数理解析研究所講究録
第1759巻 2011年 68-73

About a parallel implementation of the polynomial interpolation method

木村欣司
KINJI KIMURA
京都大学大学院情報学研究科
GRADUATE SCHOOL OF INFORMATICS, KYOTO UNIVERSITY *

1 有限体上のNewton補間および多項式の評価における法pの定め方

mod の回数を減らすために, 以下の性質を使う,

$$a \oplus b \equiv a + b \bmod p, \quad a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_N = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right) \bmod p,$$

さらに, 内積を次のように計算する

$$a \oplus b \equiv a + b \bmod p, \quad a \otimes b \equiv a \times b \bmod p,$$
$$(a_1 \otimes b_1) \oplus (a_2 \otimes b_2) \oplus \cdots \oplus (a_N \otimes b_N) = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \times b_i \right) \bmod p,$$

ここで,

$$N(p-1)^2 \leq 2^{64} - 1, \quad a_i, b_i < p$$

ならば, 64bit の符号なし整数に, $\left(\sum_{i=1}^{N} a_i \times b_i\right)$ を格納しておき, 最後に mod p の演算を行えばよい. その立場で, Newton 補間法を見直してみることにする.

1 次元の Newton 補間法の実装については, 数値計算の教科書では差分商による実装が推奨されている. しかし, 数式処理では, 以下の方法を採用する [1, p.76]. 関数 $\phi(t)$ を多項式 $\theta_K(t)$ で補間することを考える.

$$\theta_K(t) = \hat{\tau}_0 + \hat{\tau}_1(t - t_0) + \hat{\tau}_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + \hat{\tau}_K(t - t_0) \cdots (t - t_{K-1})$$

今, 係数 $\hat{\tau}_0, \cdots, \hat{\tau}_{j-1}$ が既知とする. このとき t_j での関数の値 $\phi(t_j)$ を用いて以下の式より $\hat{\tau}_j$ の値が計算できる.

$$\hat{\tau}_j = (\phi(t_j) - \theta_{j-1}(t_j))/((t_j - t_0) \cdots (t_j - t_{j-1}))$$

同じ評価点での補間が複数回行われると仮定すると, あらかじめ $(t_j - t_0), (t_j - t_0)(t_j - t_1), \cdots (j = 1, \cdots, K)$ などの値を保持しておけば, $\theta_{j-1}(t_j)$ の評価は, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上のベクトルの内積と同じ操作になり, 剰余算を削減できる.

もちろん, 多項式評価においても, 同様の議論が成り立つ.

*kkimur@amp.i.kyoto-u.ac.jp

2 新しい行列式の計算結果の次数の上界公式

2.1 fraction-free Gauss 消去法

多項式で構成される $n \times n$ の行列 C が与えられたとき, $\tau_{0,0}^{(-1)} = 1, \tau_{i,j}^{(0)} = C_{i,j}$ として, 以下の漸化式に従って計算を行う,

$$\tau_{i,j}^{(k)} = (\tau_{k,k}^{(k-1)}\tau_{i,j}^{(k-1)} - \tau_{k,j}^{(k-1)}\tau_{i,k}^{(k-1)})/\tau_{k-1,k-1}^{(k-2)}$$
$$k+1 \leq i \leq n, k+1 \leq j \leq n, k = 1, \cdots, n-1.$$

行列式は, $\tau_{n,n}^{(n-1)}$ に現れる, 0 による除算を避けるために, ピボット選択を適宜行ってよい. Jacobi の恒等式が理論の背景となっている.

2.2 新しい上界公式

$$\tau_{i,j}^{(k)} = (\tau_{k,k}^{(k-1)}\tau_{i,j}^{(k-1)} - \tau_{k,j}^{(k-1)}\tau_{i,k}^{(k-1)})/\tau_{k-1,k-1}^{(k-2)}$$
$$k+1 \leq i \leq n, k+1 \leq j \leq n, k = 1, \cdots, n-1,$$

を, 次数の議論のみをするように変形することで, 次数の上界公式が得られる.

$$d_{0,0}^{(-1)} = 0, d_{i,j}^{(0)} = \deg_x(\tau_{i,j})$$
$$d_{i,j}^{(k)} = \max(d_{k,k}^{(k-1)} + d_{i,j}^{(k-1)}, d_{k,j}^{(k-1)} + d_{i,k}^{(k-1)}) - d_{k-1,k-1}^{(k-2)}$$
$$k+1 \leq i \leq n, k+1 \leq j \leq n, k = 1, \cdots, n-1$$

pivot 選択も可能である. 理解は容易であるが, 決して, 自明なことではない. 証明は, ここでは省略する.

A の次数の上界を考える,

$$A = \begin{vmatrix} x+y+z & xy \\ 2 & xyz \end{vmatrix}.$$

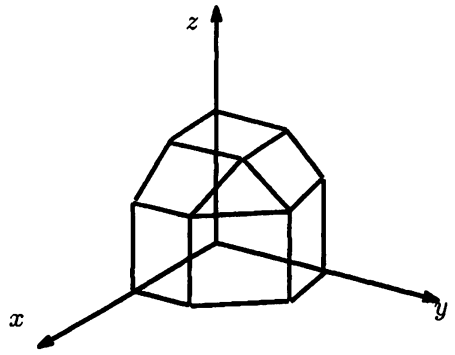
変数とパラメータの解釈により, 以下の表が得られる.

変数	パラメータ	(partial) total degree
x	y, z	2
y	x, z	2
z	x, y	2
x, y	z	3
y, z	x	3
z, x	y	3
x, y, z		4

ここでは, weight($[x, y, z]$)=[1, 1, 1] で考えている.

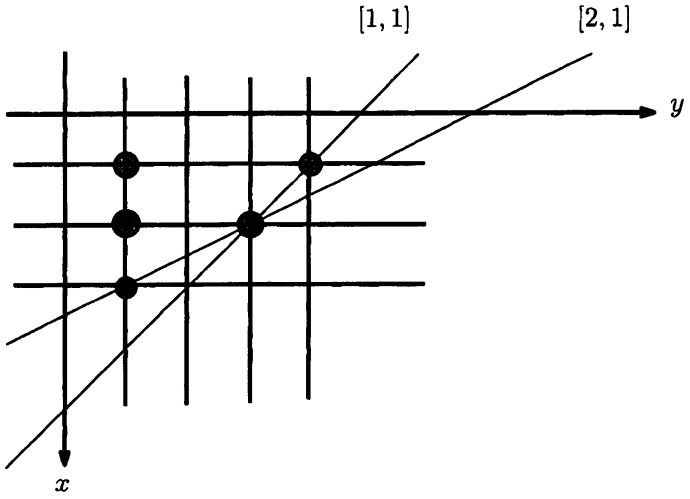
3 カット面付き多変数Newton補間

下の図は, weightが1種類の場合である. 複数のweightでカットを入れる場合もあるが, ここでは, 1種類の場合のみとする. 具体的には, weight($[x,y,z]$)=[1,1,1]を用いている. 下の凸包の内点格子の数分の評価点で, 終結式や行列式の値をサンプリングし, 補間する. 補間の詳細については, [2]を参照されたい.



4 weightによる計算量の削減

●で解の項の位置を表す. 2種類のweightを用いて, cut面を生成することを考える.
weight($[x,y]$)=[1,1],weight($[x,y]$)=[2,1]とする.



上記の図より, 2つのweightを利用することで, より少ない評価点から解を補間できることがわかる. たくさんのweightを使えば, 原理的にはよりタイトな上界になる. しかし, 凸包の内点格子を生成する部分で, 多くの時間を費やすことになる.

5 ベンチマーク問題

```
E6(a)=a^27
+12*p2*a^25
+60*p2^2*a^23
-48*p1*a^22
```

```
+(168*p2^3+96*q2)*a^21
-336*p2*p1*a^20+(294*p2^4+528*q2*p2+480*p0)*a^19
+(-1008*p2^2*p1-1344*q1)*a^18
+(144*p1^2+336*p2^5+1152*q2*p2^2+2304*p0*p2)*a^17
+((-1680*p2^3-768*q2)*p1-5568*q1*p2)*a^16
+(608*p2*p1^2+252*p2^6+1200*q2*p2^3+4768*p0*p2^2+17280*q0-1248*q2^2)*a^15
+((-1680*p2^4-2688*q2*p2+2304*p0)*p1-8832*q1*p2^2)*a^14
+(976*p2^2*p1^2+3264*q1*p1+120*p2^7+480*q2*p2^4+5696*p0*p2^3+
(43776*q0-4800*q2^2)*p2+12288*q2*p0)*a^13
+(832*p1^3+(-1008*p2^5-3072*q2*p2^2+5888*p0*p2)*p1-6528*q1*p2^3
+10752*q2*q1)*a^12
+((704*p2^3+4224*q2)*p1^2+2688*q1*p2*p1+33*p2^8-144*q2*p2^5+4384*p0*p2^4
+(41472*q0-6720*q2^2)*p2^2+34560*q2*p0*p2-34560*p0^2)*a^11
+(2560*p2*p1^3+(-336*p2^6-768*q2*p2^3+3584*p0*p2^2+64512*q0+8448*q2^2)*p1
-2112*q1*p2^4+23040*q2*q1*p2-70656*p0*q1)*a^10
+((176*p2^4+8960*q2*p2-18944*p0)*p1^2-5504*q1*p2^2*p1+4*p2^9-192*q2*p2^6
+2176*p0*p2^5+(22528*q0-3840*q2^2)*p2^3+32768*q2*p0*p2^2-39936*p0^2*p2
+110592*q2*q0-40704*q1^2+5120*q2^3)*a^9
+(2688*p2^2*p1^3+4608*q1*p1^2+(-48*p2^7+768*q2*p2^4-1536*p0*p2^3
+(82944*q0+16128*q2^2)*p2-73728*q2*p0)*p1-192*q1*p2^5+13824*q2*q1*p2^2
-64512*p0*q1*p2)*a^8
+(-2560*p1^4+(-32*p2^5+5376*q2*p2^2-16384*p0*p2)*p1^2+(-6144*q1*p2^3
-15360*q2*q1)*p1-48*q2*p2^7+608*p0*p2^6+(9600*q0-480*q2^2)*p2^4
+10752*q2*p0*p2^3-20992*p0^2*p2^2+(156672*q2*q0-38400*q1^2+9984*q2^3)*p2
-165888*p0*q0-56832*q2^2*p0)*a^7
+((1024*p2^3-10240*q2)*p1^3+10240*q1*p2*p1^2+(384*q2*p2^5-1792*p0*p2^4
+(21504*q0+6912*q2^2)*p2^2-57344*q2*p0*p2+49152*p0^2)*p1+1536*q2*q1*p2^3
-19456*p0*q1*p2^2-110592*q1*q0-21504*q2^2*q1)*a^6
+(-1536*p2*p1^4+(-16*p2^6+768*q2*p2^3-4608*p0*p2^2+27648*q0-19200*q2^2)*p1^2
+(-1344*q1*p2^4+10752*q2*q1*p2-9216*p0*q1)*p1+64*p0*p2^7
+(2304*q0+192*q2^2)*p2^5-3072*p0^2*p2^3+(55296*q2*q0-12288*q1^2
+4608*q2^3)*p2^2+(-110592*p0*q0-46080*q2^2*p0)*p2+73728*q2*p0^2)*a^5
+((64*p2^4-4096*q2*p2+8192*p0)*p1^3-512*q1*p2^2*p1^2+(-256*p0*p2^5+
(3072*q0-768*q2^2)*p2^3-8192*q2*p0*p2^2+16384*p0^2*p2+73728*q2*q0
-39936*q1^2-18432*q2^3)*p1-1024*p0*q1*p2^3+(-36864*q1*q0-3072*q2^2*q1)*p2
+24576*q2*p0*q1)*a^4
+(256*p2^2*p1^4+15360*q1*p1^3+(128*q2*p2^4-1024*p0*p2^3+(-6144*q0
-2560*q2^2)*p2+8192*q2*p0)*p1^2+(-128*q1*p2^5+2048*q2*q1*p2^2
-14336*p0*q1*p2)*p1+256*q0*p2^6-256*q2*p0*p2^5+256*p0^2*p2^4+(9216*q2*q0
-2560*q1^2-256*q2^3)*p2^3+(-18432*p0*q0-7680*q2^2*p0)*p2^2
+24576*q2*p0^2*p2-110592*q0^2+55296*q2^2*q0-30720*q2*q1^2-16384*p0^3
-6912*q2^4)*a^3
+(-1024*p1^5+4096*p0*p2*p1^3+24576*q2*q1*p1^2-12288*q1^2*p2*p1)*a^2
```

```
+(-2048*q2*p1^4+2048*q1*p2*p1^3+((-3072*q0-256*q2^2)*p2^2+4096*q2*p0*p2
-4096*p0^2)*p1^2+(512*q2*q1*p2^3-1024*p0*q1*p2^2-36864*q1*q0
+9216*q2^2*q1)*p1-256*q1^2*p2^4-6144*q2*q1^2*p2+12288*p0*q1^2)*a
+(4096*q0-1024*q2^2)*p1^3+(2048*q2*q1*p2-4096*p0*q1)*p1^2
-1024*q1^2*p2^2*p1-4096*q1^3
```

E6(a) の判別式を計算することを, ベンチマーク問題とする. $E6(a)$ は, ガロア群がワイル群 W($E6$) である 27 次 6 パラメータの代数方程式である [3].

6 タイミングデータ

$E6_k(a) = E6(a) \bmod a^{k+1}$ として, 性能評価を行う. sdmp とは, 直接的な多項式の操作をする計算において, 世界最速の数式処理ライブラリである. 乗算のみ, スレッド並列化されている.

k	sdmp Berkowitz	sdmp minor	Kimura (Parallel)
5	1.823s	1.291s	4.286s
6	11.335s	7.286s	16.381s
7	58.533s	41.391s	57.803s
8	-	2m32.602s	2m27.739s

-の部分及び, k がこれ以上大きくなると, sdmp はバグのため hang up する. Berkowitz は, 行列式計算における Berkowitz の方法を用いたタイミングデータである. minor は, 行列式計算における小行列式展開法を用いたタイミングデータである. 上記の 2 つの方法では, 終結式計算を, Bezout の表現を用いて, 行列式計算に変換することで計算を行っている.

この表より, k を増加させたときに, 計算量の増加率が最も小さいのは, 補間法 (木村版) であることがわかる. オリジナルの E6(a) の判別式は, 逐次計算:12323m41.582s, 並列計算:1985m23.865s, Speed Up 率:6.20(“スーパーリニアー”) により, 計算できたことを報告する. なお, 計算結果の項数は, 27329463 項であった.

6.1 実験環境について

実験環境は, CPU:Intel Core i7 980X(6Core), Memory:24Gbyte, OS:Fedora 13, コンパイラ:gcc 4.4.5 を用いた.

6.2 利用している weight について

下記の 3 種類を使う.

	q_0	q_1	p_0	q_2	p_1	p_2
weight_1	12	9	8	6	5	2
weight_2	2	5	6	8	9	12
weight_3	1	1	1	1	1	1

7 まとめ

有限体上の Newton 補間および多項式の評価を, 内積を経由して計算することにより, 高速化した. さらに, weight を利用することで, 補間法におけるサンプリング点を減少させた. それらの成果をもとに, E6(a) の判別式を, 1985m23.865s で計算できた.

参 考 文 献

[1] 大石進一, 数値計算, 応用解析セミナー, 裳華房, 1999.

[2] H. Werner, Mtinster, Remarks on Newton Type Multivariate Interpolation for Subsets of Grids, Computing 25(1980), 181-191.

[3] T.Shioda, Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups, J.Math.Soc.Japan 43(1991), 673-719.