数理解析研究所講究録
第1758巻 2011年 160-168

長期記憶モデルと短期記憶モデルの近接性

山形大学 地域教育文化学部 システム情報学コース 加藤 剛 (Takeshi Kato) †
Department of Information, Faculty of Education, Art and Science
Yamagata University

1 fractional differencing と長期記憶性

現在は一服した感があるが，長期記憶モデルと呼ばれる時系列モデルの研究が，一時期かなり流行った．長期記憶モデルの最初の研究は，Hurst [4] によるナイル川の流量に関するデータ解析とされている．その後，時系列データの長期記憶性に関する研究が急速に進み，地理的データの解析（Mandelbrot and Wallis [5], [6]）や，経済データに関する解析（Granger [3]）などが行われてきた．

長期記憶モデルの数学的な定義は，次のようである．

定義 1 (Beran [1]) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ を平均0の弱定常時系列とし，その共分散関数を $R(k)=E[\overline{X_t}X_{t+k}]$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ で表す．このとき，次のように定義する

(1) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R(k)|<\infty \Leftrightarrow \{X_t\}$ は短期記憶モデル

(2) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R(k)|=\infty \Leftrightarrow \{X_t\}$ は長期記憶モデル

長期記憶モデルを生成する1つの方法は，fractional differrencing parameter を使うことである．いま，$\{Y_t\}$ を実数値短期記憶モデルとし，パラメータ $d\in(0,\frac{1}{2})$ を用いて，

$$X_t=(1-B)^{-d}Y_t \quad (t=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

によって新たな時系列 $\{X_t\}$ を定義する．ここで，B は後退演算子 $BY_t=Y_{t-1}$ であり，

$$(1-B)^d=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix}(-1)^k B^k$$

と定める．このとき，$\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_0(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, が，対称性，非負性，有界性または連続性という条件をみたすならば，$\{X_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_d(\lambda)$ は，

$$f_d(\lambda)=\left|1-e^{-i\lambda}\right|^{-2d}f_0(\lambda)=\left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d}f_0(\lambda), \quad \lambda\in[-\pi,\pi],$$

†2011年4月1日付で上智大学理工学部情報理工学科へ異動. On April 1, 2011, the author transferred to Department of Information and Communication Sciences, Faculty of Science and Technology, Sophia University. E-mail:tkskato@sophia.ac.jp

となる（Brockwell and Davis [2]）．さらに，$\{X_t\}$ の共分散関数

$$\gamma_d(k) = E[X_t X_{t+k}] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_d(\lambda)\, d\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

について，

$$\gamma_d(k) \ \sim \ V(d)|k|^{2d-1} \quad (|k| \to \infty), \quad V(d) = V_0 \Gamma(1-2d) \sin(\pi d) \tag{1}$$

という性質が成り立つことが導ける（Beran [1]）．ただし，V_0 は d とは無関係な定数である．(1) より $\{\gamma_d(k)\} \notin l^1$ なので，$\{X_t\}$ は長期記憶モデルになる．パラメータ $d \in (0, \frac{1}{2})$ を fractional differencing parameter といい，d によって生成される時系列 $\{X_t\}$ を fractional differencing process と呼ぶ．

具体的な例としては，$\{Y_t\}$ が ARMA のときに $\{X_t\}$ は fractional ARIMA，$\{Y_t\}$ が ARCH のときに $\{X_t\}$ は fractional ARCH，$\{Y_t\}$ が GARCH のときに $\{X_t\}$ は fractional GARCH という時系列モデルになる．

2 近接性

前節において，fractional differencing parameter d によって短期記憶モデルから長期記憶モデルを生成することを述べた．その方法によれば，短期記憶モデルは $d = 0$ の場合に相当する．そこで，$d \to +0$ としたとき，長期記憶モデルが短期記憶モデルに近接するか否かという問題を考える．この問題は，長期記憶モデルと短期記憶モデルの近さに関する理論的興味にもとづくだけではなく，長期記憶モデルの疑似乱数生成にも応用可能と考えられることから生じたものである．

定義 1 でみたように，短期記憶モデルと長期記憶モデルは共分散関数の絶対総和可能性の有無によって定義される．したがって，両者の近接性も共分散関数を使って定義することが自然であろう．

定義 2 $\gamma_d(k)$ と $\gamma_0(k)$ を，それぞれ $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ の共分散関数とする．このとき，

$$\lim_{d \to +0} \sup_{k \in \boldsymbol{Z}} |\gamma_d(k) - \gamma_0(k)| = 0$$

が成り立つならば，$d \to +0$ のとき，共分散関数に関して $\{X_t\}$ は $\{Y_t\}$ へ近接するという．

さらに強い近接性として，次の概念も定義できる．

定義 3 ある関数列 $\{C_\gamma(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{d \to +0} \sup_{k \in \boldsymbol{Z}} \left| \frac{\gamma_d(k) - \gamma_0(k)}{d} - C_\gamma(k) \right| = 0$$

が成り立つならば，$d \to +0$ のとき，共分散関数に関して $\{X_t\}$ は $\{Y_t\}$ へ 1 次のオーダーで近接するという．

$\{Y_t\}$ の分散の影響を取り除くには，相関関数を用いて定義すればよい．

定義 4 $\rho_d(k) = \gamma_d(k)/\gamma_d(0)$ と $\rho_0(k) = \gamma_0(k)/\gamma_0(0)$ を，それぞれ $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ の相関関数とする．ある関数列 $\{C_\rho(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{d\to+0} \sup_{k\in \boldsymbol{Z}} \left| \frac{\rho_d(k) - \rho_0(k)}{d} - C_\rho(k) \right| = 0$$

が成り立つならば，$d \to +0$ のとき，相関関数に関して $\{X_t\}$ は $\{Y_t\}$ へ 1 次のオーダーで近接するという．

1 次のオーダーの近接が成り立つとき，次の定義も可能である．

定義 5 $d \to +0$ のとき，相関関数に関して $\{X_t\}$ が $\{Y_t\}$ へ 1 次のオーダーで近接するならば，

$$\rho_d(k) - \rho_0(k) \approx d\, C_\rho(k) \quad (d \approx 0,\, k \text{ に関して一様}).$$

そこで，$\{C_\rho(k)\}$ を近接比率と呼ぶ．

もともと $\{X_t\}$ は fractional differencing parameter $d \in (0, \frac{1}{2})$ によって $\{Y_t\}$ から生成されたものであるから，$d \to +0$ のときの近接性は明らかであるように思える．また，次のような形式的な演算も成り立つ．

$$\begin{aligned} \lim_{d\to+0} \{\gamma_d(k) - \gamma_0(k)\} &= \lim_{d\to+0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \{f_d(\lambda) - f_0(\lambda)\}\, d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \lim_{d\to+0} \{f_d(\lambda) - f_0(\lambda)\}\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \cdot 0\, d\lambda = 0. \end{aligned}$$

ところが，$f_d(\lambda)$ は原点で発散するので，収束定理が成り立つための十分条件は必ずしも保証されない．

また，すでに述べたように，$\{Y_t\}$ を ARMA モデルとすると，$\{X_t\}$ は fractional ARIMA モデルになる．よく知られているように，ARMA モデルの共分散関数について，次の性質が成り立つ．

$$\gamma_0(k) \;\sim\; Qm^{|k|} \quad (|k| \to \infty) \quad (Q > 0,\, m \in (0,1) \text{ は定数}). \tag{2}$$

ARMA モデルのスペクトル密度関数は，対称性，非負性，連続性をみたす．そこで，$d \in (0, \frac{1}{2})$ によって生成される fractional ARIMA モデルの共分散関数については，(1) が成り立つ．したがって，形式的な演算をして (2) と突き合わせると，

$$\gamma_d(k) \approx V_0 \Gamma(1-2d) \sin(\pi d) |k|^{2d-1} \to 0 \neq Qm^{|k|} \approx \gamma_0(k) \quad (d \to +0,\, k \text{ は十分大})$$

となり，近接性は成り立たないように見える．

以上の観察から，$d \to +0$ のときの $\{Y_t\}$ に対する $\{X_t\}$ の近接性を確かめるには，数学的に厳密な議論が必要であることがわかる．

3 理論的結果

$d \to +0$ のときの $\{Y_t\}$ に対する $\{X_t\}$ の近接性に関して，次の定理が得られる．

定理 $\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_0(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$, について，$f_0(\lambda) \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p \leq \infty$, であると仮定する．このとき，

$$\lim_{d \to +0} \sup_{k \in \boldsymbol{Z}} \left| \frac{\gamma_d(k) - \gamma_0(k)}{d} - C_\gamma(k) \right| = 0 \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，

$$C_\gamma(k) = -4 \int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda) \log\left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right) d\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

であり，$\sup_{k \in \boldsymbol{Z}} |C_\gamma(k)| < \infty$ である．

証明は付録に委ねる．

相関関数に関する近接性については，定理から次の系が得られる．

系 定理と同じ条件のもとで，

$$\lim_{d \to +0} \sup_{k \in \boldsymbol{Z}} \left| \frac{\rho_d(k) - \rho_0(k)}{d} - C_\rho(k) \right| = 0 \tag{5}$$

が成り立つ．ここで，

$$C_\rho(k) = \frac{1}{\{\gamma_0(0)\}^2} \{C_\gamma(k)\gamma_0(0) - C_\gamma(0)\gamma_0(k)\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

である．

系の証明 式 (5) における $\rho_d(k)$, $d > 0$, の平均変化率に関する部分は，次のように書き換えられる．

$$\frac{\rho_d(k) - \rho_0(k)}{d} = \frac{1}{\gamma_d(0)\gamma_0(0)} \left\{ \gamma_0(0) \frac{\gamma_d(k) - \gamma_0(k)}{d} - \gamma_0(k) \frac{\gamma_d(0) - \gamma_0(0)}{d} \right\}.$$

その上で，(3) を適用すれば，結論は直ちに得られる． □

これらの定理と系から，非常に緩い条件のもとで，$d \to +0$ のときの $\{Y_t\}$ に対する $\{X_t\}$ の近接性が成り立つことがわかる．

4 疑似乱数生成への応用

長期記憶モデルの疑似乱数生成プログラムについては，すでに広く世に出回っているものがあり，長期記憶モデルに関する数値実験で使用されている．例えば，Beran [1] では，fractional Gaussian noise と fractional ARIMA モデルの疑似乱数生成について，S-PLUS を利用したプログラムが提供されている．この Beran によるプログラムは，統計解析ソフトウェアの R が普及した現在，プログラムをほとんど変更することなく R 上へ移植できて便利である．

ところが，長期記憶モデルと短期記憶モデルの近接性の観点から見たとき，既存の疑似乱数生成プログラムには問題点がある．例えば fractional ARIMA モデルの場合，いずれのプログラムも，d が 0 から離れた値のときは，実用に耐える質をもった疑似乱数を生成する性能をもっているようである．けれども，数値実験を試みると，$d \approx 0$ のときは，fractional ARIMA モデルの性質をよく反映した質の良い疑似乱数は得られないことがわかる．

Beran [1] による fractional ARIMA(p,d,q) の疑似乱数生成プログラムでは，生成の過程において，共分散関数 $\gamma_d(1), \gamma_d(2), \ldots, \gamma_d(n)$ を求め，その高速フーリエ変換を行っている．共分散関数の計算は，理論的結果にもとづいて，次のプログラムで実行される．**result[k]** とあるのが $\gamma_d(k)$ のことである．

```
result[1] = gamma(1-2*d)/gamma(1-d)**2
k = 1:(n-1)
result[k+1] = result[1]*gamma(k+d)*gamma(1-d)/(gamma(k-d+1)*gamma(d))
```

このプログラムでは組み込みのガンマ関数 **gamma** を使って共分散関数 $\gamma_d(k)$ を計算しているが，計算機イプシロン等のために，$d \approx 0$ のときは，共分散関数の値が正確に計算できていない可能性がある．

そこで，3 節で述べた近接性に関する理論的結果を利用して，$d \approx 0$ の場合の疑似乱数生成プログラムを改良することが考えられる．3 節の定理より，共分散関数 $\gamma_d(k)$ の近似式として，

$$\gamma_d(k) \approx \gamma_0(k) + d\,C_\gamma(k) \quad (d \approx 0,\ k \text{ に関して一様}) \tag{6}$$

が得られる．$C_\gamma(k)$ は (4) で与えられる近接比率である．近接比率 (4) は一般論としては積分形で与えられるが，短期記憶モデルが簡単なものである場合，具体的に計算することができる．

例 1 fractional ARIMA$(0,d,0)$ の場合
対応する短期記憶モデルは白色雑音 ε_t で，近接比率は

$$C_\gamma(k) = \begin{cases} 0 & : \ k = 0 \\ \frac{1}{k} & : \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

となる．

例 2 fractional ARIMA$(1,d,0)$ の場合

対応する短期記憶モデルは AR(1) : $Y_t - \phi Y_{t-1} = \varepsilon_t$ で，近接比率は次の形で与えられる．

$$C_\gamma(0) = -\frac{2}{1-\phi^2}\log(1-\phi), \quad C_\gamma(1) = -\frac{1+\phi^2}{\phi(1-\phi^2)}\log(1-\phi),$$

かつ

$$C_\gamma(k) = \frac{1}{1-\phi^2}\left\{\frac{1}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^n}{k+n} + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{\phi^n}{k-n} - \phi^k\log(1-\phi)\right\} \quad (k = 2,3,\ldots).$$

例 3 fractional ARIMA$(0,d,1)$ の場合

対応する短期記憶モデルは MA(1) : $Y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ で，近接比率は次のように求められる．

$$C_\gamma(0) = -2\theta, \quad C_\gamma(1) = 1 + \theta^2 - \frac{\theta}{2}$$

および

$$C_\gamma(k) = \frac{1+\theta^2}{k} - \frac{2k\theta}{k^2-1} \quad (k = 2,3,\ldots).$$

これら 3 つの例では，対応する短期記憶モデルの共分散関数 $\gamma_0(k)$ も，明示的な形で計算することができる．

近似式 (6) を用いることの利点は，d が共分散関数や近接比率の計算から完全に切り離され，近接比率の乗数の役割のみとなっていることである．したがって，(6) によって $\gamma_d(k)$ の値を与えれば，組み込み関数の中に d が現れる既存のものより理論値に近い値にできる可能性がある．そこで，$d \approx 0$ の場合においても，fractional ARIMA モデルの性質をよく反映した質の良い疑似乱数が得られると予想される．実際にプログラムを組んでの検証は，未着手の課題である．

付録：定理の証明

この付録において，3 節で述べた定理の証明を与える．

$p \in (1,\infty)$ に対し，$q \in (1,+\infty)$ を $p^{-1} + q^{-1} = 1$ をみたす定数とする．さらに，$p = \infty$ のときは $q = 1$ と定義する．$d \to +0$ の極限を考えるので，ある $d_0 \in (0, \frac{1}{2q})$ について $0 < d \le d_0$ がみたされると仮定してよい．

最初に，$\gamma_d(k)$ と $\gamma_0(k)$ の差について，次の表現が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned}\gamma_d(k) - \gamma_0(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\{f_d(\lambda) - f_0(\lambda)\}d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_0(\lambda)\left\{\left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d} - 1\right\}d\lambda \\ &= 2\int_0^{\pi}\cos(k\lambda) f_0(\lambda)\left\{\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} - 1\right\}d\lambda. \qquad (7)\end{aligned}$$

テイラーの定理により，$a > 0$ に対し，ある $\eta \in (0,1)$ が存在して，

$$a^x = 1 + x\log a + x^2 a^{\eta x}(\log a)^2/2$$

が成り立つ．そこで，$a = 2\sin\frac{\lambda}{2}$, $x = -2d$ として，任意の $\lambda \in (0,\pi)$ に対して

$$\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} - 1 = -2d\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right) + 2\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d^*}\left\{\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}^2 d^2 \tag{8}$$

が成立する．ここで，$d^* = d^*(\lambda)$ は $0 < d^* < d \leq d_0$ をみたす．そこで，(7) と (8) を併せると，次の表現が導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_d(k) - \gamma_0(k)}{d} &= -4\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\ &\qquad +4d\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\left\{\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}^2\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d^*}d\lambda \\ &=: C_\gamma(k) + 4d\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\left\{\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}^2\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d^*}d\lambda.\end{aligned}$$

したがって，証明を完結するには，

$$K := \sup_{d^*\in(0,d_0)}\sup_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\left\{\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right\}^2\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d^*}d\lambda\right| < \infty \tag{9}$$

であること，および

$$\sup_{k\in\boldsymbol{Z}}|C_\gamma(k)| = 4\sup_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\right| < \infty \tag{10}$$

を示せばよい．

まず (9) を示す．不等式

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \tag{11}$$

が $x \in (0,\pi/2)$ について一様に成り立つので，

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{-2d_0} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-2d^*} \geq \left\{\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}^{-2d^*} \geq 1$$

という大小関係が $\lambda \in (0,\pi)$ および $d^* \in (0,d_0)$ について一様に成り立つ．そこで，

$$\begin{aligned}K &\leq \sup_{d^*\in(0,d_0)}\int_0^\pi f_0(\lambda)\left[\log\left\{\lambda\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}\right]^2\left\{\lambda\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}^{-2d^*}d\lambda \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_0}\sup_{d^*\in(0,d_0)}\int_0^\pi f_0(\lambda)\left\{\log\lambda + \log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}^2\lambda^{-2d^*}d\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_0}\left[\sup_{d^*\in(0,d_0)}\int_0^\pi f_0(\lambda)(\log\lambda)^2\lambda^{-2d^*}d\lambda\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \sup_{d^*\in(0,d_0)}\int_0^\pi f_0(\lambda)\left\{\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}^2\lambda^{-2d^*}d\lambda\right] \\
&=: \ 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_0}(I_1+I_2). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

を得る．以下，I_1 と I_2 が有限確定することを示す．

$r\in(0,1-2qd_0)$ を任意に与えられた定数とすると，Schwarz の不等式を適用することにより，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \|f_0\|_{L^p}\sup_{d^*\in(0,d_0)}\left(\int_0^\pi \lambda^{-2qd^*}|\log\lambda|^{2q}d\lambda\right)^{1/q} \\
&\leq \|f_0\|_{L^p}\sup_{d^*\in(0,d_0)}\left\{\left(\sup_{\lambda\in(0,\pi)}\lambda^r|\log\lambda|^{2q}\right)\int_0^\pi\lambda^{-2qd^*-r}d\lambda\right\}^{1/q} \\
&= \|f_0\|_{L^p}\left(\sup_{\lambda\in(0,\pi)}\lambda^r|\log\lambda|^{2q}\right)^{1/q}\left(\sup_{d^*\in(0,d_0)}\frac{\pi^{1-2qd^*-r}}{1-2qd^*-r}\right)^{1/q} \\
&\leq \|f_0\|_{L^p}\left(\sup_{\lambda\in(0,\pi)}\lambda^r|\log\lambda|^{2q}\right)^{1/q}\left(\frac{\pi}{1-2qd_0-r}\right)^{1/q}<\infty. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

したがって，I_1 は有限である．

また，(11) により，不等式

$$
-\log\frac{\pi}{2}\leq\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\leq 0 \qquad (14)
$$

が $\lambda\in(0,\pi)$ について一様に成り立つ．そこで，

$$
\sup_{\lambda\in(0,\pi)}\left\{\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}^2\leq\left(\log\frac{\pi}{2}\right)^2.
$$

を得る．したがって，

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\log\frac{\pi}{2}\right)^2\|f_0\|_{L^p}\sup_{d^*\in(0,d_0)}\left(\int_0^\pi\lambda^{-2qd^*}d\lambda\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\log\frac{\pi}{2}\right)^2\|f_0\|_{L^p}\sup_{d^*\in(0,d_0)}\frac{\pi^{1-2qd^*}}{1-2qd^*} \\
&\leq \left(\log\frac{\pi}{2}\right)^2\|f_0\|_{L^p}\frac{\pi}{1-2qd_0}<\infty \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となるので，I_2 も有限確定する．以上から，(12), (13) および (15) を併せれば，(9) が証明される．

最後に (10) を示す．Hölder の不等式と Minkowski の不等式を順に適用することにより，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\int_0^\pi \cos(k\lambda) f_0(\lambda)\log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\right| \\
&\le \int_0^\pi f_0(\lambda)\left|\log\lambda+\log\left\{\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right\}\right|d\lambda \\
&\le \|f_0\|_{L^p}\left(\int_0^\pi\left|\log\lambda+\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right|^q\right)^{1/q} \\
&\le \|f_0\|_{L^p}\left\{\left(\int_0^\pi|\log\lambda|^q d\lambda\right)^{1/q}+\left(\int_0^\pi\left|\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right|^q d\lambda\right)^{1/q}\right\} \\
&\le \|f_0\|_{L^p}\left\{\left(\int_0^\pi\lambda^{-qs}|\lambda^s\log\lambda|^q d\lambda\right)^{1/q}+\left(\int_0^\pi\left|\log\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right|^q d\lambda\right)^{1/q}\right\}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$s\in(0,\frac{1}{q})$ は任意に固定された定数である．したがって，(14) により，(16) の右辺は次の式で上から押さえられる．

$$
\begin{aligned}
&\|f_0\|_{L^p}\left\{\left(\sup_{\lambda\in(0,\pi)}|\lambda^s\log\lambda|^q\right)^{1/q}\left(\int_0^\pi\lambda^{-qs}d\lambda\right)^{1/q}+\left(\left|\log\frac{\pi}{2}\right|^q\int_0^\pi d\lambda\right)^{1/q}\right\} \\
&\le \|f_0\|_{L^p}\left\{\left(\sup_{\lambda\in(0,\pi)}|\lambda^s\log\lambda|^q\right)^{1/q}\left(\frac{\pi^{1-qs}}{1-qs}\right)^{1/q}+\pi^{1/q}\log\frac{\pi}{2}\right\}<\infty.
\end{aligned}
$$

これで (10) が示されたことになり，定理の証明のすべてが完結する．　□

参考文献

[1] J. Beran, Statistics for long-memory processes, Chapman and Hall, 1994.

[2] P.J. Brockwell and R.A. Davis, Time Series: Theory and Methods (Second Edition), Springer, 1991.

[3] C.W.J. Granger, The typical spectral shape of an economic variable, Econometrica 34 (1966), 150-161.

[4] H.E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs, Trans. Am. Soc. Civil Engineers 116 (1951), 770-799.

[5] B.B. Mandelbrot and J.R. Wallis, Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence, Water Resources Res. 4 (1968), 967-988.

[6] B.B. Mandelbrot and J.R. Wallis, Computer experiments with fractional Gaussian noises, Water Resources Res. 5 (1969), 228-267.