

# 1次元シュレーディンガー方程式の完全WKB解析 — 基礎理論と最近の発展について —

小池達也

神戸大学大学院理学研究科

## 目次

§0. はじめに	1
§1. WKB 解と Borel 総和法	2
§1.1. WKB 法と WKB 解	2
§1.2. WKB 解と Borel 総和法	5
§2. 単純変わり点近傍での接続公式	12
§2.1. 接続公式	13
§2.2. 例:調和振動子の固有値の計算	14
§2.3. Airy 方程式の WKB 解の接続公式	16
§2.4. 変換論を用いた接続公式の証明方法	20
§3. 単純極近傍での接続公式	25
§3.1. WKB 解と Stokes 曲線	26
§3.2. 接続公式	27
§3.3. 接続公式の証明の概略	27

## §0. はじめに

WKB 法はシュレーディンガー方程式の近似解法の一つとして知られ、歴史的には量子現象を理解するのに役立てられてきた。その特徴として、前期量子論における量子化との関連が見易く、また、トンネル現象などの記述にも優れる。これは、数学の言葉では、固有値の満たす方程式の導出や解の Stokes 現象の記述に優れた方法であることを意味しており、大域的な問題への応用が期待できる。そのため WKB 法は、また、多くの数学者により研究されてきた (例えば、[F], [S], [W]などを参照のこと。)

このように近似法として研究されてきた WKB 法に新しい視点からアプローチしたのが Voros である ([V]). Voros は WKB 解に Borel 総和法を適用することで WKB 法を (近似法ではなく) exact な解析にすることを試みた. 本稿での完全 WKB 解析 (exact WKB analysis) とは, この Voros により始められた Borel 総和法にもとづいた WKB 法のことである.

本稿では 1 次元シュレーディンガー方程式の完全 WKB 解析の基本事項について概説する. 具体的には §1 で WKB 解の構成を説明し, §2 では単純変わり点近傍における WKB 解の Borel 和の接続公式を説明する. また, その応用例として調和振動子の固有値問題を取り上げた. §3 ではポテンシャルの単純極での WKB 解の Borel 和の接続公式を紹介した.

完全 WKB 解析の入門的な解説として, resurgent function theory にもとづいた [DP] や超局所解析にもとづいた [KT] がある. 本稿では [KT] の方法に沿う形で議論を進める. 従って, 例えば変わり点の近傍での解析は (microdifferential operator を用いた) 方程式の変換を用いて行なわれる. より詳細な理論の展開については [KT] を参照されたい. これらの入門的な文献が出版されて後, 1 次元シュレーディンガー方程式に限っても幾つかの進展があった. 本稿ではそれらのうち, WKB 解の Borel 総和可能性 (例えば [Ko4]), 単純変わり点や単純極への変換級数の Borel 総和可能性 ([KKo]) についても紹介している.

\* \* \*

本稿は 2010 年度に数理解析研究所で開催された RIMS 研究集会「準古典解析における諸問題」での筆者の講演をもとに作成したものです. 2009 年夏頃から WKB 解の Borel 総和可能性の証明に取り組んできたこともあって, この研究集会での講演は自分の知識を整理し, 再確認するのにとても役立ちました. 講演の機会を与えてくれた研究代表者である渡部拓也 (立命館大学) 氏に深く感謝します.

## §1. WKB 解と Borel 総和法

### §1.1. WKB 法と WKB 解

◎ 考える方程式 1 次元シュレーディンガー方程式は

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi = E\psi \quad (1.1)$$

で与えられる. ここで  $U(x)$  はポテンシャル,  $E$  は固有値と呼ばれる. また  $\hbar$  はプランク定数であり, WKB 法ではこの  $\hbar$  を小さいパラメータとみなして  $\hbar$  による展開を考えるため, 重要なパラメータである. 方程式 (1.1) において  $\hbar = 0$  とすると微分方程式でなくなることからわかるように, WKB 法は特異摂動の問題である. 本稿では Borel 変換における記号の便宜のためプランク定数  $\hbar$  の代わりに, その逆数である大きいパラメータ

$$\eta = 1/\hbar \quad (1.2)$$

を用いる。また方程式は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x)\right) \psi = 0 \quad (1.3)$$

として考える (方程式 (1.1) は (1.3) において  $Q(x) = 2(U(x) - E)$  とすれば得られる)。方程式 (1.1) の場合にならって、 $Q(x)$  を (1.3) のポテンシャルと呼ぶこともある。以下では方程式を複素平面で考える。幾つかの定理の仮定の記述の簡単のため、 $Q(x)$  は多項式として考える場合が多いが、有理関数であっても (特異点に注意をする必要があるが) 同様の結果が成立する。

◎ **WKB 解の構成** これからの解析の中心となる方程式 (1.3) の WKB 解とは

$$\psi(x, \eta) = \exp\left(\int^x S(x, \eta) dx\right), \quad (1.4)$$

$$S(x, \eta) = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \dots \quad (1.5)$$

の形をした解のことである。最初にこの WKB 解を構成しよう。まず (1.4) を方程式 (1.3) に代入することで、 $S(x, \eta)$  が Riccati 方程式

$$S^2 + \frac{dS}{dx} = \eta^2 Q(x) \quad (1.6)$$

の解ならば、(1.4) は (1.3) の解になることがわかる。そこで展開 (1.5) を (1.6) に代入し、 $\eta$  の次数毎に比較すると

$$S_{-1}^2 = Q(x), \quad (1.7)$$

$$2S_{-1}S_n + \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-j} + \frac{dS_{n-1}}{dx} = 0 \quad (n \geq 0) \quad (1.8)$$

を得る。まず (1.7) より  $S_{-1}(x) = \pm\sqrt{Q(x)}$  を得る。また (1.8) より  $S_n(x)$  は  $S_{-1}(x)$  を固定するごとに帰納的に一意に定まる。従って (1.6) の二つ巾級数解

$$S^{(\pm)}(x, \eta) = \eta S_{-1}^{(\pm)}(x) + S_0^{(\pm)}(x) + \eta^{-1} S_1^{(\pm)}(x) + \dots \quad (1.9)$$

が得られた。具体的に最初の数項を記すと

$$S_{-1}^{(\pm)}(x) = \pm\sqrt{Q(x)}, \quad S_0^{(\pm)}(x) = -\frac{Q'(x)}{4Q(x)}, \quad S_1^{(\pm)}(x) = -\frac{5}{32} \frac{Q'^2}{Q^{5/2}} + \frac{Q''}{8Q^{3/2}} \quad (1.10)$$

となる。この  $S^{(\pm)}(x, \eta)$  と (1.4) より、方程式 (1.3) の二つの解

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \exp\left(\int^x S^{(\pm)}(x, \eta) dx\right) \quad (1.11)$$

が得られた。これが WKB 解である。

◎ Riccati 方程式の解の性質と WKB 解の別の表示 WKB 解 (1.11) を使い易い形に変形するために、もう少し Riccati 方程式 (1.6) の巾級数解 (1.9) の性質を調べる。まず漸化式 (1.8) を用いて

$$S_n^{(-)}(x) = (-1)^n S_n^{(+)}(x) \quad (n \geq -1) \quad (1.12)$$

が成立することが帰納法によりわかる。このことから  $S^{(\pm)}(x, \eta)$  は

$$S^{(\pm)}(x, \eta) = \pm S_{\text{odd}}(x, \eta) + S_{\text{even}}(x, \eta) \quad (1.13)$$

の形をしている。ここで

$$S_{\text{odd}}(x, \eta) = \sum_{j \geq 0} \eta^{1-2j} S_{2j-1}(x), \quad S_{\text{even}}(x, \eta) = \sum_{j \geq 0} \eta^{-2j} S_{2j}(x) \quad (1.14)$$

であり、それぞれの初項は

$$S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}, \quad S_0(x) = -\frac{Q'(x)}{4Q(x)} \quad (1.15)$$

となる。この  $S_{\text{odd}}(x, \eta)$  と  $S_{\text{even}}(x, \eta)$  について次が成立する。

**命題 1.1** ([KT, (2.9), p.15])

$$S_{\text{even}}(x, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}(x, \eta). \quad (1.16)$$

(証明) 解 (1.13) を Riccati 方程式 (1.6) にそれぞれ代入して、辺々を引けば

$$2S_{\text{even}}S_{\text{odd}} + \frac{dS_{\text{odd}}}{dx} = 0 \quad (1.17)$$

を得る。これを  $S_{\text{even}}$  について解けば良い。□

従って

$$\int^x S^{(\pm)}(x, \eta) dx = \pm \int^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx - \frac{1}{2} \log S_{\text{odd}}(x, \eta) \quad (1.18)$$

となり、WKB 解は

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_{x_0}^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (1.19)$$

( $x_0$  は適当な定点) と表わせる。完全 WKB 解析を応用する際は WKB 解をこの形で考えることが多い。

**注意 1.2** 解 (1.19) において  $S_{\text{odd}}(x, \eta)$  を初項  $S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$  で置き換えて得られる

$$\varphi_{\pm}^{\text{WKB}}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \exp\left(\pm \eta \int^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \quad (1.20)$$

が WKB 法で良く使われている近似解である。

## §1.2. WKB 解と Borel 総和法

前節で構成した WKB 解 (1.11) (あるいは (1.19)) は一般には収束しない。従ってそのままでは意味をなさない。この (1.11) を漸近解と考えるのは一つの有力な方法である ([F], [S], [W] など) が, Voros は Borel 総和法を適用することで (1.11) に解析的な意味を与えた。

### ◎ Borel 総和法 指数項を伴う無限級数

$$f(\eta) = e^{s\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n-\alpha} f_n \quad (s, f_n \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}) \quad (1.21)$$

に対して, その Borel 変換  $B[f]$  (これをまた添字を付けた  $f_B$  で表わす) を

$$B[f](y) = f_B(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)} (y+s)^{n+\alpha-1} \quad (1.22)$$

として定義する。この  $f_B(y)$  が  $y = -s$  の近傍で収束するための必要十分条件は, ある定数  $A, B > 0$  が存在して

$$|f_n| \leq AB^n n! \quad (n \geq 0) \quad (1.23)$$

が成立することである。従って, もとの級数  $f$  が収束級数でなくても  $\{f_n\}$  が上記条件を満たしていれば,  $y = -s$  の近傍で解析関数を定める。さらにこの Borel 変換  $f_B(y)$  が

- (i)  $y$  平面における半直線  $\{-s+t; t \geq 0\}$  を含む帯状領域 (図 1) に沿って解析接続でき,
- (ii) ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して (i) の領域において  $|f_B(y)| \leq C_1 e^{C_2|y|}$ .

が成立する時,  $f$  は Borel 総和可能であるといい,  $f$  の Borel 和  $F$  を

$$F(\eta) = \int_{-s}^{\infty} e^{-\eta y} f_B(y) dy \quad (1.24)$$

(積分路は正の実軸に平行に取る) により定義する<sup>1</sup>.

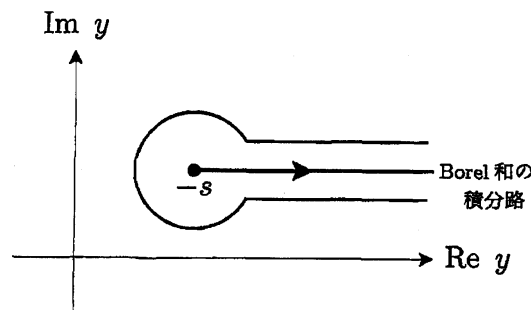


図 1: 帯状領域と Borel 和の積分路。

<sup>1</sup>  $\text{Re } \alpha < 0$  の時 (1.24) の被積分関数は  $y = -s$  において可積分ではない。その場合は, 複素解析でよくするように, 周回積分として定義する。

例えば  $f(\eta)$  が収束級数である場合を考えてみよう (簡単のため  $\alpha = 1, s = 0$  とする). この場合は  $|f_n| \leq AB^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) という評価が成立するために  $f_B(y)$  は整函数となり条件 (i) は成立する. さらに

$$|f_B(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n|}{\Gamma(n+1)} |y|^n \leq Ae^{B|y|} \quad (1.25)$$

と評価されるので条件 (ii) も成立する. 従って  $f$  は Borel 総和可能となるが, (1.24) においてガンマ関数の積分表示式から従う

$$e^{\eta s} \eta^{-n-\alpha} = \int_{-s}^{\infty} e^{-\eta y} \frac{(y+s)^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} dy \quad (1.26)$$

を用いれば,  $F(\eta) = f(\eta)$  となることがわかる. このように  $f$  が収束級数の場合は  $f$  の Borel 和は  $f$  自身となる. その意味で Borel 総和法は「総和法」になっている.

級数  $f$  が収束級数でなくても条件 (i) 及び (ii) が満たされていれば, Borel 和を考えることによりある解析関数に対応させることができる. その場合は  $f$  は Borel 和  $F$  の  $\eta \rightarrow \infty$  における漸近級数となることがわかる (証明は例えば [E] を参照のこと). Voros のアイデアは (一般には収束しない) WKB 解を Borel 総和法を適用することで真の解に対応させる, というものである.

◎ 変わり点と Stokes 曲線 WKB 解に Borel 総和法を適用する場合は, WKB 解 (1.19) を

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \exp \left[ \pm \eta \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(x) \eta^{-n-1/2} \quad (1.27)$$

と展開して考える<sup>2</sup>. WKB 解  $\psi_{\pm}$  の Borel 変換は

$$\psi_{\pm, B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm, n}(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y \pm y_0(x))^{n-1/2} \quad (1.28)$$

ただし

$$y_0(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \quad (1.29)$$

であり, これが

$$\left\{ y; \operatorname{Re} y \geq \operatorname{Re} (\mp y_0(x)), \operatorname{Im} y = \operatorname{Im} (\mp y_0(x)) \right\} \quad (1.30)$$

に沿う带状近傍に解析接続できる場合に, WKB 解の Borel 和を

$$\Psi_{\pm}(x, \eta) = \int_{\mp y_0(x)}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_{\pm, B}(x, y) dy \quad (1.31)$$

として定義する (以上, 複号同順). ただし, 今の場合は係数に  $x$  をパラメータとして含む  $\eta$  の級数を考えることになる. 従って WKB 解が Borel 総和可能になるかどうかは  $x$

<sup>2</sup> $\eta$  の中にある  $1/2$  は (1.19) における  $\sqrt{S_{\text{odd}}}$  からきている.

に依存して決まる。これから導入する変わり点や Stokes 曲線は、完全 WKB 解析においては、WKB 解が Borel 総和可能となる領域を指定する役割を担う。

まず**変わり点** (turning point) は  $Q(x)$  の零点として定義される<sup>3</sup>。特に一位の零点の場合は単純な変わり点と呼ぶ。漸化式 (1.8) からわかるように、 $S_j(x)$  は変わり点において特異性を持つ。しかも、一般には  $j$  が大きくなるにつれその特異性は悪くなる。例えば  $x = a$  が単純な変わり点であれば、 $x = a$  の近傍で

$$S_j(x) = (x - a)^{-\frac{3}{2}j-1} \times (x = a \text{ で正則な関数}) \quad (1.32)$$

となる。しかし、変わり点は方程式の (1.3) の正則点でもあり、解はその点で特異性を持たない。この変わり点における  $S_j(x)$  の特異性は形式解の構成により生じた特異性である。

変わり点  $a$  に対して  $a$  を端点とする Stokes 曲線を

$$\text{Im} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0 \quad (1.33)$$

として定義する。例えば  $Q(x) = x$  の場合は原点が変わり点であり、

$$\int_0^x \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} r^{3/2} e^{3i\theta/2} \quad (x = re^{i\theta}) \quad (1.34)$$

であるから Stokes 曲線は  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$  方向の 3 本の半直線となる (図 2 を参照のこと)。一般に単純な変わり点に対し、それを端点とする Stokes 曲線は 3 本となる ( $\sqrt{Q(x)}$  を Taylor 展開することで示せる)。図 3~5 に変わり点と Stokes 曲線の例を挙げる。図よりわかるように、Stokes 曲線は複素平面を分割する。個々の領域を Stokes 領域と呼ぶ。また、全ての変わり点と Stokes 曲線を合わせて、Stokes 幾何 (Stokes geometry) という。

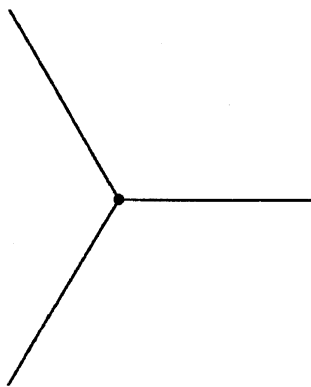


図 2:  $Q(x) = x$  の Stokes 曲線。

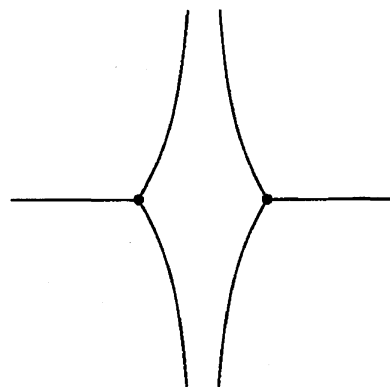


図 3:  $Q(x) = x^2 - 1$  の Stokes 曲線。

<sup>3</sup>変わり点の名前の由来は、その点が、古典領域と非古典領域の境目になるからである。つまり、方程式 (1.1) に対応する Newton の運動方程式を考えると、その解の動ける範囲は  $U(x) \leq E$  に限られる。この範囲を古典領域と呼ぶ。量子力学で考えると、量子効果により非古典領域である  $U(x) > E$  にも粒子は“滲み出す”。

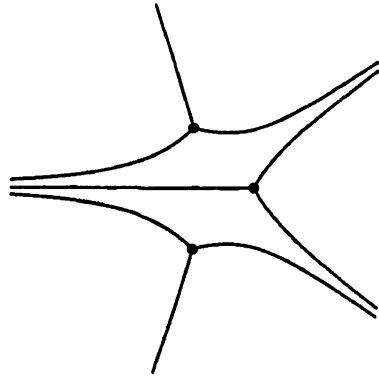


図4:  $Q(x) = (1-x)(x^2+1)$  の Stokes 曲線.

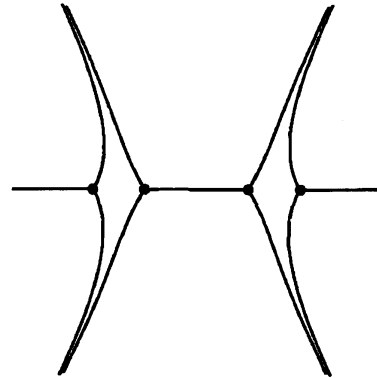


図5:  $Q(x) = (x^2-1)(x^2-4)$  の Stokes 曲線.

### 注意 1.3 Stokes 曲線は

$$\operatorname{Im} \sqrt{Q(x)} dx = 0 \quad (1.35)$$

で定まるベクトル場の積分曲線であり、

- (i)  $Q(x)$  の零点 (つまり変わり点)
- (ii)  $Q(x)$  の特異点 ( $Q(x)$  が多項式の場合は無限遠点)

まで Stokes 曲線を延長できる。従って Stokes 曲線の端点の一方は (定義により) 変わり点であるが、他方は変わり点であるか  $Q(x)$  の特異点となる。図2, 図3, 図4 で図示した Stokes 曲線は全て一方の端点が変わり点であり、他方の端点は特異点となる。図5 には両端を変わり点とする Stokes 曲線が存在している。このように、ある二つの変わり点が存在し、それを両端とする Stokes 曲線が存在するとき、Stokes 幾何は退化する、という。また以下では (ii) の場合「 $a$  を端点とする Stokes 曲線は無限遠点に流れ込む」と表現することにする。

◎ **WKB 解の Borel 総和可能性** さて、WKB 解の Borel 総和可能性の結果を紹介する。記述の簡単のため、以下では  $Q(x)$  は多項式であるとする。

**定理 1.4** 方程式 (1.3) の WKB 解 (1.19) は  $x_0$  から  $x$  への積分路が Stokes 曲線を横切らない限り、Borel 総和可能である。

つまり、Stokes 曲線は WKB 解が Borel 総和可能であるような  $x$  の領域の境界を与え、積分路が Stokes 領域内にある限り WKB 解は Borel 総和可能になる。

このように、個々の Stokes 領域において WKB 解の Borel 和は確定し、方程式 (1.3) の解を与える。では、それらの解の関係はどのようになるだろうか。つまり、ある Stokes 領域で確定させた WKB 解の Borel 和を隣りの Stokes 領域に解析接続させるとどのような表示を持つだろうか。それを記述するのが §2 や §3 で紹介する WKB 解の接続公式である。次節では単純な変わり点での接続公式を論じるが、そこでは次の WKB 解の正規化が便利である。



**定義 1.5** 単純な変わり点  $a$  に対して,  $a$  で正規化された WKB 解を

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (1.36)$$

として定義する. 但し, 積分は図 6 のように周回積分として定義する:

$$\int_a^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma_x} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx. \quad (1.37)$$

( $S_{2j-1}$  は  $x = a$  において (1.32) のように平方根型の特異性を持っていたことに注意.)

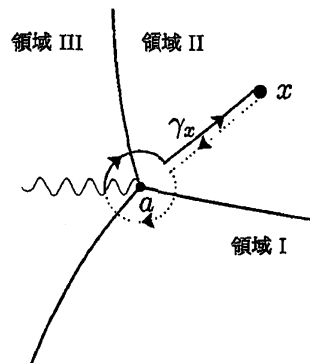


図 6: 積分路  $\gamma_x$ . 波線は  $\sqrt{Q(x)}$  の分枝を定めるカット.

単純変わり点  $a$  で正規化された WKB 解の Borel 総和可能性については次が成立する.

**定理 1.6**  $a$  を単純変わり点とし, その  $a$  を端点とする 3 本の Stokes 曲線のもう一方の端点は無限遠点であるとする. この時, 領域 I, II, III (図 5 を見よ) それぞれにおいて,  $a$  で正規化された WKB 解は Borel 総和可能.

この定理における仮定「 $a$  を端点とする 3 本の Stokes 曲線のもう一方の端点は無限遠点である」は重要である. この仮定が成立しない場合は WKB 解の Borel 和の定める積分路上に, “fixed singular point” と呼ばれる特異点が現れ, Borel 総和でなくなることが知られている (例えば [AKT2] や [Ko4] を参照のこと).

以上, WKB 解の Borel 総和可能性についての結果を紹介した. これらの証明については [Ko4] を参照のこと. なお, [Ko4] の証明では WKB 解の Borel 総和可能性を直接証明するのではなく, Riccati 方程式 (1.6) の解 (1.9) の Borel 総和可能性をまず証明し, 上記の二つの定理はその帰結して示される.

◎ 補足: WKB 解の Borel 変換の正則域について WKB 解が Borel 総和可能である場合, WKB 解  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  の ( $\eta$  についての) Borel 変換  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  は  $y$  について (1.30) に沿う帯状近傍に解析接続でき, そこには特異点がないことがわかる. 従って  $y$  平面内におい

て  $\arg y = 0$  の方向へ解析接続できることになるが<sup>3</sup>, では, 他の方向への解析接続は可能だろうか. また, 特異点はどこにあるのだろうか. この WKB 解の Borel 変換  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  の解析接続の問題は, Voros によって “rator method” ([V]) と名付けられた方法を用いて調べることができる. ここでは必要な個所のみ説明しよう.

最初に次の定義をおく.

**定義 1.7** 式 (1.21) で与えられた形式巾級数  $f(\eta)$  に対し, その Borel 変換  $f_B(y)$  が  $y = -s$  の近傍で収束し,

(i)  $y$  平面における半直線  $\{-s + te^{i\theta}; t \geq 0\}$  を含む帯状領域に沿って解析接続でき,

(ii) ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して (i) の領域において  $|f_B(y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$ .

を満たす時,  $f$  は  $\theta$  方向に Borel 総和可能という.

通常の意味での Borel 総和可能性は, この用語を用いると  $\theta = 0$  方向の Borel 総和可能性ということになる.

さて (1.21) で与えられた指数項を伴う  $\eta$  の級数  $f(\eta)$  に対する Borel 変換の公式

$$B[f(\alpha\eta)](y) = B[f]\left(\frac{y}{\alpha}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (1.38)$$

に注意する. この公式で  $\alpha = e^{-i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) を代入すればわかるように

$f(\eta)$  が  $\theta$  方向に Borel 総和可能  $\iff f(e^{-i\theta}\eta)$  が ( $\theta = 0$  方向に) Borel 総和可能.

従って, 方程式 (1.3) の WKB 解  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  の  $\theta$  方向への Borel 総和可能性を調べたければ, 方程式 (1.3) において  $\arg \eta = -\theta$  として考えれば良い. あるいは, ポテンシャルを  $e^{-2i\theta}Q(x)$  に取り替えた方程式の WKB 解の (通常の意味での) Borel 総和可能性を調べれば良い.

一例として  $Q(x) = x^2 - 1$  の場合を考える. この  $Q(x)$  に対する Stokes 曲線は図 3 において図示したが<sup>3</sup>, 任意の  $\theta$  方向の Borel 総和可能性を考えるためには  $\theta$  を動かした時に Stokes 曲線がどのように変化するかを調べる必要がある. 図 8.k に  $\theta = k\pi/10$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ) の場合の Stokes 曲線を図示した ( $11 \leq k \leq 20$  の場合の Stokes 曲線は  $k - 10$  のものと一致する).

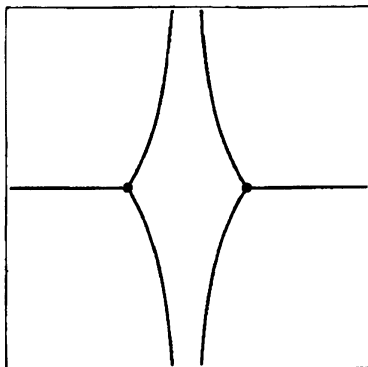


図 8.0 :  $\arg \eta = 0$

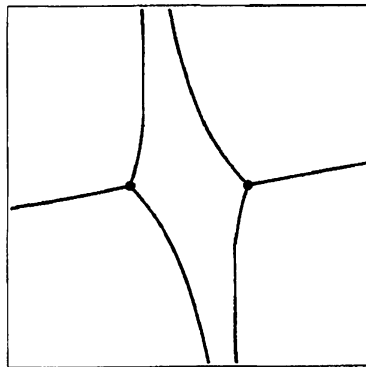


図 8.1 :  $\arg \eta = -\pi/10$

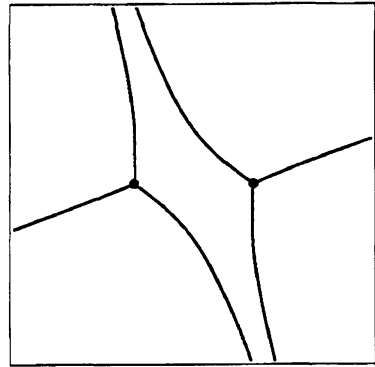


図 8.2 :  $\arg \eta = -2\pi/10$

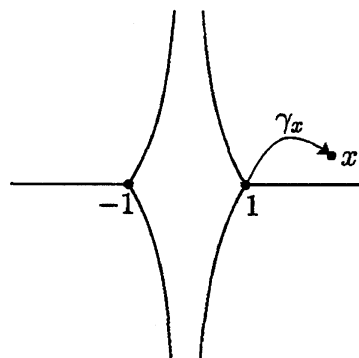
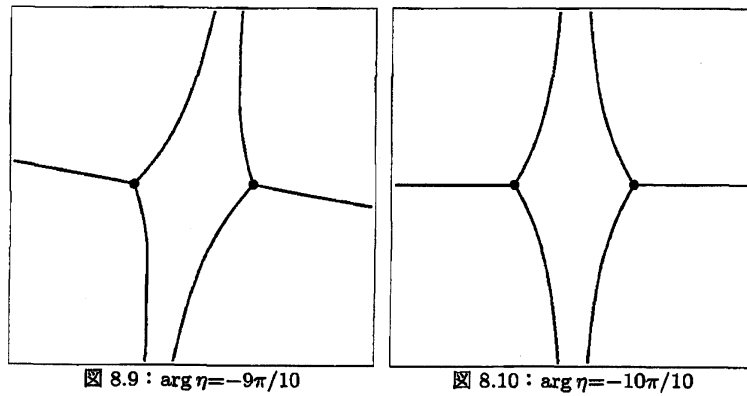
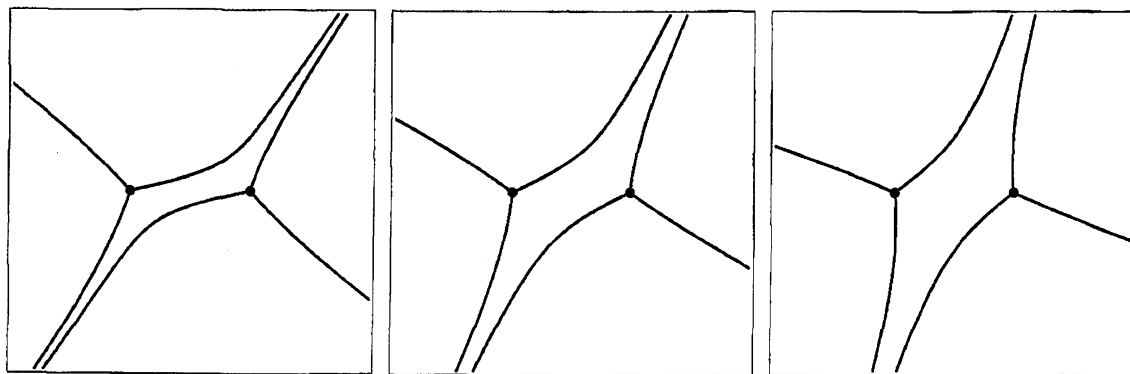
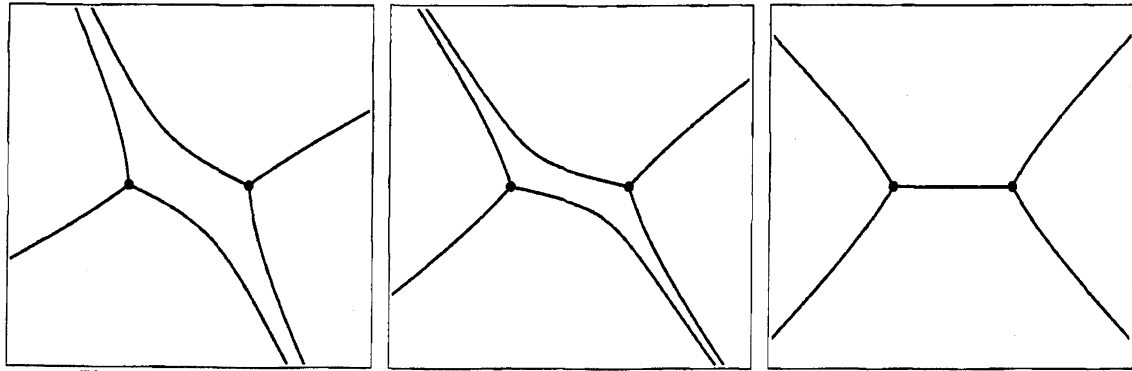


図8: 点  $x$  と経路  $\gamma_x$ .

さて、これらの図をもとに  $\theta$  方向の WKB 解の Borel 総和可能性を調べてみよう。変

わり点 1 (右側の変わり点) で正規化された WKB 解を考える。また点  $x$  は変わり点 1 を端点とする実軸上の Stokes 曲線の少し上側にとって固定する (図 8 を参照のこと)。図では簡単のため経路  $\gamma_x$  は変わり点 1 から  $x$  までの経路として図示しているが、実際には定義 1.5 のような周回積分の積分路である。

まず, Stokes 曲線はそれぞれ  $\arg \eta$  が 0 から  $-\pi$  まで減少するに従って時計回りに回転している。そして,  $\arg \eta$  がある値を取る時に Stokes 曲線は  $x$  を通過することが図からわかるだろう。この時, 定理 1.6 の仮定は満たされず, WKB 解の Borel 総和可能性を保証されない。(なお,  $\gamma_x$  が Stokes 曲線を横切る場合もあるだろうが, その場合でも  $x$  が Stokes 曲線上になれば  $\gamma_x$  を積分値を変えないように変形でき, 総和可能性は保たれる。)

さらに  $\arg \eta$  を変化されていくと  $\arg \eta = -\pi/2$  で変わり点 1 を端点とする Stokes 曲線は変わり点  $-1$  にぶつかる。この場合も定理 1.6 の仮定は満たされない。

このようにして,  $-\pi \leq \arg \eta \leq 0$  の範囲では上述のように正規化された WKB 解の Borel 総和可能性が定理 1.6 によって保証できない方向が 2 方向あることがわかった。範囲を  $-2\pi \leq \arg \eta \leq 0$  で考えると 4 方向あることになる<sup>4</sup>。一般に次が成立する。

**定理 1.8**  $Q(x)$  は多項式とし, 変わり点が全て単純であると仮定する。この場合, 単純な変わり点で正規化した WKB 解は有限個の方向をのぞき Borel 総和可能である。

証明は [Ko4] を参照のこと。

例もそうであったように, 定理 1.6 の仮定が満たされない方向には二種類ある。

(i) 点  $x$  を Stokes 曲線が通過する場合。

この場合,  $y$  平面のその方向に  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  は特異点を (generic には) 一つ持つ。この方向は  $x$  に依存して定まるので, この特異点を WKB 解の動く特異点 (movable singular point) という。動く特異点については単純変わり点の場合に次節 §2 で,  $Q(x)$  の単純極の場合は §3 で説明する。

(ii) 二つの変わり点を結ぶ Stokes 曲線が存在する場合。

この方向には  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  の特異点が周期的に無限個並ぶ。これらの特異点を WKB 解の動かない特異点 (fixed singular point) という。動かない特異点の解析については [DDP], [AKT2], [KKKoT1], [KKKoT2], [KoT] などを見て欲しい。

## §2. 単純変わり点近傍での接続公式

この節では WKB 解の Borel 和の接続公式を紹介する。

<sup>4</sup>なお,  $x = 1$  で正規化した WKB 解であっても  $x$  の位置を虚軸方向に伸びる Stokes 曲線のすぐ右側に取った場合は特異な方向の個数は異なる。実際, その場合は  $[-\pi, 0]$  の範囲で  $\arg \eta$  を変化した時に  $-1$  を端点とする Stokes 曲線も  $x$  を通過する。従って Stokes 曲線が  $x$  を通過する方向は 2 方向ある, このことから  $-2\pi \leq \arg \eta \leq 0$  の範囲では 6 方向の特異な方向があることになる。このように  $x$  の位置によって特異な方向の個数は変化する。

## §2.1. 接続公式

接続公式を記述するために次の定義をおく.

**定義 2.1** 変わり点  $a$  を端点とする Stokes 曲線  $\Gamma$  において

$$\operatorname{Re} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx > 0 \quad \text{along } \Gamma \quad (2.1)$$

が成立する場合,  $\Gamma$  上で WKB 解  $\psi_+$  は dominant,  $\psi_-$  は subdominant であるという. また,

$$\operatorname{Re} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx < 0 \quad \text{along } \Gamma \quad (2.2)$$

であれば  $\Gamma$  上で WKB 解  $\psi_+$  は subdominant,  $\psi_-$  は dominant であるという.

### 注意 2.2

- (i) Stokes 曲線上では  $\operatorname{Re} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$  は単調に変化する. 従って上述の定義は well-defined である. また, これらの dominance relation は  $\sqrt{Q}$  の分枝を確定した上で決まることにも注意.
- (ii) (1.27) より  $\psi_+$  が dominant であれば,  $\psi_-$  と比べて  $\psi_+$  が指数的に大きいことがわかる. 逆に  $\psi_-$  が dominant であれば,  $\psi_-$  は  $\psi_+$  に対して指数的に大きい.

図 9 に  $Q(x) = x^2/4 - E$  ( $E > 0$ ) の場合の dominance relation を示した ( $\sqrt{Q(x)}$  の分枝は  $[-2\sqrt{E}, 2\sqrt{E}]$  にカットを引いた上で  $x > 2\sqrt{E}$  のとき  $\sqrt{Q(x)} > 0$  としている). 但し, Stokes 曲線に付随して記入されている符号が dominance relation を表わしていて, + の場合は  $\psi_+$  が dominant であり, - の場合は  $\psi_-$  が dominant であることを意味する.

では, 単純な変わり点での WKB 解の接続公式を述べよう.

**定理 2.3** ([V]. [AKT2, KT, 定理 2.23] も参照のこと.)

$Q(x)$  を多項式, 点  $a$  を単純な変わり点とし,  $a$  を端点とする 3 本の Stokes 曲線は全て無限遠に流れ込むものとする. また  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  を方程式 (1.3) の  $a$  で正規化した WKB 解とする (定義 1.5). そして図 6 における領域 I での  $\psi_{\pm}$  の Borel 和を  $\Psi_{\pm}^{(I)}$ , 領域 II での  $\psi_{\pm}$  の Borel 和を  $\Psi_{\pm}^{(II)}$  とする. 領域 I と領域 II の境界である Stokes 曲線において  $\psi_+$  が dominant であれば,  $\Psi_{\pm}^{(I)}$  を領域 II に解析接続した時

$$\Psi_+^{(I)} = \Psi_+^{(II)} + i\Psi_-^{(II)}, \quad \Psi_-^{(I)} = \Psi_-^{(II)} \quad (2.3)$$

が成立する. また, 領域 I と領域 II の境界である Stokes 曲線において  $\psi_+$  が subdominant であれば,

$$\Psi_-^{(I)} = \Psi_-^{(II)} + i\Psi_+^{(II)}, \quad \Psi_+^{(I)} = \Psi_+^{(II)} \quad (2.4)$$

が成立する.

領域 II から領域 III の解析接続も同様である。このようにして隣り合う WKB 解の Borel 和の関係が与えられる。

#### 注意 2.4

- (i)  $Q(x)$  が有理関数であっても適当な仮定のもと上述の定理が成立する。
- (ii) 以下、簡単のために (2.3) を、

$$\psi_+ \longrightarrow \psi_+ + i\psi_-, \quad \psi_- \longrightarrow \psi_- \quad (2.5)$$

と記述する。

- (iii) (2.3) あるいは (2.5) のように WKB 解の Borel 和を解析接続した際に表示が変わることを「WKB 解の Stokes 現象」と呼ぶ。

### §2.2. 例: 調和振動子の固有値の計算

この小節では、接続公式の応用例として

$$Q(x) = \frac{1}{4}x^2 - E \quad (E > 0) \quad (2.6)$$

の場合に固有値問題を考察する。以下では  $\sqrt{Q(x)}$  の分枝を確定させるために、 $[-2\sqrt{E}, 2\sqrt{E}]$  にカットを入れ、 $x > 2\sqrt{E}$  の時  $\sqrt{Q(x)} > 0$  であるとする。この場合の Stokes 曲線や dominance relation を図 9 に図示した。

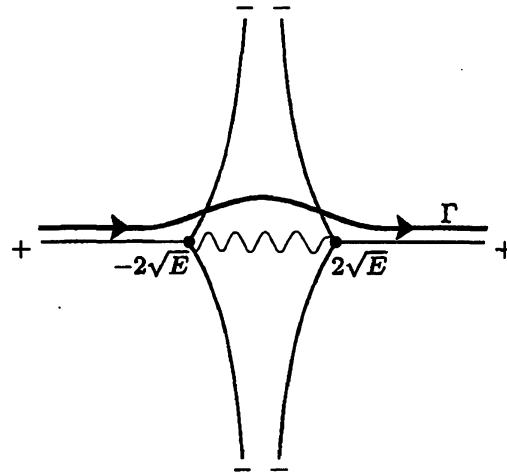


図 9: (2.6) に対する Stokes 曲線。

固有値問題を考える際の境界条件は

$$x \rightarrow \pm\infty \quad \text{の時} \quad \psi(x) \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

である。図 9 に図示した dominance relation を考えると  $x \rightarrow \pm\infty$  での境界条件を満たす解は共に  $\psi_-$  であることがわかる。そこで  $\psi_{\pm}$  を左側の変わり点  $-2\sqrt{E}$  で正規化した WKB 解

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_{-2\sqrt{E}}^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (2.8)$$

とし、 $x \rightarrow -\infty$  で境界条件を満たす解  $\psi_-$  を図9中の経路  $\Gamma$  に沿って  $+\infty$  に解析接続させよう。

経路  $\Gamma$  はまず最初に変わり点  $-2\sqrt{E}$  から上方に伸びる Stokes 曲線を横切る。この Stokes 曲線上では  $\psi_-$  が dominant であるから、WKB 解 (の Borel 和) を解析接続する際

$$\psi_- \longrightarrow \psi_- - i\psi_+ \quad (2.9)$$

となる (今の場合は定理 2.3 と異なり Stokes 曲線を反時計回りに横切るので  $i$  の前に  $-$  の符号が付く)。

接続の経路  $\Gamma$  が次に横切る ( $2\sqrt{E}$  を端点とする) Stokes 曲線でもやはり  $\psi_-$  が dominant である。しかし、この Stokes 曲線上で定理 2.3 を適用する際には  $\psi_{\pm}$  の端点の違いに注意しなければならない。接続公式を用いるには、一度

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \exp\left(\pm \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \times \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_{2\sqrt{E}}^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (2.10)$$

と端点の変更を行ない、その上で接続公式を適用すれば良い。その結果は

$$\psi_- - i\psi_+ \longrightarrow \psi_- - i \left\{ 1 + \exp\left(-2 \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}} dx\right) \right\} \psi_+ \quad (2.11)$$

となる。こうして  $\psi_-$  の  $\Gamma$  に沿った解析接続が実行できた。この  $\psi_-$  の解析接続が  $x > 2\sqrt{E}$  で subdominant であれば境界条件が満たされるから、 $E$  は

$$1 + \exp\left(-2 \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}} dx\right) = 0 \quad (2.12)$$

つまり

$$2 \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx = i\pi (2N + 1) \quad (N \in \mathbb{N}_0) \quad (2.13)$$

を満たしていれば良い。これが固有値の満たす方程式である。

今の場合は (2.13) を解くことができる。まず  $S_{2n-1}(x)$  は特異点を  $x = \pm 1, \infty$  にしか持たないことに注意。従って (形式的には、つまり  $\eta$  の次数毎には)

$$2 \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{x=\infty} S_{\text{odd}}(x, \eta) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{1-2n} \operatorname{Res}_{x=\infty} S_{2n-1}(x, \eta) \quad (2.14)$$

となる。ところが漸化式 (1.8) を用いて帰納的に確かめることができるように、 $n \geq 1$  の時  $S_{2n-1}(x)$  は  $x = \infty$  で正則である<sup>5</sup>。よって、

$$2 \int_{-2\sqrt{E}}^{2\sqrt{E}} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx = 2\pi i \eta \operatorname{Res}_{x=\infty} S_{-1}(x, \eta) = 2\pi i \eta E. \quad (2.15)$$

<sup>5</sup>これは不確定特異点の特徴の一つである。

故に (2.13) と (2.15) から, 良く知られた

$$E = \eta^{-1} \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

を得る.

$Q(x)$  が一般の多項式の場合も, Stokes 曲線がわかればこの解析接続の手続きを繰り返すことで (2.13) のような固有値の満たす方程式を導出できる. それを閉じた形で解くのは一般には難しいが, それを足がかりに固有値の性質を調べることはできる. 詳しくは [V] や [DP] 及びそこで挙げられている参考文献を参照のこと.

**注意 2.5** (2.13) でもそうであったように, 完全 WKB 解析を用いて微分方程式の大域的な問題を考察する際には周期積分

$$2 \int_a^{a'} S_{\text{odd}}(x, \eta) dx \quad (2.17)$$

( $a$  と  $a'$  は変わり点) が重要な量となる. [KT] ではこれらの周期積分を用いて Fuchs 型方程式のモノドロミーを記述している.

### §2.3. Airy 方程式の WKB 解の接続公式

接続公式 (定理 2.3) の証明方法は幾つか知られている. WKB 解が Borel 総和可能であることがわかっている場合は [V] の解の一価性を用いた証明が簡明かも知れない<sup>6</sup>. この節で変換論を用いた証明 ([AKT1], [KT] も参照のこと) の概略を紹介するのは, 一つには他の場合への応用 (例えば §3) のこともあり, また, Borel 平面での解析の意味合いがより明示的にわかるからである.

変換論を用いた証明の方針は

- (i) 方程式 (1.3) を単純な変わり点の近傍で Airy 方程式に変換する.
- (ii) Airy 方程式 ( $Q(x) = x$  の場合) の WKB 解について定理を証明する.
- (iii) 変換論を用いて (ii) の結果を方程式 (1.3) の WKB 解の結果へと翻訳する.

となる. この小節では (ii) を説明する. 次の小節 §2.4. で (i) と (iii) について説明する.

Airy 方程式の場合は  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  の係数を具体的に求めることができ,  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  を超幾何関数で表わせる. そして, その  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  の表示を用いて接続公式を導出できる. このように, この小節では計算中心になるので, その概略を紹介する.

<sup>6</sup> 変わり点では特異点を持たないので, 解は変わり点の近傍で一価になる. それを用いた証明方法.



◎ **Airy 方程式の WKB 解** Airy 方程式は (1.3) において  $Q(x) = x$  とした方程式である。この場合の Riccati 方程式 (1.6) の解を計算すると

$$S(x, \eta) = \eta\sqrt{x} - \frac{1}{4x} - \eta^{-1}\frac{5}{32x^{5/2}} - \eta^{-2}\frac{15}{64x^4} - \eta^{-3}\frac{1105}{2048x^{11/2}} + \cdots \quad (2.18)$$

となる。一般に漸化式 (1.8) を用いて  $S_n(x) = c_n x^{-1-3n/2}$  ( $c_n$  は定数) であることが証明できる。従って WKB 解

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp \left[ \pm \int_0^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx \right] \quad (2.19)$$

を (1.27) のように展開すると

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = e^{\pm \frac{2}{3}x^{3/2}\eta} \sum_{n=0}^{\infty} d_{\pm, n} x^{-\frac{3}{2}n - \frac{1}{4}} \eta^{-n - \frac{1}{2}} \quad (d_{\pm, n} \text{ は定数}) \quad (2.20)$$

となる。

**補題 2.6**  $\Gamma(z)$  をガンマ関数として、

$$d_{\pm, n} = \frac{1}{2\pi} \left( \pm \frac{3}{4} \right)^n \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+5/6)}{n!}. \quad (2.21)$$

(証明) 展開 (2.20) を方程式 (1.3) (但し  $Q(x) = x$ ) に代入し、辺々を比較することで  $d_{\pm}$  は漸化式

$$\frac{4}{3}(n+1)d_{\pm, n+1} = \pm \left( n + \frac{1}{6} \right) \left( n + \frac{5}{6} \right) d_{\pm, n} \quad (n \geq 0) \quad (2.22)$$

を満たすことがわかる。これを  $d_{\pm, 0} = 1$  のもとで解けば良い。□

◎ **WKB 解の Borel 変換** WKB 解  $\psi_{\pm}(x, \eta)$  の Borel 変換 (cf. (1.28))

$$\psi_{\pm, B}(x, y) = e^{\pm \frac{2}{3}x^{3/2}\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\pm, n}}{\Gamma(n+1/2)} x^{-\frac{3}{2}n - \frac{1}{4}} \left( y \pm \frac{2}{3}x^{3/2} \right)^{n-1/2} \quad (2.23)$$

の係数にある  $d_{\pm, n}$  に (2.21) を代入することで次を得る。

**命題 2.7**  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  を超幾何関数として、

$$\psi_{+, B}(x, y) = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{1}{x}} s^{-1/2} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s\right) \Big|_{s=\frac{3y}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

$$\psi_{-, B}(x, y) = \sqrt{-\frac{3}{4\pi} \frac{1}{x}} (1-s)^{-1/2} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; 1-s\right) \Big|_{s=\frac{3y}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

**注意 2.8** [KT] では (2.24) 及び (2.25) を WKB 解の Borel 変換が満たす方程式

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{\pm, B} = 0 \quad (2.26)$$

を用いて導出している。面白い方法なので参照されたい。

◎ WKB 解の Borel 和の解析接続 以下, 主として  $\psi_{+,B}$  を考える. 関係式

$$\int_0^x \sqrt{Q} dx = \int_0^x x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \quad (2.27)$$

より,  $\psi_+$  の Borel 和は

$$\Psi_+(x, \eta) = \int_{-\frac{2}{3}x^{3/2}}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_{+,B}(x, y) dy \quad (2.28)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi x}} \int_{-\frac{2}{3}x^{3/2}}^{\infty} e^{-\eta y} \left( \frac{3y}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2} \right)^{-1/2} F\left( \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3y}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2} \right) dy \quad (2.29)$$

但し, 積分路は実軸に平行にとる. 超幾何関数の性質より  $\psi_{+,B}(x, y)$  は

$$s = 0, 1 \iff y = -\frac{2}{3}x^{3/2}, \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (2.30)$$

に特異性を持つ. 最初の特異点は Borel 和 (2.28) の積分端点であるが, 特異性は  $-1/2$  乗なので可積分である<sup>7</sup>. もう一つの特異点  $y = 2x^{3/2}/3$  が (2.28) の積分路上に乗る時, つまり

$$\operatorname{Im} \left[ -\frac{2}{3}x^{3/2} \right] = \operatorname{Im} \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} \right] \iff \operatorname{Im} \left[ -\frac{2}{3}x^{3/2} \right] = 0 \quad (2.31)$$

の時,  $\psi_+$  は Borel 総和可能でない. この条件は  $x$  が  $Q(x) = x$  の Stokes 曲線上にあることと同値である (cf. (1.34)). また  $x$  が Stokes 曲線上にない時, 超幾何関数は  $\infty$  で高々巾程度の増大度なので, 十分大きい  $\eta$  について Borel 和 (2.28) は収束する. 従って

**命題 2.9** Airy 方程式の WKB 解  $\psi_{\pm}$  は  $x$  が Stokes 曲線上にない時 Borel 総和可能.

次に, Stokes 曲線を横切って解析接続する時の WKB 解の Borel 和の接続公式を求める. 領域を

$$\text{領域 I: } \{x \in \mathbb{C}; -\frac{2}{3}\pi < \arg x < 0\}, \quad \text{領域 II: } \{x \in \mathbb{C}; 0 < \arg x < \frac{2}{3}\pi\} \quad (2.32)$$

と定め, 領域 I から領域 II への解析接続を考えよう (図 10).

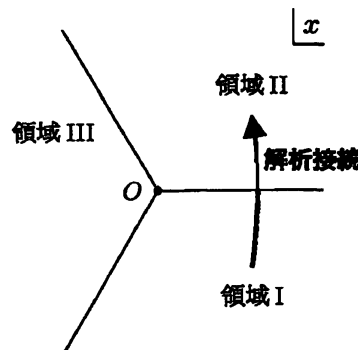


図 10:  $Q(x) = x$  の場合の Stokes 曲線と解析接続の経路.

<sup>7</sup>超幾何関数は  $z = 0$  で正則.

この場合、解析接続の始点での  $y$  平面における  $\psi_{+,B}(x,y)$  の特異点の配置は図 11 のようになる。そして  $x$  平面における解析接続の経路を進むにつれ、特異点は図 11 中の点線

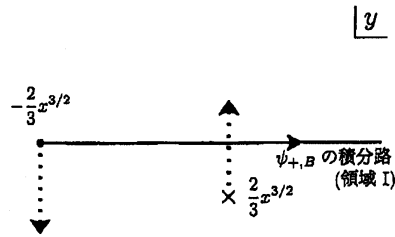


図 11：解析接続の経路の始点での  $\psi_{+,B}$  の特異点と Borel 和の積分路.

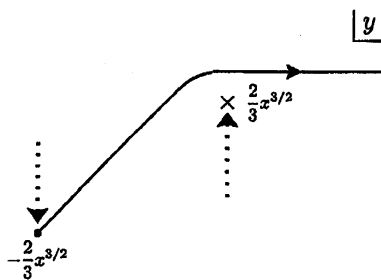


図 12：解析接続の経路の終点での特異点.

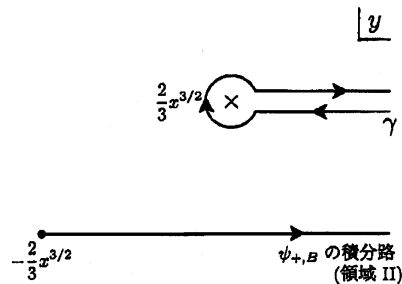


図 13：図 12 の経路の変形.

のように動き、解析接続の終点では図 12 となる。この過程で WKB 解の Borel 和の積分路は特異点によって押し上げられる。図 12 の Borel 和の積分路を図 13 のように変形することで、関係式

$$\Psi_+^{(I)}(x, \eta) = \Psi_+^{(II)}(x, \eta) + \int_{\gamma} e^{-\eta y} \psi_{+,B}(x, y) dy \quad (2.33)$$

を得る。さて、(2.33) の右辺第二項がどのようになるかを調べたい。そのために  $\psi_{+,B}(x, y)$  の  $y = 2x^{3/2}/3$  への解析接続を考える。

**命題 2.10**  $\psi_{+,B}(x, y)$  を  $y = 2x^{3/2}/3$  へ解析接続した時

$$\psi_{+,B}(x, y) = \frac{i}{2} \psi_{-,B}(x, y) + (y = \frac{2}{3} x^{3/2} \text{ で正則な関数}). \quad (2.34)$$

(証明)  $\psi_{+,B}(x, y)$  は (2.24) で与えられており、その  $y = 2x^{3/2}/3$  への解析接続を得るためには超幾何関数の  $s = 0$  から  $s = 1$  への解析接続がわかれば良い。超幾何関数の解析接続は良く知られていて、

$$F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s\right) = \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)} (1-s)^{-1/2} F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1-s\right) + \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/3)\Gamma(-1/3)} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}; 1-s\right) \quad (2.35)$$

が成立する (例えば岩波書店・数学公式3を見よ). この右辺第二項は  $s = 1$  で正則である. 右辺第一項は Kummer の関係式 (やはり岩波書店・数学公式3を見よ)

$$(1-s)^{-1/2} F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1-s\right) = s^{1/2} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; 1-s\right) \quad (2.36)$$

と変形される. これらを用いて (2.34) を得る.  $\square$

解析接続の関係式 (2.34) を (2.33) の右辺第二項に代入すると,

$$\int_{\gamma} e^{-\eta y} \psi_{+,B}(x, y) dy = i \int_{\frac{2}{3}x^{3/2}}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_{-,B}(x, y) dy = i \Psi_{-}^{(II)}(x, \eta) \quad (2.37)$$

を得る. 従って (2.33) と (2.37) より定理 2.3 における (2.3) の第一式が証明された. また図 10 における解析接続の経路に沿って  $x$  が動く時,  $\psi_{-,B}(x, y)$  の (積分端点以外の) 特異点  $y = -2x^{3/2}/3$  は  $\psi_{-}$  の Borel 和の積分路を横切らないため (図 11), 第一式も成立する. 以上で定理 2.3 が  $Q(x) = x$  の場合に証明された.

## §2.4. 変換論を用いた接続公式の証明方法

前小節で Airy 方程式の場合に定理 2.3 を証明した. この小節では一般の場合の証明の概略を述べる. 証明の方針は前小節 §2.3. で述べたように, 一般の方程式 (1.3) を単純変わり点の近傍で  $Q(x) = x$  の場合の方程式に変換することで実行される. 方程式を単純な変わり点の近傍で Airy 方程式に変換するというアイデアは, 「 $Q(x)$  の単純な変わり点での Taylor 展開の初項を取る近似」として WKB 法でも古くから考えられてきた (例えば [LL], [BW] などではそれらが上手く応用されている). 以下で構成する変換も  $\eta$  で考えると形式的な変換である. ところが, Borel 変換を経由して Borel 平面 ( $y$  平面) での解析に持ち込むことで, その形式的な変換を microdifferential operator を用いた変換として解析的に意味付けできる. このようにして変換を exact なものにしたところが, [AKT1] の結果の重要な点の一つである. なお, [K] でも変換論が紹介されているので, 合わせて参照して頂きたい.

◎ **変換級数の構成** 方程式の変換について最初に簡単な事実を思い出そう. 以下の記号の都合のため, 方程式 (1.3) において独立変数を  $z$ , 未知函数を  $\varphi(z, \eta)$  にした

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \eta^2 Q(z)\right) \varphi(z, \eta) = 0 \quad (2.38)$$

を考える. この方程式を独立変数と未知函数の変換により

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 q(x)\right) \psi(x, \eta) = 0 \quad (2.39)$$

に変換したい.

命題 2.11 方程式 (2.38) において

$$x = x(z, \eta), \quad \varphi(z, \eta) = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^{-1/2} \psi(x(z, \eta), \eta) \quad (2.40)$$

として  $\psi(x, \eta)$  が (2.39) を満たしたとすると,  $Q(x, \eta)$  と  $q(z, \eta)$  について関係式

$$Q(z) = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 q(x(z, \eta)) - \frac{1}{2} \eta^{-2} \{x(z, \eta); z\} \quad (2.41)$$

が成立する. ここに  $\{x; z\}$  は Schwartz 微分である.

$$\{x; z\} := \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2} \left( \frac{x''}{x'} \right)^2 \quad ( ' = \frac{d}{dz} ). \quad (2.42)$$

この命題は直接計算により証明できる.

さて, 方程式 (2.38) の単純な変わり点  $a$  の近傍で方程式を (2.39) において  $q(x) = x$  としたものに変換したい. 命題 2.11 より, そのためには  $x(z, \eta)$  を

$$Q(z) = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 x(z, \eta) - \frac{1}{2} \eta^{-2} \{x(z, \eta); z\} \quad (2.43)$$

を満たすように取れば良い. この方程式 (2.43) の解を

$$x(z, \eta) = x_0(z) + \eta^{-1} x_1(z) + \eta^{-2} x_2(z) + \dots \quad (2.44)$$

の形で構成する.

定理 2.12 ([KT, 定理 2.15, p.28])

$Q(z)$  は  $z = a$  において一位の零を持つとする<sup>8</sup>. この時, (2.43) を ( $\eta$  の次数毎に) 満たす級数 (2.44) が存在し, さらに次の性質が成り立つ.

- (i)  $z = a$  の近傍  $U$  が存在して任意の  $j$  に対して  $x_j(z)$  は  $U$  で正則.
- (ii)  $U$  上で  $dx_0/dz \neq 0$ .
- (iii)  $x_{2n+1}(z) \equiv 0$ .

(証明の概略) 詳しい証明は [KT] あるいは [AKT1] を参照してもらうことにして, ここではその概略を示そう. 方針は級数 (2.44) を (2.43) に代入して  $\eta$  の次数毎に比較して得られる方程式を帰納的に解いていくというものである. まず  $\eta$  の 0 次は

$$Q(z) = \left( \frac{\partial x_0}{\partial z} \right)^2 x_0(z) \quad (2.45)$$

となる. これは簡単に解けて

$$x_0(z) = \left( \frac{3}{2} \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz \right)^{3/2} \quad (2.46)$$

<sup>8</sup>つまり  $a$  は方程式 (2.38) の単純な変わり点.

を得る。  $Q(z)$  が  $a$  において一位の零点を持つことから、その Taylor 展開を

$$Q(z) = c(z-a) + \dots \quad (c \text{ は零でない定数}) \quad (2.47)$$

とすると

$$x_0(z) = c^{3/4}(z-a) + \dots \quad (2.48)$$

を得る。よって、ある適当な近傍  $U$  が存在して  $x_0(z)$  は  $U$  で正則かつ  $x_0'(z) \neq 0$  となる。次に  $x_1(z)$  の満たす方程式は

$$x_0' \left( 2x_0 \frac{dx_1}{dz} + x_0' x_1 \right) = 0 \quad (2.49)$$

となる。この方程式の正則解は 0 しかない。故に  $x_1(z) \equiv 0$ 。以下、帰納的に考える。関係式 (2.43) の  $\eta$  の  $n$  次の項を考えると

$$x_0' \left( 2x_0 \frac{dx_n}{dz} + x_0' x_n \right) = f_n(z) \quad (2.50)$$

を得る。ここで右辺の  $f_n(z)$  は  $x_0(z), x_1(z), \dots, x_{n-1}(z)$  で表わされる関数であり、帰納法の仮定より  $U$  において正則である (具体形は [AKT2, (2.74), p.36]) を見よ。方程式 (2.50) の  $z=a$  の近傍での正則解は一意に定まって

$$x_n(z) = \frac{1}{2x_0(z)^{1/2}} \int_a^z \frac{f_n(z)}{x_0(z)^{1/2} x_0'(z)} dz \quad (2.51)$$

で与えられ、これは確かに  $U$  で正則である。また  $n$  が奇数の時は  $f_n(z) \equiv 0$  となって、 $x_n(z) \equiv 0$  を得る。□

さて、このようにして得られた変換級数  $x(z, \eta)$  を用いて方程式 (2.38) の WKB 解の  $z=a$  近傍での接続公式を導出したい。そのためにもう一つ準備をする (§3. での準備も兼ねて少し一般的に述べる)。

**命題 2.13** ([KT, 定理 2.16, p.29])

方程式 (2.38) に付随する Riccati 方程式の  $\eta$  に関する級数解を  $T(z, \eta)$ , (2.39) に付随する Riccati 方程式の級数解を  $S(x, \eta)$  とする。このとき  $x(z, \eta)$  が (2.41) を満たしていれば

$$T(z, \eta) = \frac{\partial x}{\partial z} S(x(z, \eta), \eta) - \frac{1}{2} \frac{x''(z, \eta)}{x'(z, \eta)} \quad (2.52)$$

が成立する。

実際、(2.52) の右辺が  $T(z, \eta)$  が満たす Riccati 方程式の解になっていることを関係式 (2.41) を用いることで示すことができる。関係式 (2.52) の両辺の  $\eta$  に関する奇数次の項を考えることで<sup>9</sup>

$$T_{\text{odd}}(z, \eta) = \frac{\partial x}{\partial z} S_{\text{odd}}(x(z, \eta), \eta) \quad (2.53)$$

<sup>9</sup> $x(z, \eta)$  は  $\eta$  について偶数次の項しかないことに注意。

を得る。このことから、方程式 (2.38) と方程式 (2.39) の WKB 解をそれぞれ

$$\varphi_{\pm}(z, \eta) = \frac{1}{\sqrt{T_{\text{odd}}(z, \eta)}} \exp\left(\pm \int_a^z T_{\text{odd}}(z, \eta) dz\right), \quad (2.54)$$

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (2.55)$$

とするとき、次が成立することがわかった<sup>10</sup>。

**命題 2.14** 方程式 (2.38) の WKB 解を (2.54) で、また方程式 (2.39) の WKB 解を (2.55) で定める時、 $x(z, \eta)$  が (2.41) を満たしていれば、

$$\varphi_{\pm}(z, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1/2} \psi_{\pm}(x(z, \eta), \eta). \quad (2.56)$$

このようにして方程式 (2.38) の WKB 解を Airy 方程式の WKB 解に関係付けることができた。

◎ **Borel 平面での変換** 前節の定理 2.12 で構成した変換級数  $x(z, \eta)$  は、やはり一般には収束しない。そこで次のように考えて解析的に意味付けをする。まず  $x(z, \eta) = x_0(z) + \Delta(z, \eta)$  ( $\Delta(z, \eta) = \eta^{-1}x_1(z) + \eta^{-2}x_2(z) + \dots$ ) とおいて、(2.56) の右辺を Taylor 展開する。

$$\varphi_{\pm}(z, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(z, \eta)^n}{n!} \frac{\partial^n \psi_{\pm}}{\partial x^n}(x_0(z), \eta). \quad (2.57)$$

そして両辺の Borel 変換を考えると

$$\varphi_{\pm, B}(z, y) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}(z, \partial_y)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(z, \partial_y)^n}{n!} \frac{\partial^n \psi_{\pm, B}}{\partial x^n}(x_0(z), y) \quad (2.58)$$

$$= P(x, \partial_x, \partial_y) \psi_{\pm, B}(x, y) \Big|_{x=x_0(z)} \quad (2.59)$$

ここで  $x_0(z)$  の逆関数を  $z_0(x)$  とし、

$$P(x, \partial_x, \partial_y) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}(z_0(x), \partial_y)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(z_0(x), \partial_y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

とおいた。この  $P$  は  $x$  に関しては微分作用素、 $y$  に関しては積分作用素であり、全体として 0 次の作用素である。また  $y$  については定数係数である。この  $P$  が microdifferential operator を定めていれば、(2.59) より Airy 方程式の WKB 解の Borel 変換  $\psi_{\pm, B}(x, y)$  の  $y$  についての解析性の情報から、一般の方程式 (2.38) の WKB 解の Borel 変換  $\varphi_{\pm, B}(z, y)$  の情報が読み取れ、特に定理 2.3 が証明できる。

<sup>10</sup>(2.56) の両辺が定数倍を除いて一致することは (2.40) からわかっている。

論文 [AKT1] では  $Q(z)$  が  $z = a$  で単純な変わり点を持つ時、定理 2.12 で構成した変換級数  $x(z, \eta)$  について次の性質を証明している: 任意のコンパクト集合  $K \subset U$  に対して、定数  $A_K, C_K > 0$  が存在して

$$\sup_{z \in K} |x_n(z)| \leq A_K C_K n! \quad (n \geq 0). \quad (2.60)$$

これにより  $P(x, \partial_x, \partial_y)$  が microdifferential operator を定めていることがわかる。この結果を用いると次が証明される。

**定理 2.15** ([AKT1] を参照のこと) [?]  $Q(z)$  が  $a$  の近傍で正則で  $a$  において一位の零点を持つ時、ある  $r > 0$  が存在して (2.54) で定義された WKB 解の Borel 変換  $\varphi_{+,B}(z, y)$  は

$$\left\{ z; |z - a| < r \right\} \times \left\{ y; \left| y + \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz \right| < 2 \left| \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz \right| \right\} \quad (2.61)$$

において  $y = \pm \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz$  にも特異点を持つ。これらの特異点  $y = \mp \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz$  は  $-1/2$  乗の分岐点であり、 $y$  平面においてカットを

$$\left\{ y; \operatorname{Im} y = \operatorname{Im} \left( - \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz \right), \operatorname{Re} y \geq \operatorname{Re} \left( - \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz \right) \right\} \quad (2.62)$$

と定めるとき、そのカットでの  $\psi_{+,B}(z, y)$  の discontinuity は次式で与えられる。

$$\Delta \psi_{+,B}(z, y) = i \psi_{-,B}(z, y). \quad (2.63)$$

( $\psi_{-,B}(z, y)$  についても同様の結果が成立する。)

つまり、Airy 方程式での図 11, 12 の状況と同じことが一般の  $Q(x)$  の場合についても局所的には成立している。論文 [AKT1] での変換論の結果は  $Q(z)$  が  $a$  の近傍で正則といった非常に一般的な仮定のもとで得られているため興味深い定理であるが、他方で  $\varphi_{\pm,B}(x, y)$  の解析性に関する情報は  $x$  は単純な変わり点  $a$  の近傍で、また  $y$  は  $\mp \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$  (つまり  $\varphi_{\pm}$  の Borel 和の積分の始点) の近傍でのみしか得られない。そのため、例えば、Stokes 曲線を横切る際に接続公式 (2.3) や (2.5) を適用する際には一度変わり点  $a$  の近傍に戻る必要がある。またより厳密に言えば、Borel 和の積分路上に他の特異点が現われないことは証明されていない。

そこで  $Q(z)$  が多項式 (あるいは有理関数) であるという大域的な条件のもとでこの変換級数あるいは microdifferential operator  $P$  を調べたのが [KK0] である。その結果によると、

(A1)  $Q(z)$  は多項式であり、

(A2)  $a$  は  $Q(z)$  の一位の零点であって、

(A3)  $a$  を端点とする 3 本の Stokes 曲線は無限遠点に流れ込む



という仮定のもと、 $x(z, \eta)$  は  $z$  が 3 本の Stokes 曲線を合併した集合の近傍  $V$  にある時に、変換級数  $x(z, \eta)$  が Borel 総和可能であることがわかった。この [KKo] の結果より次を得る。

**定理 2.16** 上述の仮定 (A1), (A2), (A3) のもと、ある  $\rho > 0$  が存在して (2.54) で定義された WKB 解の Borel 変換  $\varphi_{+,B}(z, y)$  は

$$V \times \left\{ y \in \mathbb{C}; \operatorname{dist} \left( y, - \int_a^z \sqrt{Q(z)} dx + \mathbb{R}_+ \right) < \rho \right\} \quad (2.64)$$

において、 $y = \pm \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz$  にのみ特異点を持つ。これらの特異点  $y = \mp \int_a^z \sqrt{Q(z)} dz$  は  $-1/2$  乗の分岐点であり、 $y$  平面においてカットを (2.62) で定める時にそのカットでの  $\psi_{+,B}(z, y)$  の discontinuity は (2.63) で与えられる。

これにより定理 2.3 の証明が完了した。

### §3. 単純極近傍での接続公式

本稿の最後となるこの節で、ポテンシャルの単純極での WKB 解の Borel 和の接続公式を紹介する。詳しくは [Ko1], [Ko2] を参照して頂きたい。まず、考える方程式は (1.3) のポテンシャルに  $\eta$  について低次の項を付け加えた

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x, \eta) \right) \psi = 0, \quad Q(x, \eta) = \frac{Q_0(x)}{x} + \eta^{-1} \frac{Q_1(x)}{x} + \eta^{-2} \frac{Q_2(x)}{x^2} \quad (3.1)$$

である。以下ではやはり簡単のため  $Q_j(x)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) は多項式とし、 $Q_0(0) \neq 0$  と仮定する。このタイプの方程式の典型例はクーロンポテンシャルに対する三次元シュレーディンガー方程式を変数分離して得られる動経方向の方程式<sup>11</sup>

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \left( -\frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{x} \right) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \right] \psi = 0 \quad (3.2)$$

であろう。プランク定数  $\hbar$  を  $\eta^{-1}$  と考えれば

$$Q_0(x) = -2m(Ex + \alpha), \quad Q_1(x) = 0, \quad Q_2(x) = l(l+1) \quad (3.3)$$

となる。

原点は方程式 (3.1) のポテンシャル  $Q(x, \eta)$  の主部の零点でないため、変わり点ではない<sup>12</sup>。しかし、以下で見るように、このポテンシャルの主部の単純極も完全 WKB 解析では変わり点と同じ役割を担う。Fuchs 型の方程式の完全 WKB 解析は [KT] で説明されて

<sup>11</sup>[LL, (32.10), p.123] において独立変数を  $x$ , また  $U = -\alpha/x$  としたもの。

<sup>12</sup>方程式 (3.1) のようにポテンシャル  $Q(x, \eta)$  が  $\eta$  について低次の項を含む場合は、変わり点は  $Q(x, \eta)$  の  $\eta$  の 0 次の項の零点として定義する。Stokes 曲線も 0 次の項を用いて定義する。

いるが、ポテンシャルの (主部の) 2位の極は変わり点としての働きをしない。このように同じ確定特異点であっても、1位の極か2位の極かで完全 WKB 解析での役割が変わってくる。単純極は、2位の極と単純変わり点が合流したものと考えられるので、少なくとも「心理的には」単純極は変わり点と特異点の性質を合わせ持つものと理解できる。

### §3.1. WKB 解と Stokes 曲線

◎ WKB 解 方程式 (3.1) についても WKB 解 (1.4) を同様に構成できる。つまり (3.1) に付随した Riccati 方程式

$$S^2 + \frac{dS}{dx^2} = \eta^2 Q(x, \eta) \quad (3.4)$$

の解を (1.5) の形で求めることができる。その漸化式は

$$S_{-1}^2 = \frac{Q_0(x)}{x}, \quad (3.5)$$

$$2S_{-1}S_0 + \frac{dS_{-1}}{dx} = \frac{Q_1(x)}{x}, \quad (3.6)$$

$$2S_{-1}S_1 + S_0^2 + \frac{dS_0}{dx} = \frac{Q_2(x)}{x^2}, \quad (3.7)$$

$$2S_{-1}S_n + \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-j} + \frac{dS_{n-1}}{dx} = 0 \quad (n \geq 2) \quad (3.8)$$

となり、 $S_{-1} = \pm\sqrt{Q_0(x)/x}$  なる (3.5) の二つの解に対して、(1.9) の形の (3.4) の解  $S^{(\pm)}(x, \eta)$  を構成することができる。もっとも、方程式 (3.1) に  $\eta^{-1}$  の項があるため (1.12) は成立しない。しかし、この場合でも

$$S_{\text{odd}}(x, \eta) = \frac{1}{2} (S^{(+)}(x, \eta) - S^{(-)}(x, \eta)), \quad S_{\text{even}}(x, \eta) = \frac{1}{2} (S^{(+)}(x, \eta) + S^{(-)}(x, \eta)) \quad (3.9)$$

と定義すれば、関係式 (1.16) を示すことができる<sup>13</sup>。従って、WKB 解は (1.19) の形に変形できる。

**注意 3.1** 単純変わり点の場合の  $S_j(x)$  の振舞いは (1.32) であったが、単純極の場合は次のようになる。

$$S_j(x) = x^{-j/2-1} \times (\text{原点で正則な関数}) \quad (3.10)$$

◎ Stokes 曲線 単純極である原点に対して、その原点を端点とする Stokes 曲線を

$$\text{Im} \int_0^x \sqrt{\frac{Q_0(x)}{x}} dx = 0 \quad (3.11)$$

により定義する。原点の近傍で  $Q_0(x)/x$  の Laurent 展開を考えることで、原点を端点とする Stokes 曲線は一本であることがわかる。図 14 に  $Q_0(x) = x - 1$  の場合の Stokes 曲線を図示した。

<sup>13</sup>  $S^{(\pm)}(x, \eta) = \pm S_{\text{odd}}(x, \eta) + S_{\text{even}}(x, \eta)$  が成立しているので、命題 1.1 の証明がそのまま使える。

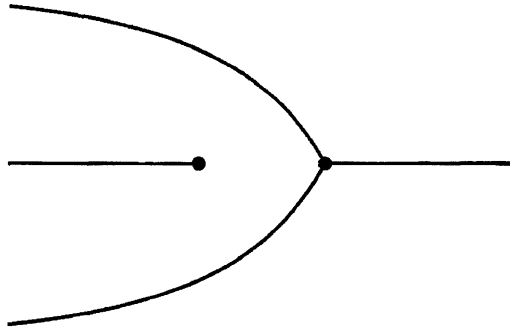


図 14:  $Q_0(x) = x - 1$  の Stokes 曲線.

### §3.2. 接続公式

方程式 (3.1) の WKB 解を, 単純変わり点と同様に

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(x, \eta)}} \exp\left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}}(x, \eta) dx\right) \quad (3.12)$$

と正規化する. ただし, 積分路は単純変わり点の時と同様にとる. この WKB 解は  $x$  が原点の近傍にあり, 原点を端点とする Stokes 曲線上にない限り Borel 総和可能である. ([Ko4] を参照のこと. 単純な変わり点の場合の対応する定理は定理 1.6. ).

#### 定理 3.2 ([Ko1], [Ko2], [KKo])

方程式 (3.1) の原点を端点とする Stokes 曲線が無限遠に流れ込むとする. この時, WKB 解 (3.12) の Borel 和を Stokes 曲線を反時計回りに横切って解析接続した際,  $\psi_+$  が Stokes 曲線上で dominant であれば, 接続公式

$$\psi_+ \longrightarrow \psi_+ + 2i \cos\left(\pi \sqrt{1 + 4Q_2(0)}\right) \psi_-, \quad \psi_- \longrightarrow \psi_- \quad (3.13)$$

が成立し,  $\psi_-$  が Stokes 曲線上で dominant であれば,

$$\psi_- \longrightarrow \psi_- + 2i \cos\left(\pi \sqrt{1 + 4Q_2(0)}\right) \psi_+, \quad \psi_+ \longrightarrow \psi_+ \quad (3.14)$$

が成立する.

この定理において, 接続公式の係数には  $\sqrt{1 + 4Q_2(0)}$  が現われている. これは方程式 (3.1) の原点における特性指数の差であるが, このように  $\eta$  の低次の項の寄与が ( $\eta$  の 0 次として) 係数に現われるのは興味深い.

この定理を用いて [Ko4] では Heun の方程式のスペクトルを調べているので, 単純極での接続公式の応用例についてはこちらを参照して欲しい.

### §3.3. 接続公式の証明の概略

定理 3.2 はやはり変換論を用いて証明される. 基本的には Airy 方程式の場合と同様の議論であり, Airy 方程式の場合に詳しく説明したので, ここでは変更点を中心に説明する.

まず, 方程式 (3.1) の原点における「標準形」は

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 \left( \frac{1}{x} + \eta^{-2} \frac{\lambda}{x^2} \right) \right] \psi = 0 \quad \text{with } \lambda = Q_2(0) \quad (3.15)$$

となる. 単純極の場合は単純な変わり点の場合と異なり, 標準形にもパラメータが含まれている. この方程式 (3.15) に付随する Riccati 方程式の中級数解は

$$S(x, \eta) = \eta \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} + \eta^{-1} \frac{16\lambda + 3}{32x^{3/2}} + \eta^{-2} \frac{16\lambda + 3}{64x^2} - \eta^{-3} \frac{(16\lambda + 3)(16\lambda - 21)}{2048x^{5/2}} + \dots \quad (3.16)$$

となり, 一般に  $S_j(x) = c_j x^{-j/2-1}$  ( $c_j$  は定数) である. このように Airy 方程式と同様に Riccati 方程式の解にも斉次性があることを利用して, 方程式 (3.15) の WKB 解 (3.12) の Borel 変換も超幾何関数を持ちいて表わすことができる.

**命題 3.3** ([Ko1, (3.7), (3.9)])  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  を超幾何関数として,

$$\psi_{+,B}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} s^{-1/2} F\left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; s\right) \Big|_{s=\frac{y}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}, \quad (3.17)$$

$$\psi_{-,B}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-4\pi}} (1-s)^{-1/2} F\left(\frac{3}{2} - \alpha, \frac{3}{2} - \beta, \frac{1}{2}; 1-s\right) \Big|_{s=\frac{y}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

但し  $\alpha, \beta$  は  $\theta^2 - 2\theta - 4\lambda$  の 2 根である ((3.17) と (3.18) は 2 根の選び方に依存しない).

この  $\psi_{\pm,B}(x, y)$  の具体的な表式を用いて定理 3.2 を (3.15) の場合に証明することができる.

一般の方程式<sup>14</sup>への変換を与える変換級数  $x(z, \eta) = x_0(z) + \eta^{-1}x_1(z) + \dots$  は

$$\frac{Q_0(z)}{z} + \eta^{-1} \frac{Q_1(z)}{z} + \eta^{-2} \frac{Q_2(z)}{z^2} = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \left\{ \frac{1}{x} + \eta^{-2} \frac{\lambda}{x^2} \right\} - \frac{1}{2} \eta^{-2} \{x; z\} \quad (3.19)$$

(命題 2.11 を参照のこと. なお, 単純変わり点の場合の対応する式は (2.43) である.) を満足するように構成する. この変換級数も定理 2.12 の性質 (i), (ii) を満たし, さらに  $x_j(0) = 0$  も成立する. なお [Ko1] では, (3.1) や (3.15) のポテンシャルの特異性を処理するために, 補助的に

$$\lambda = \lambda_0 + \eta^{-1}\lambda_1 + \eta^{-2}\lambda_2 + \dots \quad (3.20)$$

と  $\lambda$  も  $\eta$  の無限級数として構成し, その後  $x_j(0) = 0$  を用いて  $\lambda = Q_2(0)$  を証明するという手順を取っている. 論文 [Ko1] では (2.60) の評価を示し, [Ko2] で変換級数に対応する microdifferential operator (??) の性質を調べることで定理?? に対応する方程式 (3.1) に関する定理を得ているが, その結果はやはり  $x$  についても  $y$  についても局所的な性質である. 最近 [KKo] において  $Q(x, \eta)$  に関する大域的な仮定のもと, 接続公式の証明が得られた.

<sup>14</sup>単純な変わり点の場合と同様に独立変数を  $z$  とする.

## 参考文献

- [AKT1] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory, ICM-90 Satellite Conf. Proc. "Special Functions", Springer-Verlag, 1991, pp.1-29.
- [AKT2] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **54**, Math. Soc. Japan, 2009, pp.19-94.
- [BW] C.M.Bender and T.T.Wu, Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order., *Phys.Rev.D*, 1973,**7**, pp.1620-1636.
- [DDP] E.Delabaere, H.Dillinger and F.Pham, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptique, *Annales de l'Institut Fourier*, 1993, **43**, pp.163-199.
- [DP] E. Delabaere and F. Pham: Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **71**(1999), 1-94.
- [E] 江沢洋: 漸近解析, 岩波講座応用数学, 1995, 岩波書店.
- [F] M.V.Fedoryuk: *Asymptotic Analysis. – Linear Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag(1993).
- [K] S. Kamimoto: On the WKB theoretic transformation and its application, in this volume.
- [KKKoT1] S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point. *Kyoto Journal of Mathematics*, **50**, 2010, 101-164.
- [KKKoT2] S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point — Alien calculus of WKB solutions through microlocal analysis, To appear in "Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation: Proceedings of the conference held in CRM Pisa, 12-16 October 2009" (Publications of the Scuola Normale Superiore / CRM Series)
- [KKo] S. Kamimoto and T. Koike: On the Borel summability of WKB theoretic transformation series, in preparation.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学, 現代数学の展開 **1**, 1998, 岩波書店, 英訳は *Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory*, Amer. Math. Soc., 2005.
- [Ko1] T. Koike: On a regular singular point in the exact WKB analysis, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto University Press, 2000, pp.39-54.

- [Ko2] T. Koike: On the exact WKB analysis of second order linear ordinary differential equations with simple poles, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 297–319.
- [Ko3] T. Koike: Asymptotics of the spectrum of Heun’s equation and the exact WKB analysis, “Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-linear (Kyoto, 1998),” Kyoto Univ. Press, 2000, 55–70.
- [Ko4] T. Koike: Borel summability of WKB solutions of second order linear ordinary differential equations, in preparation.
- [KoT] T. Koike and Y. Takei: On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter — Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47**, 2011, 375–395.
- [LL] ランダウ・リフシッツ: 量子力学 1, 東京図書, 1983.
- [O] F.W.J.Olver: Asymptotics and Special Functions. A K Peters, Ltd., (1997). Originally published by Academic Press(1974).
- [S] Y. Sibuya: Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 18. North-Holland, 1975.
- [V] A.Voros: The return of the quartic oscillator. The complex WKB method. Ann. Inst. Henri Poincaré, **39**(1983), pp.211-338.
- [W] W.Wasow: Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.