々の P- and Q-polynomial association scheme には依存しないある普遍的な無限次元代数 $\mathcal{A}$ があって, 任意の tridiagonal pair はこの無限次元代数 $\mathcal{A}$ の有限次元既約表現から得られるという事実がある [2].

$\mathcal{A}$ の任意の有限次元既約表現は, $\mathcal{A}$ を $U_q(sl_2)$–loop 代数に埋め込み，この埋め込みを用いて具体的に構成することができる．この構成において主要な役割を果たすのが Drinfel'd polynomial である．ここでいう Drinfel'd polynomial は, $\mathcal{A}$ の有限次元既約表現に対して定義されるもので，ある意味で, $U_q(sl_2)$–loop 代数の有限次元既約表現に現れるところのオリジナルなものの一般化となっている.

$\mathcal{A}$ の有限次元既約表現については, Onsager 代数の q 類似という観点から [1] で概要を述べた．本稿では $\mathcal{A}$ を離れて, Drinfel'd polynomial と tridiagonal pair の関係を [1] で述べ残した部分を補いながら，ある種の character formula を目標にして直接的に論じる．詳しくは [2]〜[8] を読んでいただきたい.

1 Tridiagonal pair

$\mathcal{X}$ を P- and Q-polynomial association scheme, T をその Terwilliger 代数とすると, T は標準的生成元 A, A^* で生成される. V を既約な T-加群とすると, A, A^* は V 上 tridiagonal pair (TD-pair) をなす. $A|_V$, $A^*|_V$ で生成される End (V) の部分代数は大雑把な言い方をすれば, q-Onsager 代数の準同型像となる. TD-pair の定義は以下で行うが, 大事なことは, T は個々の P- and Q-polynomial association scheme $\mathcal{X}$ に依存するが, その既約表現は q-Onsager 代数という普遍的な無限次元代数の有限次元既約表現から得られ, その有限次元既約表現は Drinfel'd polynomial によって支配されるという事実である. 本稿では, P- and Q-polynomial association scheme, Terwilliger 代数, q-Onsager 代数などは表に出さず (従ってそれらの定義も行わず), TD-pair が Drinfel'd polynomial にどのように支配されるのかを直接的に解説する.

定義 1 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, A, A^* を対角化可能な V の線形変換とする. $\langle A, A^*\rangle$ を A, A^* によって生成される End(V) の部分代数とし, V は $\langle A, A^*\rangle$-加群として既約と仮定する. A の固有空間 $\{V_i\}_{i=0}^{d}$ と A^* の固有空間 $\{V_i^*\}_{i=0}^{d^*}$ に次の条件 (i), (ii) を充たすような順序が入るとき A, A^* を V 上の *tridiagonal pair* (TD-pair) という:

(i) $A^*V_i \subseteq V_{i-1} + V_i + V_{i+1} \quad (0 \le i \le d)$, ここで $V_{-1} = 0$, $V_{d+1} = 0$.

(ii) $AV_i^* \subseteq V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^* \quad (0 \le i \le d^*)$, ここで $V_{-1}^* = 0$, $V_{d^*+1}^* = 0$.

TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ と TD-pair $B, B^* \in \mathrm{End}(V')$ が同型であるとは, 線形空間としての同型写像 $\psi : V \to V'$ が存在して $B\psi = \psi A$, $B^*\psi = \psi A^*$ が成り立つときをいう.

注意 1 TD-pair A, A^* について次のことが成り立つ.

(1) $d = d^*$ である. すなわち A, A^* は同じ個数の固有値を持つ. この d を TD-pair A, A^* の直径という.

(2) A の固有空間 $\{V_i\}_{i=0}^{d}$ の順序付けで定義の条件 (i) を充たすものは, $d \ge 1$ なら丁度2つあり, そのうちのひとつを $V_0, V_1, \cdots, V_d$ とすると, もうひとつはその逆順序 $V_d, V_{d-1}, \cdots, V_0$ である. 同じことが, A^* の固有空間 $\{V_i^*\}_{i=0}^{d}$ の順序付けで定義の条件 (ii) を充たす

ものについても成立する．以下特に断らない限り，A の固有空間と A^* の固有空間には定義の条件 (i), (ii) をみたす順序がそれぞれひとつ固定されているものとする．

以下，$A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ を TD-pair とし，A の V_i 上の固有値を θ_i, A^* の V_i^* 上の固有値を θ_i^* とする $(0 \leq i \leq d)$．このとき当然

$$(\sharp)_0 \begin{cases} \theta_i & \neq & \theta_j & (0 \leq i \leq d,\ i \neq j), \\ \theta_i^* & \neq & \theta_j^* & (0 \leq i \leq d,\ i \neq j) \end{cases}$$

であるが，さらにある β, γ, $\gamma^* \in \mathbb{C}$ が存在して

$$(\sharp) \begin{cases} \theta_{i+1} - \beta\theta_i + \theta_{i-1} & = & \gamma & (1 \leq i \leq d-1), \\ \theta_{i+1}^* - \beta\theta_i^* + \theta_{i-1}^* & = & \gamma^* & (1 \leq i \leq d-1) \end{cases}$$

が成り立つ．

V の部分空間 U_i を

$$U_i = (V_0^* + \cdots + V_i^*) \cap (V_i + \cdots + V_d)$$

により定めると，V は U_i 達の直和となる:

$$V = \bigoplus_{i=0}^{d} U_i.$$

これを split decomposition あるいはウェイト空間分解と呼ぶ．

$$V_0^* + V_1^* + \cdots + V_i^* = U_0 + U_1 + \cdots + U_i \quad (0 \leq i \leq d),$$
$$V_i + V_{i+1} + \cdots + V_d = U_i + U_{i+1} + \cdots + U_d \quad (0 \leq i \leq d)$$

が成立している．また, TD-pair の定義より

$$(A - \theta_i)U_i \ \subseteq \ U_{i+1} \qquad (0 \leq i \leq d),$$
$$(A^* - \theta_i^*)U_i \ \subseteq \ U_{i-1} \qquad (0 \leq i \leq d)$$

が成り立つ $(U_{-1} = U_{d+1} = 0)$．

F_i を $V = \bigoplus_{i=0}^{d} U_i$ から U_i への射影, E_i, E_i^* をそれぞれ $V = \bigoplus_{i=0}^{d} V_i$ から V_i への射影, $V = \bigoplus_{i=0}^{d} V_i^*$ から V_i^* への射影とする．このとき写像

$$F_i|_{V_i} : \ V_i \longrightarrow U_i,$$
$$E_i|_{U_i} : \ U_i \longrightarrow V_i$$

は全単射で互いの逆写像となる．同様に写像

$$F_i|_{V_i^*}:\ V_i^* \longrightarrow U_i,$$
$$E_i^*|_{U_i}:\ U_i \longrightarrow V_i^*$$

は全単射で互いの逆写像となる．このことより

$$\dim V_i = \dim U_i = \dim V_i^* \quad (0 \le i \le d)$$

が成り立つ．更に A の固有空間 $\{V_i\}_{i=0}^d$ の順序付けを逆転することにより

$$\dim V_{d-i} = \dim V_i^* \quad (0 \le i \le d)$$

を得る (Terwilliger's trick!).

V の線形変換 R, L を

$$R = A - \sum_{i=0}^{d} \theta_i F_i,$$
$$L = A^* - \sum_{i=0}^{d} \theta_i^* F_i$$

によって定義し，それぞれ raising map, lowering map と呼ぶ．実際

補題 1 $RU_i \subseteq U_{i+1},\quad LU_i \subseteq U_{i-1} \quad (0 \le i \le d)$

が成り立つ ($U_{-1} = U_{d+1} = 0$)．特に R, L は冪零な線形変換である．

命題 1 写像

$$R^{j-i}|_{U_i}:\ U_i \longrightarrow U_j$$

は $i+j \le d$ のとき単射, $i+j \ge d$ のとき全射, $i+j = d$ のとき全単射である ($0 \le i < j \le d$). 写像

$$L^{j-i}|_{U_i}:\ U_j \longrightarrow U_i$$

は $i+j \ge d$ のとき単射, $i+j \le d$ のとき全射, $i+j = d$ のとき全単射である ($0 \le i < j \le d$).

系 1 次元の列 $\{\dim U_i\}_{i=0}^d$ は対称かつ unimodal である:

$$\dim U_i = \dim U_{d-i} \quad (0 \le i \le d),$$
$$\dim U_0 \le \dim U_1 \le \dim U_2 \le \cdots \ge \dim U_{d-2} \ge \dim U_{d-1} \ge \dim U_d.$$

次の定理は shape conjecture と呼ばれていたもので，この予想の解決により TD-pair の分類が始まったといってよい．

定理 1　TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ のウェイト空間分解を $V = \bigoplus_{i=0}^{d} U_i$ とすると

$$\dim U_i \leq \binom{d}{i}.$$

特に $\dim U_0 = 1$ である．

定義 2　TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ が $\dim U_i = 1 \ \ (0 \leq i \leq d)$ をみたすとき *Leonard pair* という．

定義 3　TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ のウェイト空間分解を $V = \bigoplus_{i=0}^{d} U_i$ とする．補題 1 と定理 1 により，$L^i R^i$ は U_0 上にスカラーとして作用する．このスカラーを σ_i とおく：

$$L^i R^i|_{U_0} = \sigma_i \in \mathbb{C}.$$

注意 2　上で定義した数列 $\{\sigma_i\}_{i=0}^{\infty}$ は，作り方から

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1, \\ \sigma_i &= 0 \quad (d+1 \leq i) \end{aligned}$$

であるが，さらに

$$\sigma_d \neq 0$$

が成り立つ．

TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ の定義により，V は $\langle A, A^* \rangle$-加群として既約である．このことより

$$E_0^* V_0 \neq 0$$

が得られる．

命題 2　$E_0^* V_0 \neq 0$ となる必要十分条件は

$$\sum_{i=0}^{d} \sigma_i \prod_{j=i+1}^{d} (\theta_0 - \theta_j)(\theta_0^* - \theta_j^*) \neq 0$$

である．

以上より数列 $\{\sigma_i\}_{i=0}^d$ は

$$(\flat)_0 \begin{cases} \sigma_0 & = & 1, \\ \sigma_d & \neq & 0 \end{cases}$$

及び

$$(\flat): \quad \sum_{i=0}^{d} \sigma_i \prod_{j=i+1}^{d} (\theta_0 - \theta_j)(\theta_0^* - \theta_j^*) \neq 0$$

なる性質を持たねばならない.

以上を要約すると, TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ から A の固有値 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$, A^* の固有値 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$, $L^i R^i|_{U_0}$ の固有値 $\{\sigma_i\}_{i=0}^d$ の三つ組み

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d, \ \{\theta_i^*\}_{i=0}^d, \ \{\sigma_i\}_{i=0}^d)$$

が得られ, この三つ組みは条件 $(\sharp)_0$, $(\sharp)$, $(\flat)_0, (\flat)$ をみたさねばならない. 実はこの三つ組みが TD-pair の同型類を決定し, 逆に条件 $(\sharp)_0$, $(\sharp)$, $(\flat)_0, (\flat)$ をみたすような三つ組みが任意に与えられたとき, 対応する TD-pair は必ず存在する. 即ち次の定理が成り立つ.

定理 2 TD-pair A, A^* の同型類と $(\sharp)_0$, $(\sharp)$, $(\flat)_0, (\flat)$ をみたす三つ組み $(\{\theta_i\}_{i=0}^d, \ \{\theta_i^*\}_{i=0}^d, \ \{\sigma_i\}_{i=0}^d)$ は 1 対 1 に対応する.

では, TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対し, このような三つ組みのデータから $\dim U_i$ をどのようにしたら求められるだろうか.

問題 1 TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対し *character*

$$ch(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} (\dim U_i)\lambda^i$$

を求めよ.

2 Drinfel'd polynomial

以下前節の 問題 1 を扱う. character formula を導きたい. TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対し, アフィン変換をほどこし

$$B = a_0 A + a_1, \quad B^* = a_0^* A^* + a_1^*$$

とおく $(a_i, a_i^* \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0,\ a_0^* \neq 0)$. すると, B, $B^* \in \mathrm{End}(V)$ も TD-pair をなし, A, B の固有空間は一致し, A^*, B^* の固有空間は一致する. 従って TD-pair A, A^* と TD-pair B, B^* は同じウェイト空間分解を持つことに注意する. 更に固有値の充たすべき関係式

$$(\sharp)\begin{cases} \theta_{i+1} - \beta\theta_i + \theta_{i-1} &= \gamma \quad (1 \leq i \leq d-1), \\ \theta^*_{i+1} - \beta\theta^*_i + \theta^*_{i-1} &= \gamma^* \quad (1 \leq i \leq d-1) \end{cases}$$

において, アフィン変換の前後で常数 β は不変であり, γ, γ^* のみが変化することに注意する: γ, γ^* は $a_0\gamma + (2-\beta)a_1$, $a_0^*\gamma^* + (2-\beta)a_1^*$ に変わる. また, 固有空間の順序付けを逆転しても, 常数 β, γ, γ^* とウェイト空間の次元 $\dim U_i$ は不変である.

以下

$$\beta = q^2 + q^{-2}$$

とおき $\beta \neq \pm 2$ を仮定する. すなわち

$$q^2 \neq \pm 1$$

とする. このとき TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に (1) 適当なアフィン変換をほどこし, (2) 必要なら固有空間の順序付けを逆転すれば, A, A^* の固有値を次のように仮定してよい: ある b, $b^* \in \mathbb{C}^\times$ と ε, $\varepsilon^* \in \{0,\ 1\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \theta_i &= bq^{2i-d} + \varepsilon b^{-1} q^{-2i+d}, \\ \theta_i^* &= \varepsilon^* b^* q^{2i-d} + b^{*-1} q^{-2i+d} \end{aligned}$$

この操作を標準化という. ここで $\varepsilon, \varepsilon^*$ は標準化の仕方によらずに定まることに注意する. このように標準化された TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対して Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ を定義する. まず

$$b = st, \quad b^* = st^{-1}$$

をみたすような s, $t \in \mathbb{C}^\times$ を選び固定する.

定義 4 標準化された直径 d の TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対して, 次数 d のモニック多項式

$$P_V(\lambda) = Q^{-1} \sum_{i=0}^{d} \sigma_i \prod_{j=i+1}^{d} (q^j - q^{-j})^2 (\varepsilon s^{-2} q^{2(d-j)} + \varepsilon^* s^2 q^{-2(d-j)} - \lambda)$$

を対応させる．ここで σ_i は L^iR^i の U_0 上の固有値 (定義 3) であり，

$$Q = Q_d = (-1)^d(q-q^{-1})^2(q^2-q^{-2})^2\cdots(q^d-q^{-d})^2$$

である．$P_V(\lambda)$ を TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ の *Drinfel'd polynomial* とよぶ．

$L^iR^i|_{U_0}$ の固有値 $\{\sigma_i\}_{i=0}^d$ に関する条件 $(\flat)_0$, $(\flat)$ は Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ の零点の言葉で次のように言い換えられる．まず $\sigma_0 = 1$ は $P_V(\lambda)$ が monic 多項式であることに対応し，$\sigma_d \neq 0$ は

$$P_V(\lambda) \neq 0 \quad \text{at} \;\; \lambda = \varepsilon s^{-2} + \varepsilon^* s^2$$

と同値である. 条件 $(\flat)$ は

$$P_V(\lambda) \neq 0 \quad \text{at} \;\; \lambda = t^2 + \varepsilon\varepsilon^* t^{-2}$$

と同値である．従って定理 2 により，標準化された直径 d の TD-pair A, A^* の同型類は，(A, A^* の固有値に関する条件 $(\sharp)$ は標準化によりすでに充たされているので）s, t に関する条件 $(\sharp)_0$ のもとで，$\lambda = \varepsilon s^{-2} + \varepsilon^* s^2$, $t^2 + \varepsilon\varepsilon^* t^{-2}$ を零点に持たないモニックな d 次多項式と 1 対 1 に対応する．

TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ が与えられたとき，ウェイト空間分解は A, A^* の固有空間の順序付けに依存し，従って $L^iR^i|_{U_0}$ の固有値 $\{\sigma_i\}_{i=0}^d$ もまた A, A^* の固有空間の順序付けに依存する．しかしながら Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ は A, A^* の固有空間の順序付けに依存しないという驚くべき性質を持つ．この性質は大掛かりな計算によって確かめられているだけで，何故なのか真の理由は分かっていない。

定理 3　TD-pair $A, A^* \in \mathrm{End}(V)$ に対して定義 1 を充たすような A, A^* の固有空間の順序付けは全部で 4 通りあるが，固有空間の順序付けを変えても Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ は不変である．また A, A^* を入れ替えても $P_V(\lambda)$ は不変である．

以下簡単のために

q は 1 の冪根でない

と仮定する．この仮定のもので，Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ の零点を用いて character formula を与える．まず q-string に関する言葉をいくつか準備する．

定義 5　零でない複素数 a と正の整数 ℓ に対して スカラー $a\,q^{-\ell+1}$, $a\,q^{-\ell+3}, \cdots, a\,q^{\ell-1}$ からなる集合 $S(\ell, a)$ を対応させる:

$$S(\ell, a) = \{a\,q^{2i-\ell+1} \mid 0 \leq i \leq \ell-1\}.$$

$S(\ell, a)$ を長さ ℓ の *q-string* とよぶ.

ふたつの q-string $S(\ell, a)$, $S(\ell', a')$ が一般の位置にあるとは,

(i)　$S(\ell, a) \cup S(\ell', a')$ is not a q-string,

or

(ii)　$S(\ell, a) \subseteq S(\ell', a')$ or $S(\ell, a) \supseteq S(\ell', a')$

が成り立つときをいう. q-string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ が一般の位置にあるとは, 任意の $S(\ell_i, a_i)$, $S(\ell_j, a_j)$ $(i \neq j)$ が一般の位置にあるときをいう.

q-string からなるふたつの multi-set を $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$, $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ とする. このふたつの multi-set が同値とは, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $\{S(\ell_i, a_i^{\varepsilon_i})\}_{i=1}^{n}$ と $\{S(\ell'_i, a'_i)\}_{i=1}^{n'}$ が multi-set として一致するときをいう. すなわち, $n = n'$ かつ $S(\ell'_i, a'_i)$ 達を適当に並べかえると $\ell_i = \ell'_i$, $a_i^{\varepsilon_i} = a'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つときをいう.

ふたつの q-string $S(\ell, a)$, $S(\ell', a')$ が<u>強く一般の位置にある</u>とは, 任意の $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$ に対して $S(\ell, a^{\varepsilon})$, $S(\ell', a'^{\,\varepsilon'})$ が一般の位置にあるときをいう. q-string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ が<u>強く一般の位置にある</u>とは, 任意の $S(\ell_i, a_i)$, $S(\ell_j, a_j)$ $(i \neq j)$ が強く一般の位置にあるときをいう. すなわち, $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ に同値な任意の multi-set が一般の位置にあるときをいう.

以上の準備の下で, 三つの場合 $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (1,1), (1,0), (0,0)$ に分けて character formula を述べる. 容易に分かるように Case $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (0,1)$ は A, A^* を取り替えることにより Case $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (1,0)$ に帰着する.

Case $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (1,1)$:
Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ の重複を許した零点を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ とする:

$$P_V(\lambda) = \prod_{i=1}^{d} (\lambda - \lambda_i).$$

各 λ_i に対して 2 次方程式

$$\zeta + \zeta^{-1} + \lambda_i = 0$$

の根の集合を Ω_i とおく (重根を持つ場合は Ω_i は multi-set とみなす).

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{d} \Omega_i$$

とおく (Ω は $2d$ 個の元からなる multi-set).

補題 2 次のような q-string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ が存在し, 定義 5 の意味における同値を除いて一意的に定まる: (1) $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ は強く一般の位置にある. (2) multi-set として

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} (S(\ell_i, a_i) \cup S(\ell_i, a_i^{-1})).$$

問題 1 の character $ch(\lambda)$ は次の式で与えられる.

定理 4 $$ch(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \lambda^{\ell_i+1}}{1 - \lambda}.$$

TD-pair A, $A^* \in \mathrm{End}(V)$ は Leonard pair (定義 2) のある種のテンソル積の構造を持ち, Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ がそれに応じた積公式を持つことからこの定理が導かれる.

Case $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (1, 0)$:
Drinfel'd polynomial $P_V(\lambda)$ の重複を許した零点を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ とする. このうち 0 の重複度を ℓ とし, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\ell = 0$ とおく ($\ell = 0$ も許す). したがって

$$P_V(\lambda) = \lambda^\ell \prod_{i=\ell+1}^{d} (\lambda - \lambda_i).$$

multi-set として

$$\Omega = \{-\lambda_i \mid \ell + 1 \le i \le d\}$$

とおく. このとき容易に分かるように次のような q-string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ が一意的に存在する: (1) $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ は一般の位置にある. (2) multi-set として

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} S(\ell_i, a_i).$$

問題 1 の character $ch(\lambda)$ は次の式で与えられる.

定理 5 $$ch(\lambda) = \frac{1-\lambda^{\ell+1}}{1-\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\lambda^{\ell_i+1}}{1-\lambda}.$$

Case $(\varepsilon,\ \varepsilon^*) = (0,0)$:
この場合, 定義4 より

$$P_V(\lambda) = Q^{-1}\sum_{i=0}^{d}\sigma_i\prod_{j=i+1}^{d}(q^j - q^{-j})^2(-\lambda)$$

なので, $\sigma_d \neq 0$ より $P_V(\lambda)$ は 0 を零点として持たない. 多項式 $\lambda^d P_V(\lambda^{-1})$ がオリジナルな Drinfel'd polynomial である. $P_V(\lambda)$ の重複を許した零点を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ とし, multi-set として

$$\Omega = \{-\lambda_i \mid 1 \leq i \leq d\}$$

とおく. このとき容易に分かるように次のような q-string からなる multi-set $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ が一意的に存在する: (1) $\{S(\ell_i, a_i)\}_{i=1}^{n}$ は一般の位置にある. (2) multi-set として

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} S(\ell_i, a_i).$$

問題 1 の character $ch(\lambda)$ は次の式で与えられる.

定理 6 $$ch(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-\lambda^{\ell_i+1}}{1-\lambda}.$$

参考文献

[1] 伊藤達郎, Tridiagonal pair と q-Onsager 代数, 第55回代数学シンポジウム報告集, 209–225, 2010.

[2] T.Ito, K.Tanabe and P.Terwilliger. Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes. Codes and Association Schemes (Piscataway, NJ, 1999). DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **56**, 167-192, 2001.

[3] T. Ito and P. Terwilliger. The shape of a tridiagonal pair. J. Pure Appl. Algebra **188**, 145-160, 2004.

[4] T. Ito and P. Terwilliger. Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra $U_q(\widehat{sl}_2)$. Ramanujan J. **13**, 39-62, 2007.

[5] T. Ito and P. Terwilliger. Two non-nilpotent linear transformations that satisfy the cubic q-Serre relations. J. Algebra Appl. **6**, 477–503, 2007.

[6] T. Ito and P. Terwilliger. The q-tetrahedron algebra and its finite-dimensional irreducible modules. Comm. Algebra **35**, 3415-3439, 2007.

[7] T. Ito and P. Terwilliger. The Drinfel'd polynomial of a tridiagonal pair. J. Combin. Inform. System Sci. **34**, 255-292, 2009.

[8] T. Ito and P. Terwilliger. The augmented tridiagonal algebra. Kyushu J. Math. **64**, 81-144, 2010.