数理解析研究所講究録
第 1765 巻 2011 年 168-187

Ultradiscretization of Coupled Soliton Equations through the Miura Transformation

Ryogo Hirota
Emeritus Professor Waseda University

Aug.20, 2010 Kyoto

Abstract

The following coupled soliton equations are ultradiscretized through the Miura transformation.

(i) Coupled Modified KdV equation

$$\frac{d}{dt}W_{a,n} = W_{a,n}W_{b,n}[W_{a,n+1} - W_{a,n-1}],$$
$$\frac{d}{dt}W_{b,n} = W_{a,n}W_{b,n}[W_{b,n+1} - W_{b,n-1}].$$

(ii) Coupled Lotka-Volterra equation

$$\frac{d}{dt}\log[\alpha + u(n)] = u_1(n+1) - u_1(n-1),$$
$$\frac{d}{dt}\log[\alpha^{-1} + u_1(n)] = u(n+1) - u(n-1),$$

where α is a real parameter.

1 Introduction

ソリトン方程式を超離散化するためにはソリトン方程式を差分化する必要がある。方程式の差分化のための簡単な予備知識を準備する。

1.1 双線形演算子

まずソリトン理論で使う双線形微分演算子 D_t を導入する [1]。独立変数 t の任意関数 f, g にたいして

$$D_t{}^m f \cdot g = \left(\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt'}\right)^m f(t)g(t')\bigg|_{t'=t}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

と定義する。たとえば $m = 1$ のとき

$$D_t f \cdot g = \left(\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt'}\right) f(t)g(t')\bigg|_{t'=t} = \left(\frac{df(t)}{dt}g(t') - f(t)\frac{dg(t')}{dt'}\right)\bigg|_{t'=t}$$
$$= \frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}$$

である。したがって

$$D_t f \cdot f = 0$$

となる。$m = 2$ のとき

$$D_t^2 f \cdot f = \frac{d^2 f}{dt^2} f - 2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + f\frac{d^2 f}{dt^2} = 2\left(\frac{d^2 f}{dt^2} f - \left(\frac{df}{dt}\right)^2\right)$$

である。
双線形差分演算子 $e^{\delta D_t}$ は 任意関数 $f(t), g(t)$ にたいして

$$e^{\delta D_t} f(t) \cdot g(t) = f(t+\delta)g(t-\delta)$$

と定義されている。したがって

$$2\sinh(\delta D_t) f(t) \cdot f(t) = [e^{\delta D_t} - e^{-\delta D_t}] f(t) \cdot f(t) = 0 \tag{1}$$

である。

1.2 戸田方程式

まずソリトン方程式で基本的な役割を演じている戸田方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1 + V_n) = V_{n+1} - 2V_N + V_{N-1}, \quad N = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

を双線形形式に変換する。
式 (2) の左辺には演算子 $\frac{d^2}{dt^2}\log$ が作用しているので、右辺にも同じ演算子が未知の量 f_n 作用していると考えて

$$V_n = \frac{d^2}{dt^2}\log f_n \tag{3}$$

と置く。このとき式 (2) は

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n) = \frac{d^2}{dt^2}\log[f_{n+1}f_{n-1}/f_n^2] \tag{4}$$

と表される。t で 2 回積分して（積分定数を 0 とし）V_n の表現式 (3) を使うと

$$1 + \frac{d^2}{dt^2}\log f_n = f_{n+1}f_{n-1}/f_n^2 \tag{5}$$

となる。対数の 2 回微分を実行し、全体に f_n^2 を掛けて整理すると、次の形の双線形形式が得られる。

$$\ddot{f}_n f_n - \dot{f}_n^2 - [f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2] = 0 \tag{6}$$

この式は双線形演算子 D_t を使うと

$$\frac{1}{2}D_t^2 f_n \cdot f_n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2, \tag{7}$$

に変換される。

2　ソリトン方程式の離散化

ソリトン方程式の離散化はソリトン方程式をそのまま離散化するのではなく、ソリトン方程式の双線形形式を離散化するのが基本的である。たとえば戸田方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

の場合、この方程式の離散化を試みるのではなく、双線形形式

$$\frac{1}{2}D_t^2 f_n \cdot f_n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2, \quad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

の離散化を実行するのである。
ソリトン方程式では分散関係と非線形性という二つの物理量がうまく釣り合って安定な孤

立波を生成しているが、離散化したときにこの二つの物理量を釣り合わせることが難しい。しかし双線形形式では分散関係だけが大切で、非線形性は双線形方程式に埋め込まれている（表には現れていない)。非線形性は従属変数変換を使って双線形形式を通常の方程式に変換した結果出現する。

また双線形形式にはゲージ不変性という大事な性質があるので、この不変性をみたす方程式だけを考えれば十分である。

戸田方程式の双線形形式

$$\frac{1}{2}D_t^2 f_n \cdot f_n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2, \quad n = -\infty, \cdots, 0, \cdots, \infty. \tag{10}$$

は双線形差分演算子 e^{D_n} を使うと

$$\frac{1}{2}D_t^2 f_n \cdot f_n = [e^{D_n} - 1] f_n \cdot f_n, \quad n = -\infty, \cdots, 0, \cdots, \infty. \tag{11}$$

となる。座標 n と t の対称性を考えて左辺を

$$\frac{1}{2}D_t^2 f_n \cdot f_n = \lim_{\delta \to 0} \delta^{-2}[e^{\delta D_t} - 1] f_n \cdot f_n, \tag{12}$$

と表す。したがって戸田方程式の一つの離散化として

$$[e^{\delta D_t} - 1] f_n \cdot f_n = \delta^2 [e^{D_n} - 1] f_n \cdot f_n, \quad n = -\infty, \cdots, 0, \cdots, \infty \tag{13}$$

が考えられる。
もう一つの可能性は

$$[e^{\delta D_t} - 1] f_n \cdot f_n = \delta^2 [e^{D_n + \delta\alpha D_t} - 1] f_n \cdot f_n. \quad n = -\infty, \cdots, 0, \cdots, \infty \tag{14}$$

$(\alpha = const)$ である。この式も極限 $\lim_{\delta \to 0}$ で戸田方程式を与える。
今後方程式 (13) を Type- 1 の戸田方程式と呼び、方程式 (14),$(\alpha = -1)$ を Type- 2 の戸田方程式と呼ぶ。
結合型 Modified KdV 方程式を求めるときは Type-2 の戸田方程式を使い、結合型 Lotka-Volterra を求めるときには Type-1 の戸田方程式を使う。

この二式は $t = m\delta$ と置くと, それぞれ

$$\text{Type 1}: \quad [e^{D_m} - 1] f_n^m \cdot f_n^m = \delta^2 [e^{D_n} - 1] f_n^m \cdot f_n^m, \tag{15}$$

$$\text{Type 2}: \quad [e^{D_m} - 1] f_n^m \cdot f_n^m = \delta^2 [e^{D_n - D_m} - 1] f_n^m \cdot f_n^m. \tag{16}$$

となる。双線形演算子 D_m, D_n を使わないで書くと

$$\text{Type 1}:\quad f_n^{m+1}f_n^{m-1}-(f_n^m)^2=\delta^2[f_{n+1}^m f_{n-1}^m - f_n^{m2}], \tag{17}$$
$$\text{Type 2}:\quad f_n^{m+1}f_n^{m-1}-(f_n^m)^2=\delta^2[f_{n+1}^{m-1} f_{n-1}^{m+1} - (f_n^m)^2], \tag{18}$$

である。
先ず Type-2 の戸田方程式のバックルンド変換を求める。

3 バックルンド変換の求め方

次の一般化 KP 差分方程式 (Hirota-Miwa 方程式) を考える。

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f\cdot f=0, \tag{19}$$

ここで D_1, D_2, D_3 は双線形演算子 $D_l, D_m, D_n, etc.$, の線形結合であり、 z_1, z_2, z_3 は任意定数である。
この差分方程式の一つの解 f と同じ方程式の別解 g

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]g\cdot g=0.$$

を結ぶバックルンド変換を考える。
天下りに次式 P を考える。

$$\begin{aligned}P\equiv&\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]f\cdot f\}\exp(D_3)g\cdot g\\&-\exp(D_3)f\cdot f\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)]g\cdot g\}.\end{aligned}$$

$P=0$ のとき、f が双線形方程式 の解であれば、g も双線形方程式の解になる。その逆も成り立っている。もしこの式 $P=0$ から f と g の相対位置を換えた一組の双線形方程式

$$F_1(D_1,D_2,D_3)f\cdot g=0,$$
$$F_2(D_1,D_2,D_3)f\cdot g=0,$$

が得られたら、それが求めるバックルンド変換の候補になる。
P を変換するための基本公式は次の二つである。

3.1 基本公式

) *Exchange formula* (f と g の相対位置を換える)。

$$
\begin{aligned}
&\{\exp(D_j)f\cdot f\}\{\exp(D_k)g\cdot g\}-\{\exp(D_k)f\cdot f\}\{\exp(D_j)g\cdot g\}\\
&\quad=2\sinh[(D_j+D_k)/2]\{\exp[(D_j-D_k)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_j-D_k)/2]f\cdot g\},
\end{aligned}
$$

for $j,k=1,2,3$.

) *Interchange formula* (インデックス1と2を入れ換える)。

$$
\begin{aligned}
&2\sinh[(D_1+D_3)/2])\{\exp[-(D_2-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{[\exp[-(D_1-D_3)/2]f\cdot g\}\\
&=2\sinh[(D_2+D_3)/2])\{\exp[-(D_1-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{[\exp[-(D_2-D_3)/2]f\cdot g\},
\end{aligned}
$$

where $D_4=-D_1-D_2-D_3$.
バックルンド変換式として次の2式を選ぶ、

$$[\alpha_1e^{-(D_1-D_3)/2}-e^{(D_1-D_3)/2}+\beta_1e^{-(D_2-D_4)/2}]f\cdot g=0, \tag{20}$$
$$[\alpha_2e^{-(D_2-D_3)/2}-e^{(D_2-D_3)/2}+\beta_2e^{-(D_1-D_4)/2}]f\cdot g=0. \tag{21}$$

ここで定数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\beta_2$ 今のところ未定で後で決定される。
P を分離して定数 z_1 含む項,P_1 と定数 z_2 を含む項,P_2 に分ける:

$$P=z_1P_1+z_2P_2. \tag{22}$$

P_1 は *Exchange formula* を使うと

$$
\begin{aligned}
P_1&\equiv(e^{D_1}f\cdot f)(e^{D_3}g\cdot g)-(e^{D_3}f\cdot f)(e^{D_1}g\cdot g)\\
&=2\sinh[(D_1+D_3)/2][e^{(D_1-D_3)/2}f\cdot g]\cdot[e^{-(D_1-D_3)/2}f\cdot g]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる。ここでバックルンド変換式(20)を使うと

$$P_1/\beta_1=2\sinh[(D_1+D_3)/2][e^{-(D_2-D_4)/2}f\cdot g]\cdot[e^{-(D_1-D_3)/2}f\cdot g] \tag{24}$$

の形に変換される。同様にして

$$P_2/\beta_2=2\sinh[(D_2+D_3)/2][e^{-(D_1-D_4)/2}f\cdot g]\cdot[e^{-(D_2-D_3)/2}f\cdot g] \tag{25}$$

を得る。P_1,P_2 は任意ではなく *Interchange formula* により

$$P_1/\beta_1=P_2/\beta_2 \tag{26}$$

である。したがって

$$P = z_1 P_1 + z_2 P_2 = 0, \quad \text{if} \quad z_1\beta_1 + z_2\beta_2 = 0. \tag{27}$$

である。この結果バックルンド変換式の候補は Eqs.(20),(21) になる。ただし $z_1\beta_1 + z_2\beta_2 = 0$ である。
バックルンド変換式は未定係数の選び方により、Lax-pair を生成したり、新しいソリトン方程式を生成したりする。

3.2 Lax Pair

Bäcklund 変換式 (20),(21) は変換

$$g = f\phi$$

によって Lax Pair

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 \exp[(\partial_1 - \partial_3)/2] - \exp[(-\partial_1 + \partial_3)/2] \\ +\beta_1 \hat{u} \exp[(\partial_2 - \partial_4)/2]\}\phi = 0,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\{\alpha_2 \exp[(\partial_2 - \partial_3)/2] - \exp[(-\partial_2 + \partial_3)/2] \\ +\beta_2 \hat{v} \exp[(\partial_1 - \partial_4)/2]\}\phi = 0,\end{aligned} \tag{29}$$

に変換される。ただし $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, for $i = 1,2,3$ であり、$\partial_4 = -\partial_1 - \partial_2 - \partial_3$ である。従属変数 $\hat{u}, \hat{v}$ は次式で与えられている。

$$\hat{u} = \frac{\exp[(D_2 - D_4)/2] f \cdot f}{\exp[(D_1 - D_3)/2] f \cdot f},$$
$$\hat{v} = \frac{\exp[(D_1 - D_4)/2] f \cdot f}{\exp[(D_2 - D_3)/2] f \cdot f}.$$

方程式 (28),(29) にシフト演算子 $\exp[(-\partial_1 + \partial_3)/2]$ と $\exp[(-\partial_2 + \partial_3)/2]$ それぞれ演算し、整理すると 次の形式の Lax-pair が得られる。

$$L_1\phi = \alpha_1\phi, \tag{30}$$
$$L_2\phi = \alpha_2\phi, \tag{31}$$

where

$$L_1 = e^{-\partial_1 + \partial_3} - \beta_1 u e^{\partial_2 + \partial_3}, \tag{32}$$
$$L_2 = e^{-\partial_2 + \partial_3} - \beta_2 v e^{\partial_1 + \partial_3}, \tag{33}$$

ここで

$$u = \frac{(e^{\partial_2+\partial_3}f)(e^{-\partial_1-\partial_2}f)}{f(e^{-\partial_1+\partial_3}f)}, \tag{34}$$

$$v = \frac{(e^{\partial_1+\partial_3}f)(e^{-\partial_1-\partial_2}f)}{f(e^{-\partial_2+\partial_3}f)}, \tag{35}$$

である。

3.3 両立条件 (Compatibility Condition)

方程式 (30) と (31) の両立条件は交換関係 $[L_1, L_2] = 0$ で与えられる。交換関係から u と v にたいする方程式が次のように生成される。

$$\begin{aligned}
&[L_1, L_2] \\
&= [e^{-\partial_1+\partial_3} - \beta_1 u e^{\partial_2+\partial_3}, e^{-\partial_2+\partial_3} - \beta_2 v e^{\partial_1+\partial_3}], \\
&= -\beta_1[ue^{\partial_2+\partial_3}, e^{-\partial_2+\partial_3}] - \beta_2[e^{-\partial_1+\partial_3}, ve^{\partial_1+\partial_3}] + \beta_1\beta_2[ue^{\partial_2+\partial_3}, ve^{\partial_1+\partial_3}]
\end{aligned}$$

この式より、 u と v に対する結合型方程式

$$\begin{aligned}
&\beta_1 u(x_1, x_2, x_3) - \beta_1 u(x_1, x_2 - 1, x_3 + 1) \\
&\qquad = \beta_2 v(x_1, x_2, x_3) - \beta_2 v(x_1 - 1, x_2, x_3 + 1),
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&u(x_1, x_2, x_3) v(x_1, x_2 + 1, x_3 + 1) \\
&\qquad = u(x_1 + 1, x_2, x_3 + 1) v(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned} \tag{37}$$

が得られる。

3.4 u と v は方程式 (36), (37) を満たす

u, v の変換式 (34), (35) を方程式 (36)、(37) に代入すると, 式 (37) は $f(x_1, x_2, x_3)$ に対する恒等式であり、 式 (36) の分子は次式のように書き表される。

$$-\sinh[(D_1 + D_2)/2][e^{D_3} f \cdot f] \cdot \{[-\beta_2 e^{D_1} + \beta_1 e^{D_2} + \gamma e^{D_3}] f \cdot f\}$$

ここで γ は任意定数である。 $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = 0$ であり f は双線形方程式 (19) の解であるのでこの式は 0 である。したがって u と v は方程式 (36) も満たしている。

3.5 Bäcklund Transformation of the discrete Toda equation of type 2

Type 2 の戸田方程式

$$[e^{D_m} - 1 - \delta^2(e^{D_n - D_m} - 1)]f \cdot f = 0$$

の Bäcklund Transformation は一般化 KP 方程式の Bäcklund Transformation で

$$\begin{aligned} &D_1 = -D_m, \quad z_1 = 1, \\ &D_2 = D_m - D_n, \quad z_2 = -\delta^2, \\ &D_3 = 0, \quad z_3 = \delta^2 - 1 \end{aligned}$$

と選ぶ。すなわち

$$[\alpha_1 e^{D_m/2} - e^{-D_m/2} + \beta_1 e^{D_n - D_m/2}]f \cdot g = 0, \tag{38}$$
$$[\alpha_2 e^{-(D_m - D_n)/2} - e^{(D_m - D_n)/2} + \beta_2 e^{(D_m + D_n)/2}]f \cdot g = 0, \tag{39}$$

である。

3.6 両立条件から生成される Discrete Toda equation of Type 2

一般化 KP 方程式のバックルンド変換式より生成される Lax pair を Discrete Toda equation of Type 2 の Lax pair に書き換えると

$$\begin{aligned} L_1 &= e^{-\partial_m} - \beta_1 V_n^m e^{\partial_n - \partial_m}, \\ L_2 &= e^{-(\partial_n - \partial_m)} - \beta_2 I_n^m e^{\partial_m}, \end{aligned}$$

となる。ここで

$$V_n^m = \frac{f_{n+1}^{m-1} f_{n-1}^m}{f_n^m f_n^{m-1}}, \tag{40}$$
$$I_n^m = \frac{f_n^{m+1} f_{n-1}^m}{f_n^m f_{n-1}^{m+1}}, \tag{41}$$

である。両立条件 $[L_1, L_2] = 0$ は次の形の離散的戸田方程式を生成する

$$I_n^m - I_n^{m-1} = \delta^2[V_n^m - V_{n-1}^{m+1}], \tag{42}$$
$$V_n^m I_{n+1}^{m-1} = I_n^m V_n^{m+1}. \tag{43}$$

4 バックルンド変換式から生成される離散的非線形方程式. I

4.1 離散的 Lotka-Volterra 方程式

視点を変えてバックルンド変換式 (38),(39) を新しい方程式の双線形形式とみなす。このとき未定係数を次のように決定する。Type 2 の戸田方程式の 1-soliton 解 f_n^m と同じ方程式の別の 1-soliton 解 g_n^m 次の形に選ぶ、

$$
\begin{aligned}
&f_n^m = 1 + r_j(m,n), \quad g_n^m = 1 + a_j r_j(m,n), \\
&r_j(m,n) = r_j p_j^m q_j^{2(n-n_1)} \\
&p_j = \frac{1+\delta\mu_j q_j}{1+\delta\mu_j/q_j}, \quad \mu_j = \pm 1
\end{aligned}
$$

ここで a_j は正の未定係数である。
バックルンド変換式にソリトン解を示す条件式 $\alpha_1 = 1-\beta_1,\ \alpha_2 = 1-\beta_2$ を代入し、パラメータの条件式 $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = \beta_1 - \beta_2\delta^2 = 0$ を使い、$\beta_2 = 1/\delta$ を選ぶと次の２式がえられる。

$$
f_n^m g_n^{m+1} - (1-\delta) f_n^{m+1} g_n^m - \delta f_{n+1}^m g_{n-1}^{m+1} = 0, \tag{44}
$$
$$
(1-\delta) f_{n+1}^m g_n^{m+1} + \delta f_n^{m+1} g_{n+1}^m - f_{n+1}^{m+1} g_n^m = 0. \tag{45}
$$

双線形方程式 (44),(45) を離散的 Lotka-Volterra 方程式に変換する。まず上式の項を並べ換えて

$$
f_n^m g_n^{m+1} = (1-\delta) f_n^{m+1} g_n^m + \delta f_{n+1}^m g_{n-1}^{m+1}, \tag{46}
$$
$$
f_{n+1}^{m+1} g_n^m = (1-\delta) f_{n+1}^m g_n^{m+1} + \delta f_n^{m+1} g_{n+1}^m. \tag{47}
$$

と書く。f_n^m, g_n^m の正値性を仮定すると $\delta < 1$ のとき、上式の両辺はともに正である。この事実が離散的 Lotka-Volterra 方程式の超離散化を容易にしている。
新しい従属変数 $u_n^m, v_n^m, x_n^m, y_n^m$ を導入する：

$$
u_n^m = \frac{f_{n+1}^m g_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} g_n^m}, \quad v_n^m = \frac{f_n^{m+1} g_{n+1}^m}{f_{n+1}^m g_n^{m+1}}, \tag{48}
$$
$$
x_n^m = \frac{f_n^m g_n^{m+1}}{f_n^{m+1} g_n^m}, \quad y_n^m = \frac{f_{n+1}^{m+1} g_n^m}{f_{n+1}^m g_n^{m+1}}. \tag{49}
$$

これらの変数によって双線形方程式 (46),(47) は簡潔に

$$
x_n^m = 1 - \delta + \delta u_n^m, \tag{50}
$$
$$
y_n^m = 1 - \delta + \delta v_n^m, \tag{51}
$$

となる。従属変数 $u_n^m, v_n^m, x_n^m, y_n^m$ は独立ではなく次の関係式がある。

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m} = \frac{y_n^m}{y_{n-1}^{m+1}}, \tag{52}$$

$$\frac{v_n^{m+1}}{v_n^m} = \frac{x_{n+1}^m}{x_n^{m+1}} \tag{53}$$

方程式 (52),(53) の右辺に (51),(50) を代入したもの

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m} = \frac{1-\delta+\delta v_n^m}{1-\delta+\delta v_{n-1}^{m+1}}, \tag{54}$$

$$\frac{v_n^{m+1}}{v_n^m} = \frac{1-\delta+\delta u_{n+1}^m}{1-\delta+\delta u_n^{m+1}}, \tag{55}$$

が離散的 Lotka-Volterra 方程式である。この式の超離散化は簡単である。

4.2 Miura 変換 1

離散的戸田方程式の変数

$$V_n^m = \frac{f_{n+1}^{m-1} f_{n-1}^m}{f_n^m f_n^{m-1}}, \qquad I_n^m = \frac{f_n^{m+1} f_{n-1}^m}{f_n^m f_{n-1}^{m+1}}$$

と離散的 Lotka-Volterra 方程式の変数

$$u_n^m = \frac{f_{n+1}^m g_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} g_n^m}, \quad v_n^m = \frac{f_n^{m+1} g_{n+1}^m}{f_{n+1}^m g_n^{m+1}},$$
$$x_n^m = \frac{f_n^m g_n^{m+1}}{f_n^{m+1} g_n^m}, \quad y_n^m = \frac{f_{n+1}^{m+1} g_n^m}{f_{n+1}^m g_n^{m+1}}$$

を見比べて、

$$u_n^{m-1} = \frac{f_{n+1}^{m-1} g_{n-1}^m}{f_n^m g_n^{m-1}}, \quad v_{n-1}^{m-1} = \frac{f_{n-1}^m g_n^{m-1}}{f_n^{m-1} g_{n-1}^m}$$

より

$$V_n^m = u_n^{m-1} v_{n-1}^{m-1} \tag{56}$$

を得る。
同様にして

$$x_{n-1}^m = \frac{f_{n-1}^m g_{n-1}^{m+1}}{f_{n-1}^{m+1} g_{n-1}^m}, \quad y_{n-1}^m = \frac{f_n^{m+1} g_{n-1}^m}{f_n^m g_{n-1}^{m+1}}$$

より

$$I_n^m = x_{n-1}^m y_{n-1}^m \tag{57}$$

を得る。x_n^m, y_n^m は u_n^m, v_n^m で表現されているので、関係式 (56),(57) は離散的戸田方程式の解を離散的 Lotka-Volterra 方程式の解で表現する Miura 変換式である。

4.3 Miura transformation 1-a

We shall prove directly that the discrete Toda equation

$$I_n^m - I_n^{m-1} = \delta^2[V_n^m - V_{n-1}^{m+1}], \tag{58}$$
$$V_n^m I_{n+1}^{m-1} = I_n^m V_n^{m+1}, \tag{59}$$

is solved by the Miura transformation

$$V_n^m = u_n^{m-1} v_{n-1}^{m-1}, \tag{60}$$
$$I_n^m = x_{n-1}^m y_{n-1}^m, \tag{61}$$

provided that u_n^m, v_n^m, x_n^m and y_n^m solve the discrete Lotka-Volterra equation,

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m} = \frac{y_n^m}{y_{n-1}^{m+1}}, \tag{62}$$
$$\frac{v_n^{m+1}}{v_n^m} = \frac{x_{n+1}^m}{x_n^{m+1}}, \tag{63}$$
$$x_n^m = 1 - \delta + \delta u_n^m, \tag{64}$$
$$y_n^m = 1 - \delta + \delta v_n^m. \tag{65}$$

Substituting the Miura transformation (60) and (61) into Eq. (58) we have

$$x_n^{m+1} y_n^{m+1} - \delta^2 u_{n+1}^m v_n^m = x_n^m y_n^m - \delta^2 u_n^{m+1} u_{n-1}^{m+1}. \tag{66}$$

We shall transform of the *l.h.s* of Eq.(66). Eliminating the terms, y_n^{m+1} and δv_{n+1}^m with the help of Eqs.(64) and (65) and using the relation (62) we find that the *l.h.s* is reduced to

$$(1-\delta)[x_n^{m+1} + \delta v_n^m]. \tag{67}$$

On the other hand the *r,h,s* of Eq.(66) is transformed, eliminating the terms, δv_n^{m+1} and x_{n+1}^m, and using the relation (63),into

$$x_n^m y_n^m - \delta^2 u_n^{m+1} u_{n-1}^{m+1} = (1-\delta)[y_n^m + \delta u_n^{m+1}]. \tag{68}$$

The *r.h.s.* and the *l.h.s.* are equal to each other due to the expressions (64) and (65).
Substituting the Miura transformation (60) and (61) into Eq. (59) we find that it is nothing but an identiy of u, v, x, y.
Accordingly we have proved that the discrete Toda equation is solved by the Miura transformation.

5 バックルンド変換式から生成される離散的非線形方程式. 2

5.1 Coupled Modified KdV 方程式

次の非線形連立微・差分方程式

$$\frac{d}{dt}W_{a,n} - W_{a,n}W_{b,n}[W_{a,n+1} - W_{a,n-1}] = 0,$$
$$\frac{d}{dt}W_{b,n} - W_{a,n}W_{b,n}[W_{b,n+1} - W_{b,n-1}] = 0.$$

は Coupled Modified KdV 方程式と呼ばれている。

この方程式は行列式の理論における Cusick theorem：“*A product of Hankel determinants is expressed by a pfaffian*” をソリトン理論を使って証明するために導入された [2]。

離散的 Coupled modified KdV 方程式を生成するために次のバックルンド変換式

$$f_n^m g_n^{m+1} = (1-\delta) f_n^{m+1} g_n^m + \delta f_{n+1}^m g_{n-1}^{m+1}, \tag{69}$$
$$f_{n+1}^{m+1} g_n^m = (1-\delta) f_{n+1}^m g_n^{m+1} + \delta f_n^{m+1} g_{n+1}^m. \tag{70}$$

を 2 個用意する。一つは $f_n^m \to g_n^m$ の変換式であり、もう一つは別の解 $f_{1,n}^m \to g_{1,n}^m$ の変換式である。

$$f_{1,n}^m g_{1,n}^{m+1} = (1-\delta) f_{1,n}^{m+1} g_{1,n}^m + \delta f_{1,n+1}^m g_{1,n-1}^{m+1}, \tag{71}$$
$$f_{1,n+1}^{m+1} g_{1,n}^m = (1-\delta) f_{1,n+1}^m g_{1,n}^{m+1} + \delta f_{1,n}^{m+1} g_{1,n+1}^m. \tag{72}$$

これらの 4 個の変数を使って新しい従属変数 $F_n^m, G_{a,n}^m, G_{b,n}^m$ を次式で導入する。インデックス n が偶数か奇数かによって定義が異なる。

$$F_{2n}^m = f_n^m f_{1,n}^m, \qquad G_{a,2n}^m = g_n^m g_{1,n-1}^m, \qquad G_{b,2n}^m = g_{n-1}^m g_{1,n}^m, \tag{73}$$
$$F_{2n+1}^m = g_n^m g_{1,n}^m, \quad G_{a,2n+1}^m = f_{n+1}^m f_{1,n}^m, \quad G_{b,2n+1}^m = f_n^m f_{1,n+1}^m. \tag{74}$$

バックルンド変換式 (71),(72) によって、すべての n にたいして次の双線形方程式が成立している。

$$F_{n+1}^m F_{n-1}^m = G_{a,n}^m G_{b,n}^m, \tag{75}$$
$$G_{a,n}^{m+1} F_n^m - G_{a,n}^m F_n^{m+1} = \delta[G_{a,n+1}^m F_{n-1}^{m+1} - G_{a,n-1}^{m+1} F_{n+1}^m], \tag{76}$$
$$G_{b,n}^{m+1} F_n^m - G_{b,n}^m F_n^{m+1} = \delta[G_{b,n+1}^m F_{n-1}^{m+1} - G_{b,n-1}^{m+1} F_{n+1}^m]. \tag{77}$$

この双線形方程式は新しい従属変数 $W_{a,n}^m, W_{b,n}^m$ を次式で導入すると、

$$W_{a,n}^m = \frac{G_{a,n}^m}{F_n^m}, \qquad W_{b,n}^m = \frac{G_{b,n}^m}{F_n^m} \tag{78}$$

次の非線形差分方程式に変換される。

$$W_{a,n}^{m+1} - W_{a,n}^{m} - \delta\Gamma_n^m W_{a,n}^m W_{b,n}^m [W_{a,n+1}^m - W_{a,n-1}^{m+1}] = 0, \tag{79}$$
$$W_{b,n}^{m+1} - W_{b,n}^{m} - \delta\Gamma_n^m W_{a,n}^m W_{b,n}^m [W_{b,n+1}^m - W_{b,n-1}^{m+1}] = 0, \tag{80}$$
$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m} = \frac{W_{a,n}^m W_{b,n}^m}{W_{a,n}^{m+1} W_{b,n}^{m+1}}. \tag{81}$$

この式の explicit な mapping は可能であるが、超離散化が難しい。

しかしこの式の Miura 変換を導入すると超離散化が可能になる。

5.2 Miura 変換 2

新しい従属変数 $x_{a,n}^m, x_{b,n}^m, y_{a,n}^m, y_{b,n}^m$ を導入する。

$$x_{a,n}^m = g_n^m / f_n^m, \quad y_{a,n}^m = g_{n-1}^m / f_n^m, \tag{82}$$
$$x_{b,n}^m = g_{1,n}^m / f_{1,n}^m, \quad y_{b,n}^m = g_{1,n-1}^m / f_{1,n}^m. \tag{83}$$

バックルンド変換式 (69),(70)(71),(72) によって $x_{a,n}^m, x_{b,n}^m, y_{a,n}^m, y_{b,n}^m$ は次の連立非線形差分方程式 (名前は未だない) を満たしている。

$$\frac{x_{a,n}^{m+1}}{x_{a,n}^m} = 1 - \delta + \delta \frac{y_{a,n}^{m+1}}{y_{a,n+1}^m}, \quad \frac{x_{b,n}^{m+1}}{x_{b,n}^m} = 1 - \delta + \delta \frac{y_{b,n}^{m+1}}{y_{b,n+1}^m}, \tag{84}$$
$$\frac{y_{a,n}^m}{y_{a,n}^{m+1}} = 1 - \delta + \delta \frac{x_{a,n}^m}{y_{a,n-1}^{m+1}}, \quad \frac{y_{b,n}^m}{y_{b,n}^{m+1}} = 1 - \delta + \delta \frac{x_{b,n}^m}{y_{b,n-1}^{m+1}}. \tag{85}$$

これらの式の超離散化は容易でる。
一方、解 $W_{a,n}^m, W_{b,n}^m$ を上式の解 $x_{a,n}^m, x_{b,n}^m, y_{a,n}^m, y_{b,n}^m$ で表す Miura 変換がある。

$$W_{a,2n} = x_{a,n}^m y_{b,n}^m, \quad W_{a,2n+1} = (x_{b,n}^m y_{a,n+1}^m)^{-1}, \tag{86}$$
$$W_{b,2n} = x_{b,n}^m y_{a,n}^m, \quad W_{b,2n+1} = (x_{a,n}^m y_{b,n+1}^m)^{-1}. \tag{87}$$

この Miura 変換の超離散化は簡単である。
したがって結合型 Modified KdV 方程式 (79),(80),(81) の超離散化は連立非線形差分方程式と Miura 変換を経由すると簡単になる。

6 Lotka-Volterra equation of coupled form

We consider an infinite chain of prey and predators; the n-th species is the predator of the $(n+1)$-th species and the prey of the $(n-1)$-th species. The population of the n-th species,$N(n)$ is assumed to be determined by the following simple equation

$$\frac{d}{dt}N(n) = N(n)(N(n+1) - N(n-1)). \tag{88}$$

Equation(88) has a steady state solution, $N(2n) = N_0$ and $N(2n+1) = N_1$ for integer n. Let the deviations of the population from the steady states be $n(n)$ and $n_1(n)$:

$$N(2n) = N_0 + n(n), \tag{89}$$
$$N(2n+1) = N_1 + n_1(n). \tag{90}$$

Then equation(88) are transformed into

$$\frac{d}{dt}\log(N_0 + n(n)) = n_1(n+1) - n_1(n-1), \tag{91}$$
$$\frac{d}{dt}\log(N_1 + n_1(n)) = n(n+1) - n(n-1), \tag{92}$$

which is reduced to

$$\frac{d}{d\tau}\log(\alpha + u(n)) = u_1(n+1) - u_1(n-1), \tag{93}$$
$$\frac{d}{d\tau}\log(\alpha^{-1} + u_1(n)) = u(n+1) - u(n-1), \tag{94}$$

by the transformations,

$$n(n) = N_0\alpha^{-1}u(n), \quad n_1(n) = N_1\alpha u_1(n), \tag{95}$$
$$t = \frac{\alpha}{N_0}\tau = \frac{1}{N_1\alpha}\tau, \quad \alpha^2 = N_0/N_1. \tag{96}$$

Equations (93) and (94) exhibit solitons moving in *both* directions[3].
We call Eqs. (93) and (94) " Lotka-Volterra equation of coupled form".

We shall discretize Lotka-Volterra equation of coupled form,Eqs.(93) and (94), and obtain the ultradiscrete form of them.

6.1 *Extended* Bäcklund Transformation for the Discrete Toda equation of Type 1

We consider the discrete Toda equation decribed by the bilinear equation

$$[e^{2D_m} - 1 - \delta^2(e^{2D_n} - 1)]f(m,n)\cdot f(m,n) = 0, \tag{97}$$

which is the Discrete Toda equation of Type 1,where we have changed the bilinear operators, D_m and D_n as $D_m \to 2D_m$ and $D_n \to 2D_n$ for notational convenience.

We write Eq.(97) as

$$[\sinh^2(D_m) - \delta^2 \sinh^2(D_n)]f(m,n) \cdot f(m,n) = 0, \tag{98}$$

An extended Bäcklund Transformation for Eq.(98) has been discussed in a paper[4]. We have an extended Bäcklund Transformation of the following form,

$$\sinh(D_m)f \cdot g - \delta\alpha_1 \sinh(D_n)f_1 \cdot g_1 = 0, \tag{99}$$
$$\sinh(D_m)f_1 \cdot g_1 - \delta\alpha_2 \sinh(D_n)f \cdot g = 0, \tag{100}$$
$$[\cosh(D_n) + \beta_1 \sinh(D_n)]f_1 \cdot g_1 = \lambda_1[\cosh(D_m) + \gamma_1 \sinh(D_m)]f \cdot g, \tag{101}$$
$$[\cosh(D_n) + \beta_2 \sinh(D_n)]f \cdot g = \lambda_2[\cosh(D_m) + \gamma_2 \sinh(D_m)]f_1 \cdot g_1. \tag{102}$$

where $\alpha_j, \beta_j, \lambda_j$ and γ_j for $j = 1, 2$ are parameters with the relation $\alpha_1\alpha_2 = \lambda_1\lambda_2$. The extended Bäcklund transformation gives a bilinear form of the discrete Lotka-Volterra equation of coupled form when $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

$$\sinh(D_m)f \cdot g - \delta\alpha \sinh(D_n)f_1 \cdot g_1 = 0, \tag{103}$$
$$\sinh(D_m)f_1 \cdot g_1 - \delta\alpha^{-1} \sinh(D_n)f \cdot g = 0, \tag{104}$$
$$e^{D_n}f_1 \cdot g_1 = e^{D_m}f \cdot g, \tag{105}$$
$$e^{D_n}f \cdot g = e^{D_m}f_1 \cdot g_1. \tag{106}$$

Solving Eqs (105) and (106) we find that $f_1(m,n)$ and $g_1(m,n)$ are expressed by $f(m,n)$ and $g(m,n)$ as

$$f_1(m,n) = g(m-1, n-1) \quad \text{and} \quad g_1(m,n) = f(m+1, n+1), \tag{107}$$

or

$$f_1(m,n) = f(m+1, n-1) \quad \text{and} \quad g_1(m,n) = g(m-1, n+1). \tag{108}$$

We choose the former expression for $f_1(m,n)$ and $g_1(m,n)$.Then Equations (103) and (104) are expressed by

$$[\sinh(D_m) + \delta\alpha \sinh(D_n)e^{D_m+D_n}]f \cdot g = 0, \tag{109}$$
$$[\sinh(D_m)e^{D_m+D_n}] + \delta\alpha^{-1} \sinh(D_n)]f \cdot g = 0. \tag{110}$$

6.2 Lax-Pair for the Discrete Toda Equation of Type 1

We show that Eqs. (109) and (110) are transformed into a Lax-pair for the Discrete Toda equation of type 1.

We write Eqs. (109) and (110) as

$$[(1-\delta\alpha)e^{D_m} - e^{-D_m} + \delta\alpha e^{D_m+2D_n}]f\cdot g = 0, \tag{111}$$

$$[(1-\delta\alpha^{-1})e^{D_n} + \delta\alpha^{-1}e^{-D_n} - e^{2D_m+D_n}]f\cdot g = 0. \tag{112}$$

Let

$$g(m,n) = f(m,n)\psi'(m,n). \tag{113}$$

Then Eqs. (111) and (112) become

$$\begin{aligned}(1-\delta\alpha)&f(m+1,n)f(m-1,n)\psi'(m-1,n) - f(m-1,n)f(m+1,n)\psi'(m+1,n)\\ &+\delta\alpha f(m+1,n+2)f(m-1,n-2)\psi'(m-1,n-2) = 0,\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}(1-\delta\alpha^{-1})&f(m,n+1)f(m,n-1)\psi'(m,n-1) + \delta\alpha^{-1}f(m,n-1)f(m,n+1)\psi'(m,n+1)\\ &-f(m+2,n+1)f(m-2,n-1)\psi'(m-2,n-1) = 0.\end{aligned} \tag{115}$$

which are expressed by

$$[(1-\delta\alpha)e^{-\partial_m} - e^{\partial_m} + \delta\alpha u_1(m,n)e^{-\partial_m-2\partial_n}]\psi'(m,n) = 0, \tag{116}$$

$$[(1-\delta\alpha^{-1})e^{-\partial_n} + \delta\alpha^{-1}e^{\partial_n} - u_2(m,n)e^{-2\partial_m-\partial_n}]\psi'(m,n) = 0. \tag{117}$$

where

$$u_1(m,n) = \frac{f(m+1,n+2)f(m-1,n-2)}{f(m+1,n)f(m-1,n)}, \tag{118}$$

$$u_2(m,n) = \frac{f(m+2,n+1)f(m-2,n-1)}{f(m,n+1)f(m,n-1)}. \tag{119}$$

Eqs. (116) and (117) are transformed into a Lax-form,

$$L_1\psi(m,n) = (1-\delta\alpha)\psi(m,n), \tag{120}$$

$$L_2\psi(m,n) = (1-\delta\alpha^{-1})\psi(m,n), \tag{121}$$

where

$$\psi(m,n) = \psi'(m-1,n), \tag{122}$$

$$L_1 = e^{2\partial_m} - \delta\alpha u_1(m+1,n)e^{-2\partial_n}, \tag{123}$$

$$L_2 = -\delta\alpha^{-1}e^{2\partial_n} + u_2(m,n+1)e^{-2\partial_m}. \tag{124}$$

The commutator,$[L_1, L_2] = 0$ gives the equation of $u_1(m,n)$ and $u_2(m,n)$,

$$u_2(m+2,n+1) - u_2(m,n+1) - \delta^2[u_1(m+1,n) - u_1(m+1,n+2)] = 0, \tag{125}$$

$$u_1(m+1,n)u_2(m,n-1) - u_1(m-1,n)u_2(m,n+1) = 0. \tag{126}$$

Equations (125) and (126) are Discrete Toda equation of type 1 and are solved by Eqs.(97),(118) and (119).

6.3 Discrete Lotka-Volterra equation of coupled form

We show that the bilinear form of the discrete Lotka-Volterra equation,

$$[\sinh(D_m) + \delta\alpha \sinh(D_n)e^{D_m+D_n}]f \cdot g = 0,$$
$$[\sinh(D_m)e^{D_m+D_n}] + \delta\alpha^{-1} \sinh(D_n)]f \cdot g = 0.$$

is transformed into the discrete Lotka-Volterra equation of coupled form,

$$\frac{v(m+1,n)}{v(m-1,n)} = \frac{1-\delta\alpha[1-v_1(m,n+1)]}{1-\delta\alpha[1-v_1(m,n-1)]}, \tag{127}$$
$$\frac{v_1(m+1,n)}{v_1(m-1,n)} = \frac{1-\delta\alpha^{-1}[1-v(m,n+1)]}{1-\delta\alpha^{-1}[1-v(m,n-1)]}, \tag{128}$$

through the dependent variable transformation,

$$v(m,n) = \frac{f(m,n-1)g(m,n+1)}{f(m,n+1)g(m,n-1)}, \tag{129}$$
$$v_1(m,n) = \frac{f(m+1,n+2)g(m-1,n-2)}{f(m+1,n)g(m-1,n-1)}. \tag{130}$$

We have the bilinear equations (111) and (112), which are arranged as

$$f(m-1,n)g(m+1,n) = (1-\delta\alpha)f(m+1,n)g(m-1,n)$$
$$+\delta\alpha f(m+1,n+2)g(m-1,n-2), \tag{131}$$
$$f(m+2,n+1)g(m-2,n-1) = (1-\delta\alpha^{-1})f(m,n+1)g(m,n-1)$$
$$+\delta\alpha^{-1}f(m,n-1)g(m,n+1). \tag{132}$$

Let us introduce new variables, $x(m,n)$ and $x_1(m,n)$ by

$$x(m,n) = \frac{f(m+2,n+1)g(m-2,n-1)}{f(m,n+1)g(m,n-1)}, \tag{133}$$
$$x_1(m,n) = \frac{f(m-1,n)g(m+1,n)}{f(m+1,n)g(m-1,n)}. \tag{134}$$

Then the above bilinear forms are expressed simply by

$$x_1(m,n) = 1 - \delta\alpha + \delta\alpha v_1(m,n), \tag{135}$$
$$x(m,n) = 1 - \delta\alpha^{-1} + \delta\alpha^{-1}v(m,n). \tag{136}$$

On the other hand we find the following relations among $v(m,n), v_1(m,n), x(m,n)$ and $x_1(m,n)$

$$\frac{v(m+1,n)}{v(m-1,n)} = \frac{x_1(m,n+1)}{x_1(m,n-1)}, \tag{137}$$

$$\frac{v_1(m+1,n)}{v_1(m-1,n)} = \frac{x(m,n+1)}{x(m,n-1)}, \tag{138}$$

which give the descrete Lotka-Volterra equation of coupled form,

$$\frac{v(m+1,n)}{v(m-1,n)} = \frac{1-\delta\alpha[1-v_1(m,n+1)]}{1-\delta\alpha[1-v_1(m,n-1)]}, \tag{139}$$

$$\frac{v_1(m+1,n)}{v_1(m-1,n)} = \frac{1-\delta\alpha^{-1}[1-v(m,n+1)]}{1-\delta\alpha^{-1}[1-v(m,n-1)]}, \tag{140}$$

which can easily be ultradiscretized for $\delta\alpha < 1$ and $\delta\alpha^{-1} < 1$.

6.4 Miura Transformation 3

We shall find the Miura transformation which expresses the dependent variables of the discrete Toda equation of type 1, $u_1(m,n)$ and $u_2(m,n)$ with the dependent variables of the discrete Lotka-Volterra equation of coupled form, $v(m,n)$ and $v_1(m,n)$.
We have

$$u_1(m,n) = \frac{f(m+1,n+2)f(m-1,n-2)}{f(m+1,n)f(m-1,n)}, \tag{141}$$

$$u_2(m,n) = \frac{f(m+2,n+1)f(m-2,n-1)}{f(m,n+1)f(m,n-1)} \tag{142}$$

and

$$v(m,n) = \frac{f(m,n-1)g(m,n+1)}{f(m,n+1)g(m,n-1)},$$

$$v_1(m,n) = \frac{f(m+1,n+2)g(m-1,n-2)}{f(m+1,n)g(m-1,n)},$$

$$x(m,n) = \frac{f(m+2,n+1)g(m-2,n-1)}{f(m,n+1)g(m,n-1)},$$

$$x_1(m,n) = \frac{f(m-1,n)g(m+1,n)}{f(m+1,n)g(m-1,n)},$$

which give

$$v(m-1,n-1) = \frac{f(m-1,n-2)g(m-1,n)}{f(m-1,n)g(m-1,n-2)},$$
$$x_1(m-1,n-1) = \frac{f(m-2,n-1)g(m,n-1)}{f(m,n-1)g(m-2,n-1)}.$$

Accordingly we find the following relations

$$u_1(m,n) = v(m-1,n-1)v_1(m,n), \tag{143}$$
$$u_2(m,n) = x(m,n)x_1(m-1,n-1). \tag{144}$$

We have $x(m,n)$ and $x_1(m,n)$ expressed by $v(m,n)$ and $v_1(m,n)$. Accordingly Eq.(143),(144) is a Miura transformation expressing $u_1(m,n), u_2(m,n)$ by $v(m,n), v_1(m,n)$

References

[1] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge, Cambridge University Press, 2004).

[2] 広田良吾『行列式とパフィアン (4)』応用数理 **14**, (2004) 381-389.

[3] R. Hirota and J,Satsuma"N-Soliton Solutions of Nonlinear Network Equations Describing a Volterra System", J. Phys. Soc. Jpn. **40**(1976)891-900.

[4] R. Hirota,"Nonlinear Partial Difference Equations.IV. Bäcklund Transformation for the Discrete-Time Toda Equation", J. Phys. Soc. Jpn. **45**(1978)321-332.