数理解析研究所講究録
第 1758 巻 2011 年 195-202

Remarks on uniformly minimum variance unbiased estimation

筑波大・数理物質 Kim Hyo Gyeong
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質 大谷内 奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1. はじめに

統計的推定論において，母数の関数の最小分散不偏推定量に関する問題は古典的であり，正則条件の下での情報不等式による分散の下界による評価や完備十分統計量が存在する場合にそれに基づく不偏推定量を求める方法等がよく知られている (Lehmann and Casella[LC98], Voinov and Nikulin[VN93]). 後者の方法については単純な不偏推定量を完備十分統計量で条件付期待値をとれば良いことは分かっているが，これを陽な形で表現することが難しいことも多い．そのことを解決するための方法も研究されている (Jani and Dave[JD90], Kim and Akahira[KA09], Kim[K10]).

最近，Mukhopadhyay and Bhattacharjee[MB10] は，完備十分統計量 T が存在する場合に，母数 θ の関数 $g(\cdot)$ が無限和の関数として表現されるときに，T に基づく推定量の無限和が最小分散不偏推定量であることを示し，その例も挙げている．しかし，θ の関数 $g(\cdot)$ が無限和の関数として表わされる θ の範囲を母数空間 Θ 全体で考えているのかどうか明確でないため，結論がやや曖昧に見える．また，そこで挙げられている例では $g(\cdot)$ が指数関数で，母数空間 Θ 全体において Taylor 展開可能な場合のみである．本稿では，対象の θ の範囲を明確にすることによって，母数空間 Θ の部分集合 Θ_0 において $g(\theta)$ が整級数展開可能であるときに Θ_0 において T に基づく一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量を求める．また，それが任意の $\theta \in \Theta$ について不偏性を満たすことを示すことによって，Θ おいても UMVU 推定量であることを示し，その例も挙げる．

2. UMVU 推定量の構成

まず，$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも確率分布 $P_\theta(\theta \in \Theta)$ に従う確率変数とする．ここで，$\Theta \subset \boldsymbol{R}^1$ とし，θ の実数値関数 $g(\theta)$ が整級数展開可能で，

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k \quad (\theta \in I_r := (-r, r) \subset \Theta)$$

とする．また，確率分布族

$$\mathcal{P} := \{P_\theta | \theta \in \Theta\}, \quad \mathcal{P}_r := \{P_\theta | \theta \in I_r\}$$

を考える．このとき，次のことを得る．

定理 2.1 大きさ n の標本 $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく統計量 $T = T(\boldsymbol{X})$ を $\mathcal{P}_r$ に対して完備で十分であるとする．また，$k = 1, 2, \cdots$ について，$U_k(T)$ が存在して，任意の $\theta \in I_r$ について

$$E_\theta[U_k(T)] = \theta^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| E_\theta[|U_k(T)|] < \infty$$

とする．ただし，$U_0(T) \equiv 1$ とする．このとき

$$\hat{g}(T) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(T) \tag{2.1}$$

とすれば，$\hat{g}(T)$ は I_r において $g(\theta)$ の UMVU 推定量である，すなわち

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = g(\theta), \quad \forall \theta \in I_r \tag{2.2}$$

である．

証明は [MB10] の定理 2.1 のそれと同様である．もし T を $\mathcal{P}$ に対する完備十分統計量とし，(2.2) を

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta \tag{2.3}$$

まで拡張できれば，$\hat{g}(T)$ は Θ において $g(\theta)$ の UMVU 推定量になる．一方，$\Theta_0 \subset \Theta$ とするとき，

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

ならば

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

になるかという問題がある．しかしこれは一般には成り立たない．

例 2.1(Kojima et al.[KMT82], Akahira and Takeuchi[AT95] の p.12 の Example 4.1)．まず，$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも正規分布 $N(\theta, nd^2)$ $(\theta \in \Theta = \boldsymbol{R}^1)$ に従う確率変数とする．ただし d は既知とする．ここで $\Theta_0 := \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \subset \Theta$ とする．この

とき，$T = \bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ は，$\{N(\theta, nd^2)|\theta \in \Theta\}$ に対して完備十分統計量になり，$\{N(\theta, nd^2)|\theta \in \Theta_0\}$ に対して十分統計量になる．そして

$$\hat{\theta}(T) := \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\{\exp(u(u-1)/2d^2)(\exp(u/d^2)-1)\exp(u^2/2d^2)\}^{-1}$$
$$\cdot\{\exp(u\bar{X}/d^2) - \exp(-u\bar{X}/d^2)\}$$

は Θ_0 において θ の不偏推定量，すなわち

$$E_\theta[\hat{\theta}(T)] = \theta, \quad \forall\theta \in \Theta_0$$

になる．また $\hat{\theta}$ は $\theta = 0$ で θ の局所最小分散不偏 (LMVU) 推定量になる．なお，$\hat{\theta}$ の分散は，$\theta = 0$ では有限値であるが，$\theta \neq 0$ となる任意の $\theta(\in \Theta_0)$ において無限大になることに注意.

いま上記で，$\hat{\theta}(T)$ が $\Theta(= \boldsymbol{R}^1)$ において θ の不偏推定量と仮定する．ここで，$\bar{X}$ は $\{N(\theta, nd^2)|\theta \in \Theta\}$ に対して完備十分統計量であり，Θ において θ の不偏推定量であるから，Θ において θ の UMVU 推定量でかつ一意的である．よって，任意の $\theta \in \Theta$ について $P_\theta\{\hat{\theta} = \bar{X}\} = 1$ となるので矛盾．ゆえに $\hat{\theta}$ は Θ において θ の不偏推定量でない．

上記のことを踏まえて，本稿では (2.1) の推定量 $\hat{g}(T)$ を Θ における $g(\theta)$ の UMVU 推定量の候補と考えて，Θ における不偏性の条件 (2.3) を十分条件に組み込む形で，次の系を得る．

系 2.1 定理 2.1 において，さらに統計量 $T = T(\boldsymbol{X})$ が $\mathcal{P}$ に対して完備十分であると仮定する．このとき，(2.3) が成り立てば，$\hat{g}(T)$ は Θ において $g(\theta)$ の UMVU 推定量である．

証明は明らかである．

3. 例

前節の系 2.1 の適用例を挙げる．

例 3.1 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$ に従う確率変数とする．ただし，$\theta \in \Theta = \boldsymbol{R}_+ := (0, \infty)$ とする．

このとき，$T := \sum_{i=1}^{n} X_i$ は $\mathcal{P} := \{\mathrm{Exp}(\theta)|\theta \in \Theta\}$ に対して完備十分統計量になり，その密度は

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)\theta^n}t^{n-1}e^{-t/\theta} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

をもつガンマ分布 $G(n,1)$ に従う．いま，Θ における関数

$$g(\theta)=\frac{\theta}{1+\theta}$$

の UMVU 推定量を求めてみよう．まず，各 $k=1,2,\cdots$ について Θ において θ^k の T に基づく不偏推定量は

$$U_k(T):=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)}T^k$$

になる．ここで，$\theta\in\Theta_0:=(0,1)$ について

$$g(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\theta^{k+1}$$

と整級数展開できる．また，T は $\mathcal{P}_0:=\{\mathrm{Exp}(\theta)|\theta\in\Theta_0\}$ に対して完備十分統計量になる．そこで

$$\hat{g}(T):=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k+1)}T^{k+1}$$

とすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty}E_\theta\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k+1)}T^{k+1}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}=\frac{\theta}{1-\theta}<\infty,\quad \forall\theta\in\Theta_0$$

となるから，定理2.1 より

$$E_\theta[\hat{g}(T)]=g(\theta)=\frac{\theta}{1+\theta},\quad \forall\theta\in\Theta_0$$

になり，$\hat{g}(T)$ は Θ_0 において $g(\theta)$ の UMVU 推定量になる．

次に，$\hat{g}(T)$ は Θ における $g(\theta)$ の UMVU 推定量になることを示す．まず，

$$\begin{aligned}\hat{g}(T)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-1)!}{(n+k)!}T^{k+1}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{T^{n-1}}\left\{-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^kT^k}{k!}\right\}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{T^{n-1}}\left\{-e^{-T}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kT^k}{k!}\right\}\end{aligned}$$

となるから，任意の $\theta\in\Theta$ について

$$E_\theta[\hat{g}(T)]=-(-1)^{n-1}(n-1)!E_\theta\left[\frac{e^{-T}}{T^{n-1}}\right]+(-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}E_\theta(T^{k-n+1})$$

となる．ここで，任意の $\theta \in \Theta$ について

$$E_\theta\left[\frac{e^{-T}}{T^{n-1}}\right] = \frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}\int_0^\theta e^{-(1+(1/\theta))t}dt = \frac{\theta^{1-n}}{(n-1)!(1+\theta)},$$
$$E_\theta(T^{k-n+1}) = \frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}\int_0^\infty t^k e^{-t/\theta}dt = \frac{k!}{(n-1)!\theta^{n-k-1}}$$

となるから

$$\begin{aligned} E_\theta[\hat{g}(T)] &= -(-1)^{n-1}\frac{\theta^{1-n}}{1+\theta} + (-1)^{n-1}\theta^{1-n}\sum_{k=0}^{n-1}(-\theta)^k \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} = g(\theta), \qquad \forall\theta \in \Theta \end{aligned}$$

になる．よって，系2.1より $\hat{g}(T)$ は Θ において $g(\theta)$ のUMVU推定量になる．これはVoinov and Nikulin([VN93]) の結果とも一致している．

例 3.2 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$p(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta & (0 \le x \le \theta), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ一様分布 $U(0,\theta)$ に従う確率変数とする．ただし，$n \ge 2$，$\theta \in \Theta = \boldsymbol{R}_+$ とする．

このとき，$T := \max_{1\le i\le n} X_i$ は $\mathcal{P} := \{U(0,\theta)|\theta \in \Theta\}$ に対して完備十分統計量になり，その密度は

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} \dfrac{n}{\theta^n}t^{n-1} & (0 \le t \le \theta), \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

をもつ分布に従う．いま，Θ における関数

$$g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

のUMVU推定量を求める．まず，各 $k = 1, 2, \cdots$ について Θ において θ^k の T に基づく不偏推定量は

$$U_k(T) := \frac{n+k}{n}T^k$$

になる．ここで，$\theta \in \Theta_0 := (0,1)$ について

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\theta^{k+1}$$

と整級数展開できる．また，T は $\mathcal{P}_0 := \{U(0,\theta)|\theta \in \Theta_0\}$ に対して完備十分統計量になる．そこで

$$\hat{g}(T) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{n+k+1}{n} T^{k+1}$$

とすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_\theta\left[\frac{n+k+1}{n} T^{k+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1} = \frac{\theta}{1-\theta} < \infty, \quad \forall\theta \in \Theta_0$$

となるから，定理 2.1 より

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = g(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad \forall\theta \in \Theta_0$$

になり，$\hat{g}(T)$ は Θ_0 における $g(\theta)$ の UMVU 推定量になる．

次に，$\hat{g}(T)$ は Θ における $g(\theta)$ の UMVU 推定量になることを示す．まず，

$$\begin{aligned}\hat{g}(T) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(n+k+1)T^{k+1}\\ &= \frac{nT^2+(n+1)T}{n(T+1)^2}\end{aligned}$$

となるから，任意の $\theta \in \Theta$ について

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta \frac{t^{n+1}}{(t+1)^2}dt + \frac{n+1}{\theta^n}\int_0^\theta \frac{t^n}{(t+1)^2}dt$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \frac{t^{n+1}}{(t+1)^2}dt &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k(1+\theta)^{n-k}}{n-k} + (-1)^n(n+1)\log(1+\theta)\\ &\quad - \frac{(-1)^{n+1}}{1+\theta} - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{n-k} + (-1)^{n+1},\\ \int_0^\theta \frac{t^n}{(t+1)^2}dt &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k(1+\theta)^{n-k-1}}{n-k-1} + (-1)^{n-1}n\log(1+\theta)\\ &\quad - \frac{(-1)^n}{1+\theta} - \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n-k-1} + (-1)^n\end{aligned}$$

となるから

$$E_\theta[\hat{g}(T)] = \frac{1}{\theta^n}\left\{n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k(1+\theta)^{n-k}}{n-k} + (n+1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k(1+\theta)^{n-k-1}}{n-k-1}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{n-k}-(n+1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n-k-1}\\
&-\frac{(-1)^{n+1}n}{1+\theta}-\frac{(-1)^n(n+1)}{1+\theta}+(-1)^{n+1}n+(-1)^n(n+1)\Bigg\}\\
=&\frac{1}{\theta^n}\left\{\frac{\theta^{n+1}}{1+\theta}-(-1)^n(n+1)-\frac{(-1)^{n+1}}{1+\theta}+(n+1)(-1)^n+(-1)^{n+1}\right.\\
&\left.\qquad+\frac{(-1)^{n+1}}{1+\theta}+(-1)^n\right\}\\
=&\frac{\theta}{1+\theta}=g(\theta),\quad \forall\theta\in\Theta
\end{aligned}
$$

になる．よって系 2.1 より $\hat{g}(T)$ は Θ において $g(\theta)$ の UMVU 推定量になる．これは Voinov and Nikulin([VN93]) の結果とも一致している．

4. おわりに

本稿では母数空間 Θ 上で定義された関数 $g(\cdot)$ が Θ の部分集合 Θ_0 において整級数展開可能であるときに，Θ_0 において完備十分統計量 T に基づく推定量 $\hat{g}(T)$ が UMVU であるための十分条件を求めた．また，T が Θ に対しても完備十分統計量であれば，$\hat{g}(T)$ が Θ における不偏推定量にもなることを示すことによって $\hat{g}(T)$ が Θ において UMVU 推定量であることを示した．本稿のアプローチは，UMVU 推定量を求める際に，その候補として具体的な形を与えることができるという意味で有用と考えられる．

参考文献

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K.(1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Springer, New York.

[JD90] Jani, P. N. and Dave, H. P.(1990). Minimum variance unbiased estimation in a class of exponential family of distributions and some of its applications. Metron **48**, 493–507.

[K10] Kim, H. G.(2010). The construction of the uniformly minimum variance unbiased estimator. *Tsukuba J. Math.*, **34**, 47–58.

[KA09] Kim, H. G. and Akahira, M.(2009). On the minimum variance unbiased estimation. 数理解析研究所講究録 **1621**, 29–41.

[KMT82] Kojima, Y., Morimoto, H. and Takeuchi, K.(1982). Two best unbiased estimators of normal integral mean. In:*Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R.Rao*, North Holland, New York, 429–441.

[MB10] Mukhopadhyay, N. and Bhattacharjee, D.(2010). A note on minimum variance unbiased estimation. *Commun. Statist. -Theory and Meth.*, **39**, 1466–1476.

[VN93] Voinov, V. G. and Nikulin, M. S.(1993). *Unbiased Estimators and Their Applications, Vol.1:Univariate Case.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.