数理解析研究所講究録
第 1763 巻 2011 年 31-52

非線型 Schrödinger 方程式の準古典解析

眞崎 聡

学習院大学理学部数学科
masaki@math.gakushuin.ac.jp

1 序

本稿では, Planck 定数に相当する正のパラメータ ε を持つ (非) 線型 Schrödinger 方程式の解 u^{ε} に対して, $\varepsilon\to 0$ の極限における WKB 近似

$$u^{\varepsilon}(t,x)=e^{i\frac{\phi(t,x)}{\varepsilon}}(a_0(t,x)+\varepsilon a_1(t,x)+\cdots+\varepsilon^n a_n(t,x)+o(\varepsilon^n)) \tag{1.1}$$

を考察する. この式は, より詳しくは

1. パラメータ ε によらないある実数値関数 $\phi(t,x)$ が存在して, 関数 $u^{\varepsilon}e^{-i\phi/\varepsilon}$ が $\varepsilon\to 0$ のときある関数 a_0 に収束する.

2. さらに, パラメータ ε によらない関数 $a_j(t,x)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ がとれて, $\varepsilon\to 0$ のとき適当なノルム (例えば $L^{\infty}([0,T];H^1)$) で
$$\left\| u^{\varepsilon}e^{-i\phi/\varepsilon}-\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j a_j\right\| \to 0$$
を満たす.

という二つの段階に分けられる. 実際の証明もこの二つのステップに分かれる.

WKB 近似を正当化する上で最も重要なことは, 適切な位相関数 $\phi(t,x)$ を見出すことである. $u^{\varepsilon}e^{-i\phi/\varepsilon}$ が $\varepsilon\to 0$ のときにある関数に収束するということは, u^{ε} には $e^{i\phi/\varepsilon}$ と表せるオーダー $O(\varepsilon^{-1})$ の振動が実際に含まれている, ということを主張している. 上で述べた一つ目のステップは言い換えると, **解の持つ速い振動 (ε の負べきに比例する振動) を決定せよ**ということである. 非線型方程式で特殊な状況を考えると, このような速い振動で ε のオーダーが異なるものが複数現れることもある (cf. cascade of phase shifts [4, 20]). そのような場合はこれらをすべて決定する必要がある.

一段階目で解の持つ速い振動が特定できたならば, その振動を除いた $u^{\varepsilon}e^{-i\phi/\varepsilon}$ という関数は $\varepsilon\to 0$ の極限で性質の良いものになっているはずである. それを確かめ, この関数を ε のべきによって展開していくのが二つ目のステップである. この部分では線型方程式と非線型方程式で大きく状況が異なる. 非線型方程式では, 初期値の ε に関する高次の影響が非線型項の相互作用によって時間発展に伴い低次の項に降りてくるという現象が起こる (たとえば, 初期値に $O(\varepsilon^1)$ の摂動を加えれば出てくる近似解には $O(\varepsilon^0)$ のずれが生じる). また, 初期時刻にこのような振動が含まれていなくても時間がたつとこのような振動が非線型性によって生み出される. これを応用することで, 初期値問題の非適切性などを示すことができる.

本稿は以下のように構成されている. 2 節でまず線型 Schrödinger 方程式の解に対する WKB 近似の手法を紹介した後, 3 節で, 非線型方程式に対する WKB 近似の手法を紹介する. また非線型方程式に対する WKB 近似の応用例として 4 節ではパラメータを持たない方程式に対する非適切性の結果を紹介し, 5 節では量子効果を持つ圧縮性 Euler 方程式の古典極限の解析に対する応用についても触れる.

2 線型 Schrödinger 方程式の WKB 近似

非線型の場合と比較するために, まず線型 Schroödinger 方程式

$$i\varepsilon\partial_t u^{\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^{\varepsilon}=Vu^{\varepsilon},\quad u^{\varepsilon}(0)=A^{\varepsilon}e^{i\Phi/\varepsilon} \tag{2.1}$$

を考察しよう. ここで V は実数値のポテンシャルである. 我々の目的は, この方程式の解に対して WKB 近似 (1.1) を正当化することである. 線型方程式の場合, 以下の手順で近似が可能である.

1. 位相関数 ϕ の決定.

2. 振幅関数 a_0 の決定.

3. 高次の振幅関数 a_j の決定.

以下では, A^{ε}, Φ は十分に性質の良いものであるとして話を進める. また, 初期時刻で u^{ε} は (1.1) のように書けていると仮定する: つまり $A^{\varepsilon}=A_0+\varepsilon A_1+\cdots+\varepsilon^n A_n+o(\varepsilon^n)$ と書けるとする. [6, 1.3 節] により詳しい記述がある.

2.1 位相関数の決定 – アイコナール方程式

では, まず解の速い振動を表す位相関数 ϕ を決定しよう. このためには, 方程式 (2.1) に

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x)e^{i\frac{\phi(t,x)}{\varepsilon}}$$

という形を代入すればよい. 実際に代入すると

$$-a^\varepsilon e^{i\frac{\phi}{\varepsilon}}\left(\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(x)\right) \\ + i\varepsilon e^{i\frac{\phi}{\varepsilon}}\left(\partial_t a^\varepsilon + \nabla\phi\cdot\nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon\Delta\phi\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}e^{i\frac{\phi}{\varepsilon}}\Delta a^\varepsilon = 0 \quad (2.2)$$

が得られる. いま, $a^\varepsilon = u^\varepsilon e^{i\phi/\varepsilon}$ は $\varepsilon\to 0$ のときにある関数に収束することが期待されているので, 特に ε に関して一様に有界であるとしよう. このとき, 左辺の ε に関する最高次が消えるためには, ϕ が

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V = 0, \quad \phi(0,x) = \Phi(x) \quad (2.3)$$

という方程式を満たしていなければならないことが分かる. この方程式を**アイコナール方程式**と呼ぶ.

アイコナール方程式を解けば ϕ を決定することができる. ここで, (2.3) の代わりにその両辺を微分して得られる $\nabla\phi$ に関する方程式

$$\partial_t\nabla\phi + (\nabla\phi\cdot\nabla)\nabla\phi + \nabla V = 0, \quad \nabla\phi(0,x) = \nabla\Phi(x) \quad (2.4)$$

を解けば十分である. なぜならば, もし (2.4) を解いて $\nabla\phi$ が決まれば

$$\phi(t,x) = \Phi(x) - \int_0^t \frac{1}{2}|\nabla\phi(s,x)|^2 ds - tV(x) \quad (2.5)$$

という式によって (2.3) の解が構成できるからである. 方程式 (2.4) は特性関数の手法によって解くことができる. X を

$$\frac{d}{dt}X(t,y) = \nabla\phi(t,X(t,y)), \quad X(0,y) = y \quad (2.6)$$

によって定めると (2.4) は X に関する常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t,y) = \nabla V(X(t,y)), \quad \frac{d}{dt}X(0,y) = \nabla\Phi(y), \quad X(0,y) = y \quad (2.7)$$

になる. これは Newton の運動方程式である. (2.7) の解が $[0,T]$ 上存在して, $y\mapsto X(t,y)$ が $t\in[0,T]$ に対して可逆であれば

$$\nabla\phi(t,x) = \nabla\Phi(X^{-1}(t,y)) + \int_0^t \nabla V(X(s,X^{-1}(t,x)))ds \quad (2.8)$$

として $\nabla\phi$ を求めることができる. こうして位相関数が決定される.

もし, $y \mapsto X(t,y)$ がある時刻 t_0 で可逆でなくなると, その時刻では $\nabla\phi$ が決定されない. 実はより強く, このような時刻では $\Delta\phi$ が発散することが分かる. いま, $t \in [0, t_0)$ に対しては $y \mapsto X(t,y)$ が可逆で $t = t_0$ においてはそうでないと仮定する, このとき $\det(\nabla_y X(t_0, y_0)) = 0$ となる y_0 が存在するはずである. $0 < t < t_0$ に対して, (2.6) より,

$$\frac{d}{dt}\det\nabla_y X(t,y_0) = \det(\nabla_y X(t,y_0))\Delta\phi(t, X(t,y_0)).$$

が成立する. したがって, $\det(\nabla_y X(0,y_0)) = 1$ に注意すると

$$\det(\nabla_y X(t,y_0)) = e^{\int_0^t \Delta\phi(s,X(s,y_0))ds} \tag{2.9}$$

を得る. したがって $t \to t_0$ のとき, もし左辺が 0 に収束するならば, $\Delta\phi(t, X(t,y_0))$ は $-\infty$ に発散しなければならないことがわかる.

集合 $\{(t, X(t,y)) \mid \det(\nabla_y X(t,y)) = 0,\ y \in \mathbb{R}^d\}$ を**焦点集合**と呼ぶ.

2.2 振幅関数の決定 – 輸送方程式

アイコナール方程式の解 ϕ がある時間区間 $[0,T]$ で存在すると仮定して, 次の段階へと進もう. (2.2) から, $a^\varepsilon = u^\varepsilon e^{-i\phi/\varepsilon}$ は

$$\partial_t a^\varepsilon + \nabla\phi\cdot\nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon\Delta\phi - i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon = 0$$

を解くことが分かる. ゆえに, a^ε が $\varepsilon = 0$ のときある関数 a_0 に収束しているとすると, その関数 a_0 は**輸送方程式**

$$\partial_t a_0 + \nabla\phi\cdot\nabla a_0 + \frac{1}{2}a_0\Delta\phi = 0, \quad a_0(0,x) = A_0(x) \tag{2.10}$$

を解く. ここで, $A_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} A^\varepsilon$ である. アイコナール方程式を解く際に導入した $X(t,y)$ を再び用いると

$$\frac{d}{dt}a_0(t, X(t,y)) = -\frac{1}{2}a_0(t,X(t,y))\Delta\phi(t,X(t,y))$$

と書き直せて, したがって

$$\begin{aligned} a_0(t,x) &= A_0(X^{-1}(t,x))e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi(s,X(s,X^{-1}(t,x)))ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det\nabla_y X(t,X^{-1}(t,x))}}A_0(X^{-1}(t,x)) \end{aligned}$$

と a_0 を求めることができる. ここで最後の等式には (2.9) を用いた.

さらに高次の振幅関数は

$$\partial_t a_j + \nabla\phi \cdot \nabla a_j + \frac{1}{2} a_j \Delta\phi - \frac{i}{2} \Delta a_{j-1} = 0, \quad a_j(0,x) = A_j$$

という方程式によって，帰納的に定義される．みたび X を用いれば，これは

$$\frac{d}{dt}\left(a_j(t,X(t,y))e^{\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi(s,X(s,y))ds}\right) \\ = \frac{i}{2}\Delta a_{j-1}(t,X(t,y))e^{\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi(s,X(s,y))ds}$$

に他ならない．したがって，

$$a_j(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\det(\nabla_y X(t,X^{-1}(t,x)))}} A_j(X^{-1}(t,x)) \\ + \frac{i}{2}\int_0^t \sqrt{\frac{\det(\nabla_y X(s,X^{-1}(t,x)))}{\det(\nabla_y X(t,X^{-1}(t,x)))}} \Delta a_{j-1}(s,X(s,X^{-1}(t,x)))ds \quad (2.11)$$

によって順次 a_j を決めることができる．

2.3 いくつかの例

2.3.1 例 1

一つ目の例として，最も単純な $V \equiv \Phi \equiv 0$, $A^\varepsilon(x) = u_0(x)$ という場合を考えてみる．方程式 (2.7) は

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t,y) = 0, \quad \frac{d}{dt}X(0,y) = 0, \quad X(0,y) = y$$

となるので，$X(t,y) = y$ を得る．したがって，X は常に可逆で $X^{-1}(t,x) = x$ である，したがって，容易に $\phi(t,x) \equiv 0$ が得られる．$\det \nabla_y X(t,y) = 1$ なので，

$$a_0(x) = u_0(x), \quad a_j(x) = \frac{1}{j!}\left(\frac{it}{2}\Delta\right)^j u_0(x)$$

を得る．この場合，WKB 近似で与えられる近似解は

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\left(\frac{i\varepsilon t}{2}\Delta\right)^j u_0(x)$$

であるが，これは $u^\varepsilon(t) = e^{i\frac{\varepsilon t}{2}\Delta}u_0$ を ε に関して形式的に Taylor 展開したものと等しい．

2.3.2 例2

次に, $V \equiv 0$, $\Phi(x) = -|x|^2/2$ という場合を考える. この場合, 焦点集合が時空間の一点になる. 方程式 (2.7) は

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t,y) = 0, \quad \frac{d}{dt}X(0,y) = -y, \quad X(0,y) = y$$

となるので, $X(t,y) = y(1-t)$ を得る. したがって, X は $t < 1$ に対して可逆で $X^{-1}(t,x) = x/(1-t)$ である, $t < 1$ に対して, (2.8) より $\nabla\phi(t,x) = -x/(1-t)$ が得られ, さらに (2.5) より $\phi(t,x) = |x|^2/(t-1)$ を得る. $\det \nabla_y X(t,y) = (1-t)^d$ である, 焦点集合は $\{(1,0)\}$ という一点より成る. また,

$$a_0(x) = \frac{1}{(1-t)^{d/2}} A_0\left(\frac{x}{1-t}\right),$$
$$a_j(x) = \frac{1}{(1-t)^{d/2}} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}\left(\frac{it}{2(1-t)}\right)^k (\Delta^k A_{j-k})\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

を得る. この場合, WKB 近似で与えられる近似解は

$$\frac{e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}}}{(1-t)^{d/2}} \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \sum_{k=0}^{n-j} \frac{1}{k!}\left(\frac{i\varepsilon t}{2(1-t)}\right)^k (\Delta^k A_j)\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

となる.

3 非線型 Schrödinger 方程式の WKB 近似

3.1 方程式の紹介

非線型方程式

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = N(|u^\varepsilon|)u^\varepsilon; \quad u^\varepsilon(0,x) = A_0^\varepsilon(x)\exp(i\Phi_0(x)/\varepsilon). \tag{3.1}$$

の考察へと移ろう. N は非線型項を表す. $N(|u|)$ は実数値をとる関数で u の偏角に依存しないものとする. 以下の二つのタイプの非線型項を取り扱うことにする:

- 排斥的な 3 次の非線型項: $N(|u^\varepsilon|) = f(|u^\varepsilon|^2)$, 但し $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は $f \geqslant 0$, $f' > 0$, $f(0) = 0$ を満たす.

- 排斥的/吸引的な非局所的非線型項: $N(|u^\varepsilon|) = \pm(-\Delta)^{-1}|u^\varepsilon|^2$ またはより一般に $N(|u^\varepsilon|) = \pm(|x|^{-\gamma} * |u^\varepsilon|^2)$.

ここで実際に取り扱う非線型方程式とそれらについての過去の結果を紹介する:

1. 排斥的な 3 次の非線型項をもつ非線型 Schrödinger 方程式

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon; \quad u^\varepsilon(0,x) = A_0^\varepsilon(x)\exp(i\Phi_0(x)/\varepsilon) \tag{CNLS}$$

   但し $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は $f \geqslant 0$, $f'(y) > 0$, $f(0) = 0$ を満たす. これは, [13] で取り扱われた. (より一般の次数を持つもの, および他のタイプの局所的非線型項を持つものについては [2, 3, 6, 8, 9, 10, 17] を参照). 非線型方程式に対する WKB 近似の初めての数学的正当化は, P. Gérard [11] によって別の手法により与えられた ([23] も参照).

2. Schrödinger-Poisson 方程式系:

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda V_{\mathrm{P}}^\varepsilon u^\varepsilon, \\ -\Delta V_{\mathrm{P}}^\varepsilon = |u^\varepsilon|^2, \quad V_{\mathrm{P}}^\varepsilon \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, \\ u^\varepsilon(0,x) = A_0^\varepsilon(x)\exp(i\Phi_0(x)/\varepsilon), \end{cases} \tag{SP}$$

   但し $\lambda = \pm 1$. この場合は [1, 16, 18, 19, 24, 25] などで取り扱われている.

3. Hartree equation 方程式

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda(|x|^{-\gamma} * |u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon; \quad u^\varepsilon(0,x) = A_0^\varepsilon(x)\exp(i\Phi_0(x)/\varepsilon), \tag{H}$$

   但し $\lambda = \pm 1$. [7] で 3 次元以上の場合が扱われている.

3.2 Grenier の手法 (修正 Madelung 変換)

非線型 Schrödinger 方程式の解に対する WKB 近似を正当化する方法として, ここでは Grenier が [13] で導入した手法を紹介する. この手法は準古典極限における非線型性の影響の現れ方をよく反映したものであると思われる. その他の知られている手法と比較して, この手法の優れている点は

- 初期値は Sobolev 空間に属していればよい.
- 強い位相で (1.1) が成立. さらに任意の次数まで展開が可能.

の二つである. 他の手法では, 初期値に解析性などの滑らかさに関する強い仮定が必要であったり, そうでなければ $|u^\varepsilon|^2$ や $\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\overline{u^\varepsilon}\nabla u^\varepsilon$ などの 2 次量に対する収束のみしか得られなかったりするのである.

3.2.1 非線型方程式における問題点

線型方程式の場合は, $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i\phi/\varepsilon}$ を代入したのち

1. アイコナール方程式より位相関数 ϕ を決定する.
2. 輸送方程式より振幅関数 a_0 を決定する.
3. 同じく輸送方程式より高次の振幅関数 a_j を決定する.

というステップを**順番に**行うことで, WKB 近似を正当化することができた. いま, 非線型方程式 (3.1) に対して全く同じことをやろうとすると (2.2) 式に相当する式の ε^0 の部分からは

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + N(|a^\varepsilon|^2) = 0$$

という式が現れる. ここで非線型項によって作られるポテンシャルが現れており, そのため線型の場合のように初めにこれを解く, ということができない. また ϕ は ε によらないものであってほしいが, a^ε が ε に依存する (と思われる) ので, それも期待できない.

3.2.2 アイコナール方程式と輸送方程式のシステム

そこで, アイコナール方程式と輸送方程式を一度に解く. つまり, それらをシステムにする. システムの選び方にはいろいろな可能性が考えられるが, (2.2) に相当する式の ε のオーダーから, 次のシステムを考えることにする:

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t \phi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi^\varepsilon|^2 + N(|a^\varepsilon|^2) = 0, \\ a^\varepsilon(0) = A^\varepsilon, \qquad \phi^\varepsilon(0) = \Phi. \end{cases} \tag{3.2}$$

第一方程式は輸送方程式で, 第二方程式がアイコナール方程式である. ここで, ϕ^ε が ε に依存することを許している点に注意してほしい.

非線型 Schrödinger 方程式の解に対する WKB 近似を正当化する際に中心になるのは, このシステムに ε によらない時間幅で解が存在することを示すステップである. この部分は, 考えている非線型項の形状に大きく左右される.

3.2.3 システムの解の高次展開と WKB 近似

典型的な非線型項に対してどのようにシステム (3.2) が解かれるかという部分の概要は後回しにし，このシステムの可解性が得られたあと，どのように WKB 近似が得られるかを紹介する．

つぎにやるべきことは (3.2) の解を

$$a^\varepsilon = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j a_j + o(\varepsilon), \qquad \phi^\varepsilon = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \phi_j + o(\varepsilon) \tag{3.3}$$

と展開することである．これがわかると，最初の形 $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i\phi^\varepsilon}$ にこの展開を組み合わせて

$$u^\varepsilon(t,x) = e^{i\frac{\phi_0}{\varepsilon}}(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \cdots + \varepsilon^{n-1}\beta_{n-1})$$

が得られる．この際に注意するのは，展開の主要部が a_0 ではなくて $\beta_0 = a_0 e^{i\phi}$ で与えられることである．この位相の修正は $e^{i\phi^\varepsilon/\varepsilon}$ の部分から来る．同様に，j 次 $(j \leqslant n-1)$ の係数 β_j を得るためには $(a_0,\phi_0),\ldots,(a_{j+1},\phi_{j+1})$ が分かっている必要がある．つまり，もし n 次の展開を得ようと思えば $(a^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ を $n+1$ 次まで展開せねばならず，あとで見るように，このためには初期振幅の展開も $n+1$ 次まで必要になる．このように最終的に得られる WKB 近似の次数が初期時刻に比べて一次分下がるのが，非線型特有の現象である．[1]

それでは，(3.3) の導出であるが，これは次のように行う．初期振幅の展開 $A^\varepsilon = \sum_{j=0}^{n} A_j$ は与えられているとする．このとき，(3.2) において形式的に $\varepsilon = 0$ とすると

$$\begin{cases} \partial_t a_0 + \nabla\phi_0 \cdot \nabla a_0 + \dfrac{1}{2} a_0 \Delta\phi_0 = 0, \\ \partial_t \phi_0 + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi_0|^2 + N(|a_0|^2) = 0, \\ a_0(0) = A_0, \qquad \phi_0(0) = \Phi. \end{cases} \tag{3.4}$$

を得るが，ここで $b_1^\varepsilon = (a^\varepsilon - a_0)/\varepsilon$, $\psi_1^\varepsilon = (\phi^\varepsilon - \phi_0)/\varepsilon$ と定め，これらの関数に対する方程式を導出すると，

$$\begin{cases} \partial_t b_1^\varepsilon + \varepsilon\left(\nabla\psi_1^\varepsilon \cdot \nabla b_1^\varepsilon + \dfrac{1}{2} b_1^\varepsilon \Delta\psi_1^\varepsilon\right) + L_1(b_1^\varepsilon,\psi_1^\varepsilon) = i\dfrac{\varepsilon}{2}\Delta b_1^\varepsilon, \\ \partial_t \psi_1^\varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi_1^\varepsilon|^2 + L_2(b_1^\varepsilon,\psi_1^\varepsilon) + N(|b^\varepsilon|^2) = 0, \\ b_1^\varepsilon(0) = (A^\varepsilon - A_0)/\varepsilon, \qquad \psi_1^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

---

[1] もしここで紹介した手法を，$N \equiv 0$ だとみなして線型方程式の場合に適用すると，$\phi^\varepsilon \equiv \phi_0$ となるので $e^{i\phi^\varepsilon/\varepsilon}$ の展開の必要がなくなる．また $\phi_j \equiv 0$ が $j \geqslant 1$ に対して得られ，それから $\beta_j = a_j$ となることが分かるため，得られる展開は前節で紹介したものと同じになる．

のような形になる．ここで L_i は線型項と外力項の和を表す．この方程式の主要部 (2 次の部分) は係数に ε があるものの (3.2) と同じである．したがって, (3.2) を解くことができれば, その議論をここで用いてこの方程式に対して ε に関する一様有界性が初期時刻のそれから得られる (N はある程度性質が良い必要があるが).

注意 3.1. 非線型方程式の WKB 近似において, 解の速い振動を表す位相関数は (3.4) の解 ϕ_0 によってて与えられることが分かった．ここで重要なことは $\Phi \equiv 0$ であったとしても, つまり, 初期時刻で速い振動が存在しなかったとしても時間が経過すると非線型項の影響によってそれが作られることである．実際, $\Phi \equiv 0$ であっても, (3.4) の第二方程式で $t \downarrow 0$ として $\partial_t\phi_0(0,x) = -N(|A_0|^2)(x)$ が得られ $t > 0$ に対しては $\phi_0(t) \neq 0$ である．これは 2.3.1 節で見た線型の場合とは大きく違っている．

3.3 結果のまとめ

ここで述べた手法を適用することで得られる非線型方程式に対する WKB 近似を定理の形で述べておく．結果を述べるために, 次の Zhidkov 空間を導入する:$s > d/2$ に対して

$$X^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \nabla f \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d)\}.$$

これらは, 主に ϕ の属する空間として用いられる．それは, 以下で紹介するようにシステム (3.2) の解を求める際には実は ϕ 自身よりも主に $\nabla\phi$ を取り扱うためである ($\nabla\phi$ が H^s 空間に入ることを要求するが, ϕ 自身は遠方で減衰する必要がない)．ここで Zhidkov 空間に対する性質をひとつだけ紹介する．これは Hardy-Littlewood-Sobolev から得られるものである．([14, Th. 4.5.9] [12, Lemma 7])

補題 3.2. $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ が $\nabla\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ をある $p \in (0,d)$ に対して満たすならば, ある定数 γ に対して $\varphi - \gamma \in L^q(\mathbb{R}^d)$ が成立する．ここで q は $1/p = 1/q + 1/d$ をみたすもの．

それでは, 非線型 Schrödinger 方程式に対する WKB 近似の結果を紹介する．

定理 3.3 ([13], (CNLS) の WKB 近似)**.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ : \mathbb{R}_+)$ は $f(0) = 0$ と $f' > 0$ を満たすとする．ある整数 $k \geqslant 1$ に対して実数 s を $s > d/2 + 2k + 4$ となるようにとる．$\Phi_0 \in X^{s+1}$ と A_0^ε が $\varepsilon \in [0,1]$ に対して

$$A_0^\varepsilon = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^j A_j + o(\varepsilon^k) \quad in\ H^s \tag{3.6}$$

と書けるとする．このとき ε によらない $T > 0$ があって，(CNLS) の解 $u^\varepsilon \in C([0,T]; H^s)$ が一意に存在する．さらに $\phi_0 \in C([0,T]; X^{s+1})$ と $\beta_j \in H^{s-2j-2}$ が存在して

$$u^\varepsilon = e^{i\frac{\phi_0}{\varepsilon}}(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1}\beta_{k-1} + o(\varepsilon^{k-1})) \quad in\ C([0,T]; H^{s-2k-2}) \tag{3.7}$$

が成立．

定理 3.4 ((SP) の WKB 近似)**.** $d \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ を仮定．ある整数 k に対して実数 s を $s > d/2 + 2k + 3$ となるようにとる．$\Phi_0 \in C^{2k+5}$ は $\nabla^2\Phi_0 \in H^s$ を満たし，A_0^ε は (3.6) のように書けるとする．このとき ε によらない $T > 0$ があって，(SP) の解 $u^\varepsilon \in C([0,T]; H^s)$ が一意に存在する．さらに $\phi_0 \in C([0,T]; C^{2k+5})$ と $\beta_j \in H^{s-2j-2}$ が存在して (3.7) 式が成立．

定理 3.5 ((H) の WKB 近似)**.** $d \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ と仮定．正定数 γ は $d/2-2 < \gamma \leqslant n-2$ を満たすとする．ある整数 k に対して実数 s を $s > d/2 + 2k + 3$ となるようにとる．$\Phi_0 \in C^{2k+5}$ は $\nabla^2\Phi_0 \in H^s$ を満たし，A_0^ε は (3.6) と書けるとする．このとき ε によらない $T > 0$ があって，(SP) の解 $u^\varepsilon \in C([0,T]; H^s)$ が一意に存在する．さらに $\phi_0 \in C([0,T]; C^{2k+5})$ と $\beta_j \in H^{s-2j-2}$ が存在して (3.7) 式が成立．

注意 3.6. 初期位相 Φ_0 に関する仮定は非線型項の形状に応じてそれぞれ少し異なる．上の仮定では Φ_0 は必ずしも空間遠方で減衰しないことに注意．

定理 3.3 では $\Phi_0 \in X^{s+1}$ を仮定した．この場合，Φ_0 は有界だが必ずしも空間遠方では 0 に近づかない．空間 3 次元以上では，補題 3.2 からある定数 $c_0 \in \mathbb{R}$ があって $\Phi_0 - c_0 \in L^{2^*}$ と書けることが分かる．但し $2^* = 2n/(n-2)$ である．

一方，定理 3.4 と定理 3.5 では $\Phi_0 \in C^{2k+5}$ と $\nabla^2\Phi_0 \in H^s$ が仮定されている．これは先ほどの場合の $X^{s+1}(\mathbb{R}^d)$ という仮定よりも空間遠方での減衰に関しては緩い．特に Φ_0 は $|x| \to \infty$ のとき発散しうる．ここでは $d \geqslant 3$ を考えているので，補題 3.2 から定数 $c_\infty \in \mathbb{R}^n$ があって $\nabla\Phi_0 - c_\infty \in L^{2^*}$ と書けることが分かる．さらに $d \geqslant 5$ ならば別の定数 c_0 があって $\Phi_0 - c_0 - c_\infty \cdot x \in L^{2^{**}}$ と書ける，ここで $2^{**} = (2^*)^* = 2n/(n-4)$ である．

しかし，いずれの方程式においても，空間遠方で減衰しない部分の時間発展はよく分かる．ある関数 $P(t,x)$ が Φ_0 より陽に構成できて，$\phi_0(t) - P(t)$ が遠方で減衰するようにできる．この部分がどれくらいの速さで減衰するのかは非線型項に大きく依存する．特に，局所的な非線型項と非局所的な非線型項で顕著な違いがみられる．

3.4 システム (3.2) の可解性

3.2 節でシステム (3.2) を解くことが WKB 近似を正当化する上でのメインステップであることを紹介した．ここでは, (CNLS) と (SP), (H) の場合にどのようにして対応するシステムを解くか, その証明のアウトラインを述べる．

3.4.1 (CNLS) の場合

初めに, (CNLS) を考察しよう．対応するシステムは

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla\phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta\phi^\varepsilon = \frac{i\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t \phi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi^\varepsilon|^2 + f(|a^\varepsilon|^2) = 0, \\ a^\varepsilon(0) = A^\varepsilon, \qquad \phi^\varepsilon(0) = \Phi \end{cases} \tag{3.8}$$

である．簡単のためいま $f(y) = \lambda y$ であると仮定しよう．但し λ は正定数である．線型方程式に対するアイコナール方程式を解いたときと同様に, ϕ^ε ではなく $\nabla\phi^\varepsilon$ を未知変数と考える．ひとたび $\nabla\phi^\varepsilon$ が決定されれば (2.5) 式のようにして ϕ^ε が構成できるからである．$v^\varepsilon = \nabla\phi^\varepsilon$ とおく．$(a^\varepsilon, v^\varepsilon)$ に関するシステムは次のようになる;

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \nabla \cdot v^\varepsilon = \frac{i\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + 2\lambda \operatorname{Re}(\overline{a^\varepsilon}\nabla a^\varepsilon) = 0, \\ a^\varepsilon(0) = A^\varepsilon, \qquad v^\varepsilon(0) = \nabla\Phi \end{cases} \tag{3.9}$$

鍵となるのは実はこのシステムが対称双曲型の方程式とみなせることである．実際に, $W_1^\varepsilon = \operatorname{Re} a^\varepsilon$, $W_2^\varepsilon = \operatorname{Im} a^\varepsilon$, $W_{j+2}^\varepsilon = (2\lambda)^{-1/2} v_j^\varepsilon$ と $\mathbb{R}^{d+2}$ 値をとる関数 W^ε を導入すれば, (3.9) の第一方程式は

$$\partial_t W_1^\varepsilon + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=3}^{d+2} W_k^\varepsilon \partial_{k-2} W_1^\varepsilon + \frac{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{2} W_1^\varepsilon \sum_{k=3}^{d+2} \partial_{k-2} W_k^\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2}\Delta W_2^\varepsilon$$

と

$$\partial_t W_2^\varepsilon + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=3}^{d+2} W_k^\varepsilon \partial_{k-2} W_2^\varepsilon + \frac{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{2} W_2^\varepsilon \sum_{k=3}^{d+2} \partial_{k-2} W_k^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\Delta W_1^\varepsilon$$

の二つに書きなおすことができる．また第二方程式は

$$\partial_t W_j^\varepsilon + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=3}^{d+2} W_k^\varepsilon \partial_{k-2} W_j^\varepsilon + \frac{\lambda}{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}(W_1^\varepsilon \partial_{j-2} W_1^\varepsilon + W_2^\varepsilon \partial_{j-2} W_2^\varepsilon) = 0$$

と書けるので, 結局

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} \phantom{W_{j+2}} & \phantom{W_{j+2}} & \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{j-1} & & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \text{j-1}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
W_{j+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}W_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & W_{j+2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}W_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2}W_1 & \frac{1}{2}W_2 & & & & W_{j+2}\mathrm{Id}_{d\times d} & & & \\
0 & 0 & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
=; A_j
$$

という $(d+2)\times(d+2)$ 対称行列 A_j $(1\leqslant j\leqslant d)$ と

$$
\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & 0 & \\
0 & 0 & & &
\end{pmatrix} = J
$$

という $(d+2)\times(d+2)$ 歪対称行列によって

$$
\partial_t W^\varepsilon + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j W^\varepsilon + \varepsilon J \Delta W^\varepsilon = 0
$$

と書き直すことができる. したがって対称双曲型方程式の一般論 (たとえば [22, 16 章]) から Sobolev 空間に属する初期値 $A^\varepsilon \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\nabla\Phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s > d/2+1)$ に対して解くことができる. この際, エネルギー法が用いられるが歪対称部に対しては

$$
\left\langle (1-\Delta)^{\frac{s}{2}} J\Delta W^\varepsilon, (1-\Delta)^{\frac{s}{2}} W^\varepsilon \right\rangle_{L^2} = 0
$$

が任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して成立するため, エネルギー評価にはこの項は寄与しない. システム (3.9) の ε 依存性はこの部分だけであるので, 結局エネルギー評価から得られる先験的評価は ε に関して一様に成立する. したがって, 初期値が ε に関して一様有界ならば解の存在時間は ε によらず, 解のノルムも一様に評価されることが分かる.

3.4.2 (SP) と (H) の場合

続いて非局所的な非線型項を持つ場合 (SP) と (H) の場合について述べる. (SP) は (H) における $\gamma = d-2$ の場合とみなすことができるため (H) のみを取り扱う. この場合, 考える方程式は

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \nabla \cdot v^\varepsilon = \frac{i\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t v^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon + \lambda \nabla (|x|^{-\gamma} * |a^\varepsilon|^2) = 0, \\ a^\varepsilon(0) = A^\varepsilon, \qquad v^\varepsilon(0) = \nabla \Phi \end{cases} \tag{3.10}$$

になる. 局所的な非線型項の場合のシステム (3.9) では第一方程式の左辺第三項目と非線型項の部分の間に良い構造があったために, 対称双曲型に変形することが出来たが, この場合は非線型項の形状が異なるためにそれは不可能である.

したがって, ここでは全く別の方針をとる. (3.10) の第二方程式をさらに空間方向に微分して

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \nabla \cdot v^\varepsilon = \frac{i\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t \nabla v^\varepsilon + \nabla((v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon) + \lambda \nabla^2 (|x|^{-\gamma} * |a^\varepsilon|^2) = 0, \\ a^\varepsilon(0) = A^\varepsilon, \qquad \nabla v^\varepsilon(0) = \nabla^2 \Phi \end{cases} \tag{3.11}$$

を考えよう. この $(a^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)$ に対するシステムを H^s の枠組みで解こうというのがこの場合の方針である. 先ほどと比べると, v^ε に (したがって ϕ^ε に) 要求される微分の回数が異なっていることに注意されたい. 非線型項には二回の微分がかかっているが, 非線型項が分数解の積分になっているので (cf. Riesz ポテンシャル, [21] を参照), この部分から滑らかさを引き出すことで微分を打ち消すのがポイントである. それを表しているのが次の補題である:

補題 3.7 ([7]). $d \geqslant 3$ とする. $k \geqslant 0$, $s, \in \mathbb{R}$ をとる. $\gamma > 0$ は $d/2 - 2 < \gamma \leqslant d-2$ を満たすとする. このときある定数 C_s があって

$$\left\| |\nabla|^2 (|x|^{-\gamma} * f) \right\|_{H^s} \leqslant C_s (\|f\|_{H^s} + \|f\|_{L^1}), \quad \forall f \in L^1 \cap H^s$$

が成立.

4 非適切性への応用

4.1 非適切性について

非線型方程式に対する WKB 近似の応用例として初期値問題に対する非適切性について述べる. これから述べる議論は [5] において導入されたも

のである ([6] も参照). ここでは, パラメータ ε を持たない Hartree 方程式

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda \left(|x|^{-\gamma} * |u|^2\right) u \quad ; \quad u_{|t=0} = u_0 \tag{4.1}$$

を考える. 適切性とは, 解の存在に加え一意性と初期値に対する連続依存性が成立することを指す. ここでは, スケールに関して優臨界な場合に初期値に対する連続依存性が成立しないことを, WKB 近似の手法を使って示す. まず, 準備としてスケールに関する臨界指数について述べよう. もし $u(t,x)$ が (4.1) の解であるならば, すべての $\lambda > 0$ に対して

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{1+\frac{d-\gamma}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

も解になる. このとき,

$$\|u_\lambda(0)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{\gamma}{2}+1} \|u_0\|_{\dot{H}^s}$$

であるが, この量が λ に関して不変になる指数, つまり, $s_c = \frac{\gamma}{2} - 1$ を臨界指数と呼ぶ. 具体的に得られる結果を定理の形で述べる.

定理 4.1 ([7]). 次元は $d \geqslant 5$ とし, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\max(d/2-2, 2) < \gamma \leqslant d-2$ と $0 < s < s_c = \gamma/2 - 1$ を仮定. このとき初期値の列

$$(\psi_0^h)_{0<h\leqslant 1}, \ \psi_0^h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|\psi_0^h\|_{H^s} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

と時間の列 $t^h \to 0$ が存在して, 対応する方程式

$$i\partial_t \psi^h + \frac{1}{2}\Delta\psi^h = \lambda \left(|x|^{-\gamma} * |\psi^h|^2\right) \psi^h \quad ; \quad \psi^h_{|t=0} = \psi_0^h$$

の解 ψ^h が次を満たすようにできる:

$$\left\|\psi^h(t^h)\right\|_{H^k} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} +\infty, \quad \forall k > \frac{s}{1+s_c-s} = \frac{s}{\gamma/2 - s}.$$

特に $k = s$ ととることができることに注意. したがってこれは $s < s_c$ ならば解写像 $u_0 \mapsto u$ が H^s から $C([0,T]; H^s)$ への写像として一様に連続にはならないということをその一部として含んでいる.

4.2 WKB 近似による証明

ここでは, WKB 近似を用いて定理 4.1 を示す.

定理 *4.1* の証明. さて $A_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を (h に依存しない) 非自明な関数とする. 仮定より $s < s' < s_c$ なる s' をとることができる. いま,

$$\psi_0^h(x) = h^{s'-d/2} A_0\left(\frac{x}{h}\right)$$

によって ψ_0^h を定める. $\varepsilon = h^{s_c - s'} = h^{\gamma/2-1-s'}$ ととる. $h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ であることに注意. ここで, u^ε を

$$\psi^h(t,x) = h^{s'-d/2} u^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon h^2}, \frac{x}{h}\right).$$

によって定めれば, ψ^h が (4.1) を解くことと, u^ε が

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda(|x|^{-\gamma} * |u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon_{|t=0} = A_0$$

を解くことが同値であることが分かる. これは (H) で初期値として $\Phi = 0$, $A_0^\varepsilon = a_0$ をとったものである. このとき, 解の WKB 近似を考えると, 位相関数の主要部 ϕ_0 は, その満たすべき方程式から

$$\phi_{0|t=0} = 0 \quad ; \quad \partial_t \phi_{0|t=0} = -\lambda |x|^{-\gamma} * |A_0|^2,$$

を満たすことが分かる. ゆえに, ε によらないある $\tau > 0$ がとれて $\phi_{0|t=\tau}$ が a_0 の台の上で非自明なものになるようできる. このとき, $t = \tau$ では WKB 近似から u^ε は ε^{-1} に比例する速さで振動していることが分かる. ゆえに, $k > 0$ に対して $\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^k} = O(\varepsilon^{-k})$ を得る. したがって,

$$\left\|\phi_0^h\right\|_{H^s} = O(h^{s'-s})$$

かつ

$$\left\|\phi^h(\varepsilon h^2 \tau)\right\|_{H^k} = O(h^{s'-k}\|u^\varepsilon(\tau)\|_{H^k}) = O(h^{s'-k}\varepsilon^{-k}) = O(h^{s'-(\frac{\gamma}{2}-s')k})$$

であることが分かる. $s < s'$ より前者は 0 に収束する. 一方, 任意の $k > s/(\gamma/2 - s)$ に対して s' を十分 s に近くとれば

$$k > \frac{s'}{\frac{\gamma}{2} - s'} > \frac{s}{\frac{\gamma}{2} - s}$$

とでき, このように s' をとれば後者は発散する. □

鍵となったのは, 注意 3.1 でも述べたように, 初期時刻に ε^{-1} に比例する振動がなかった ($\Phi \equiv 0$) としても非線型性から正の時刻 τ では振動が発生する ($\phi(\tau) \not\equiv 0$) という事実である.

5 量子流体方程式の古典極限との関係

二つ目の応用として，量子項を持つ圧縮性 Euler 方程式

$$\begin{cases} \partial_t\rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) + \rho^\varepsilon \nabla p(\rho^\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{2}\rho^\varepsilon \nabla \left(\dfrac{\Delta\sqrt{\rho^\varepsilon}}{\sqrt{\rho^\varepsilon}}\right), \\ \nabla \times v^\varepsilon = 0, \\ \rho^\varepsilon(0) = \rho_0, \qquad v^\varepsilon(0) = v_0 \end{cases}$$

について考察したい．ここで，ρ^ε は密度を表す非負実数値関数であり，v^ε は流速を表す $\mathbb{R}^d$ 値関数である．p は圧力を表す非負値関数である．第一方程式は連続の式であり，第二方程式は運動方程式である．第二方程式の右辺は量子圧力項と呼ばれており，この項によって量子的な効果を取り込んでいる．この方程式の解の $\varepsilon \to 0$ という極限 (古典極限と呼ばれている) での解のふるまいを，非線型 Schrödinger 方程式

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = N(|u^\varepsilon|)u^\varepsilon; \quad u^\varepsilon(0,x) = A_0^\varepsilon(x)\exp(i\Phi_0(x)/\varepsilon). \tag{5.1}$$

の解の準古典近似から導出するのが目的である．他の手法による解析も行われており，たとえば [15, 24, 25] では Wigner 測度の手法を用いてこの極限が考察されている．

5.1 Madelung 変換

Madelung により，次のような Schrödinger 方程式と量子項を持つ圧縮性 Euler 方程式との間の関係が指摘されている: u^ε を

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = N(|u^\varepsilon|)u^\varepsilon,$$

の解とする．ただし，N は実数値をとる非線型項である．このとき，ρ^ε と v^ε を u^ε の絶対値と偏角によって

$$\rho^\varepsilon := |u^\varepsilon|^2, \qquad v^\varepsilon := \varepsilon\nabla \arg u^\varepsilon = \varepsilon\,\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla u^\varepsilon}{u^\varepsilon}\right). \tag{5.2}$$

と定める．このとき，$(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ は次の圧縮性 Euler 方程式をとく:

$$\begin{cases} \partial_t\rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) + \rho^\varepsilon \nabla N(\sqrt{\rho^\varepsilon}) = \dfrac{\varepsilon^2}{2}\rho^\varepsilon \nabla \left(\dfrac{\Delta\sqrt{\rho^\varepsilon}}{\sqrt{\rho^\varepsilon}}\right). \end{cases}$$

Schrödinger 方程式の非線型項が圧縮性 Euler 方程式における圧力項に対応している．この事実は実際に次のようにして確かめられる．まず $u^\varepsilon=\sqrt{\rho^\varepsilon}e^{iS^\varepsilon/\varepsilon}$ (但し $S^\varepsilon=\varepsilon\arg u^\varepsilon$) という形を方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{\rho^\varepsilon}e^{i\frac{S^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\partial_t S^\varepsilon+\frac{1}{2}|\nabla S^\varepsilon|^2+N(\sqrt{\rho^\varepsilon})\right)\\
&+i\varepsilon e^{i\frac{S^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\partial_t\sqrt{\rho^\varepsilon}+\nabla S^\varepsilon\cdot\nabla\sqrt{\rho^\varepsilon}+\frac{1}{2}\sqrt{\rho^\varepsilon}\Delta S^\varepsilon\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}e^{i\frac{S^\varepsilon}{\varepsilon}}\Delta\sqrt{\rho^\varepsilon}=0
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

を得る．$e^{iS^\varepsilon/\varepsilon}\neq 0$ で割ってから実部と虚部に分けると，次の 2 式が導出される:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\sqrt{\rho^\varepsilon}+\nabla S^\varepsilon\cdot\nabla\sqrt{\rho^\varepsilon}+\frac{1}{2}\sqrt{\rho^\varepsilon}\Delta S^\varepsilon&=0,\\
\partial_t S^\varepsilon+\frac{1}{2}|\nabla S^\varepsilon|^2+N(\sqrt{\rho^\varepsilon})&=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\Delta\sqrt{\rho^\varepsilon}}{\sqrt{\rho^\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

但し第二式においては $\rho^\varepsilon>0$ であるとする．第一式に $\sqrt{\rho^\varepsilon}$ を乗じれば直ちに連続の式が現れる．一方，第二方程式を空間方向に微分して連続の式と合わせることで運動方程式も得られる．導出の際に用いた $u^\varepsilon=\sqrt{\rho^\varepsilon}e^{iS^\varepsilon/\varepsilon}$ は **Madelung 変換**と呼ばれれている．

5.2 Madelung 変換と修正 Madelung 変換

(3.2) で紹介した修正 Madelung 変換と (通常の)Madelung 変換は形がよく似ているがその大きな違いは，Madelung 変換が

$$u^\varepsilon=\sqrt{\rho^\varepsilon}e^{i\frac{S^\varepsilon}{\varepsilon}}$$

と振幅を実数値に限定して位相部分と単純に分けたのに対して，修正Madelung 変換では

$$u^\varepsilon=a^\varepsilon e^{i\frac{\phi^\varepsilon}{\varepsilon}}$$

という形において a^ε が複素数値をとることである．このことにより $(a^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ のシステムの選び方には自由度があるのに対して，$(\rho^\varepsilon,S^\varepsilon)$ の解くシステムの選び方には自由度がない ((5.3) においては実部と虚部に分ける他ない)．[2]

---

[2] しかし，実は解 u^ε が滑らかさを保つ限り必ず (3.2) の解を用いて $u^\varepsilon=a^\varepsilon e^{i\phi^\varepsilon/\varepsilon}$ ように書き表わせることが 2 次元における (SP) の場合には知られている ([19]).

5.3 WKB 近似による古典極限の解析

非線型 Schrödinger 方程式の解の WKB 近似を得るためには, (3.2) の解を

$$a^\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots + \varepsilon^n a_n + o(\varepsilon^n),$$
$$\phi^\varepsilon = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \cdots + \varepsilon^n \phi_n + o(\varepsilon^n)$$

と展開して $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i\phi^\varepsilon/\varepsilon}$ に代入するのであった. このとき, この解の表示と Madelung 変換を組み合わせれば,

$$\rho^\varepsilon = |a^\varepsilon|^2, \qquad \rho^\varepsilon v^\varepsilon = \rho^\varepsilon \nabla S^\varepsilon = |a^\varepsilon|^2 \nabla \phi^\varepsilon + \varepsilon \operatorname{Im} \overline{a^\varepsilon} \nabla a^\varepsilon$$

によって量子流体の方程式の解が得られることが分かる. この表示式に上の a^ε, ϕ^ε の展開を代入すれば ρ^ε, $\rho^\varepsilon v^\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ の収束だけでなくより高次の展開までも求めることができる. 定理 3.3 や定理 3.4, 定理 3.5 を用いることで対応するモデルに対しての結果が得られるがここでは詳しく述べない.

量子流体の方程式では量子圧力項に ρ^ε の負べきが現れているので, 真空 $\rho^\varepsilon = 0$ が存在する状況では解析に繊細な注意が必要になる. このような $\rho^\varepsilon = 0 (\Leftrightarrow u^\varepsilon = 0)$ となる点は量子渦として知られており, Bose-Einstein 凝縮などの物理学の分野ではその運動が実験や数値実験によって盛んに研究されている. 一方, (3.2) の解析ではそのような a^ε の零点に対する注意は全く不要である. この違いの理由は, $\rho^\varepsilon > 0$ では

$$\nabla S^\varepsilon = \nabla \phi^\varepsilon + \varepsilon \operatorname{Im} \frac{\nabla a^\varepsilon}{a^\varepsilon}$$

と書けることを考えると, ∇S^ε が零点周りで非常に複雑な動きを示す性質の悪い部分 (量子渦) とそれ以外の比較的性質の良い部分の両方を含んでしまっているのに対して, ϕ^ε はその後者だけを含み, 偏角だけをみると性質の悪い前者の部分が a^ε(の偏角) の方にうまく押し付けられているため, と解釈できる.

参考文献

[1] T. Alazard and R. Carles, *Semi-classical limit of Schrödinger–Poisson equations in space dimension $n \geqslant 3$*, J. Differential Equations **233** (2007), no. 1, 241–275.

[2] ———, *Supercritical geometric optics for nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **194** (2009), no. 1, 315–347.

[3] ———, *WKB analysis for the Gross-Pitaevskii equation with non-trivial boundary conditions at infinity*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **26** (2009), no. 3, 959–977.

[4] R. Carles, *Cascade of phase shifts for nonlinear Schrödinger equations*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4** (2007), no. 2, 207–231.

[5] ———, *Geometric optics and instability for semi-classical Schrödinger equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **183** (2007), no. 3, 525–553.

[6] ———, *Semi-classical analysis for nonlinear Schrödinger equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

[7] R. Carles and S. Masaki, *Semiclassical analysis for Hartree equations*, Asymptotic Analysis **58** (2008), no. 4, 211–227.

[8] D. Chiron and F. Rousset, *Geometric optics and boundary layers for Nonlinear-Schrödinger Equations*, Comm. Math. Phys. **288** (2009), no. 2, 503–546.

[9] B. Desjardins, C.-K. Lin, and T.-C. Tso, *Semiclassical limit of the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. **10** (2000), no. 2, 261–285.

[10] I. Gasser, C.-K. Lin, and P. A. Markowich, *A review of dispersive limits of (non)linear Schrödinger-type equations*, Taiwanese J. Math. **4** (2000), no. 4, 501–529.

[11] P. Gérard, *Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993, École Polytech., Palaiseau, 1993, pp. Exp. No. XIII, 13.

[12] ———, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 5, 765–779.

[13] E. Grenier, *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 2, 523–530.

[14] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, second ed., Springer Study Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Distribution theory and Fourier analysis.

[15] A. Jüngel and S. Wang, *Convergence of nonlinear Schrödinger-Poisson systems to the compressible Euler equations*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 5-6, 1005–1022.

[16] H. Li and C.-K. Lin, *Semiclassical limit and well-posedness of nonlinear Schrödinger-Poisson systems*, Electron. J. Differential Equations (2003), No. 93, 17 pp. (electronic).

[17] F. Lin and P. Zhang, *Semiclassical limit of the Gross-Pitaevskii equation in an exterior domain*, Arch. Ration. Mech. Anal. **179** (2006), no. 1, 79–107.

[18] H. Liu and E. Tadmor, *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger-Poisson equation with subcritical initial data*, Methods Appl. Anal. **9** (2002), no. 4, 517–531.

[19] S. Masaki, *Local existence and WKB approximation of solutions to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space*, Comm. Partial Differential Equations, to appear.

[20] ———, *Cascade of phase shifts and creation of nonlinear focal points for supercritical semiclassical Hartree equation*, archived as `arXiv:0807.2321`, 2008.

[21] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[22] M. E. Taylor, *Partial differential equations. III*, Applied Mathematical Sciences, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1997, Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.

[23] L. Thomann, *Instabilities for supercritical Schrödinger equations in analytic manifolds*, J. Differential Equations **245** (2008), no. 1, 249–280.

[24] P. Zhang, *Wigner measure and the semiclassical limit of Schrödinger-Poisson equations*, SIAM J. Math. Anal. **34** (2002), no. 3, 700–718 (electronic).

[25] P. Zhang, Y. Zheng, and N. J. Mauser, *The limit from the Schrödinger-Poisson to the Vlasov-Poisson equations with general data in one dimension*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), no. 5, 582–632.