数理解析研究所講究録
第 1765 巻 2011 年 124-136

境界付き qKZ 方程式と非対称 Koornwinder 多項式について

東京大学大学院数理科学研究科　笠谷 昌弘 (Masahiro Kasatani) [1]
Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

1 はじめに

本講演は茂地圭一氏との共同研究 [3] に基づいたものである.

Frenkel と Reshetikhin により導入された [1] 量子 Knizhnik-Zamolodchikov (qKZ) 方程式とは, 量子アフィン代数の表現論における頂点作用素の積の行列要素が満たす差分方程式系である.

講演者と竹山美宏氏は論文 [4] で, 量子群 $U_q(sl_N)$ のベクトル表現 V のテンソル積 $V^{\otimes n}$ の場合について, qKZ 方程式の多項式解を与えた. そこでは, Dunkl-Cherednik 作用素と Demazure-Lusztig 作用素についての或る固有値問題を考え, その解から qKZ 方程式の解を構成する手法を定式化した.

本講演では, 境界付きの qKZ 方程式を導入する. これは R-行列と K-行列の積によって定義される, $V^{\otimes n}$-値関数が満たす差分方程式系である. (正確な定義は §2 で与える.) R-行列は $V\otimes V$ に働く線形作用素であり, 二つの空間の相互作用を意味している. 我々の導入する K-行列は V に働く線形作用素であり, 境界での "部分的な" 反射を意味している. これらの行列や方程式は合わせて 6 つのパラメータを持つ.

境界付き qKZ 方程式を解くにあたり, C_n 型のアフィン Hecke 代数 (AHA)$\mathcal{H}_n$ の多項式表現と関連づけて考える. この多項式表現は, 6-パラメータを持つ $C^{\vee}C_n$ 型ダブルアフィン Hecke 代数 (DAHA) の多項式表現を制限したものであり, 野海表現 [7] とも呼ばれている. 我々はいくつかの作用素 (の積) についての固有値問題 (§3.3) を導入し, その解から境界付き qKZ 方程式の解を構成する手法を定式化した.

この固有値問題に対して, 非対称 Koornwinder 多項式 (6 パラメータを持つ多変数直交多項式系) を用いて具体的な解を与える. この手法は generic なパラメータだけでなく特殊化されたパラメータの場合にも解を与えることができる. 或るパラメータの特殊化の場合には, 特殊解として 1 次式の積に分解する解が得られる. これは論文 [6] [4] で得られたレベル 1 qKZ 方程式の解の一般化であると考えられる.

Stokman [8] は [4] の結果を一般のルート系に拡張した. その結果は本研究の結果と類似しているが, いくつか異なる点がある. [8] は 6 パラメータが現れる $C^{\vee}C_n$ 型は扱っておらず, 方程式の定式化で用いられる K-行列も境界で

[1] E-mail: kasatani@ms.u-tokyo.ac.jp

の "完全な" 反射のみである. また §4 で紹介するような厳密解の例を与えていない.

解の構成についての大まかなあらすじは以下のとおりである.

V の標準基底を $\{v_{-M}, \ldots, v_M\}$ とする. $V^{\otimes n}$-値の未知関数をテンソル積の標準基底 $v_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes v_{\epsilon_n}$ の一次結合で展開する. 境界付き qKZ 方程式は, この展開で係数として現れる関数の族に対するいくつかの拘束条件として記述される. 本研究では, 境界付き qKZ 方程式そのものよりも強い条件を課し, その条件を満たす関数族を *qKZ family* と呼ぶ. (§3.2 を参照.)

qKZ family を定義する条件は, 関数空間に働く AHA $\mathcal{H}_n$ の作用を用いて記述される. $\mathcal{H}_n$ とは生成元 T_i $(0 \le i \le n)$ と定義関係式で定まる代数である. (§3.1 を参照.) ここで現れる T_i の作用とは多項式表現 (野海表現) のそれに他ならない. 適当な T_i たちを施すことによって, qKZ family の任意の元は別の元に移りあう.

各 qKZ family には特別な要素が存在し, それは T_i たちの積で与えられるいくつかの作用素たちの同時固有関数になっていることが示される. 逆に, それらの作用素たちの同時固有関数から qKZ family を生成することができる. したがって qKZ family を構成するという問題は, それらの作用素の同時固有関数を見つけるという問題に帰着される.

固有値問題の定義 (Def. 3.3) では, 次のような作用素の積が現れる:

$$Y_i := T_i \ldots T_{n-1}(T_n \ldots T_0)T_1^{-1} \ldots T_{i-1}^{-1}.$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ たちの同時固有関数は非対称 Koornwinder 多項式と呼ばれている. (例えば [5] を見よ.) このことを利用し, 特定の性質を持つ非対称 Koornwinder 多項式から境界付き qKZ 方程式の解を構成することができる.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (若手 B, No. 21740005) の助成を受けたものである. 三輪哲二先生, 竹山美宏氏からは多くの有益なコメントをいただきました. ここに感謝の意を表します.

2 境界付き量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式

この節では R-行列, K-行列と呼ばれる線形作用素を定義する. またこれらの行列の積を用いて境界付き量子 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式を定義する.

V を有限次元ベクトル空間とし, その基底を次で与える.

$$V = \bigoplus_{-M\le\epsilon\le M,\epsilon\neq 0} \mathbb{C}v_\epsilon \quad (\text{if } \dim V = 2M),$$
$$V = \bigoplus_{-M\le\epsilon\le M} \mathbb{C}v_\epsilon \quad (\text{if } \dim V = 2M+1).$$

変形パラメータ q を持つ線形作用素 $R(z) \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ は次で定義される (z はスペクトル変数).

$$R(z)\,(v_{\epsilon_1}\otimes v_{\epsilon_2}) = \sum_{\epsilon'_1,\epsilon'_2} R(z)_{\epsilon'_1\epsilon'_2}^{\epsilon_1\epsilon_2}\, v_{\epsilon'_1}\otimes v_{\epsilon'_2},$$

ただし

$$R(z)_{ii}^{ii} = 1, \quad R(z)_{ij}^{ij} = \frac{(1-z)q}{1-q^2z}, \quad R(z)_{ij}^{ji} = \frac{1-q^2}{1-q^2z}z^{\theta(i>j)} \quad (i\neq j)$$

また $R(z)_{i'j'}^{ij} = 0$ (それ以外のとき). ただし

$$\theta(P) = \begin{cases} 1 & P \text{ が真のとき}, \\ 0 & P \text{ が偽のとき}. \end{cases}$$

作用素 $R(z)$ は $V^{\otimes 3}$ 上で Yang-Baxter 方程式を満たす:

$$R_{1,2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)R_{1,3}\left(\frac{z_1}{z_3}\right)R_{2,3}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = R_{2,3}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)R_{1,3}\left(\frac{z_1}{z_3}\right)R_{1,2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

ここで $R(z)$ の添え字は何番目のテンソル積に働くかを表す. P を 2 つのテンソル積の置換作用素 ($P(u\otimes v) = v\otimes u$) とし, $\check{R}(z) = PR(z)$ とおく.

α と β を, $0\le\alpha,\beta\le M$ なる非負整数とする. パラメータ $q_n^{1/2}$, $u_n^{1/2}$, $q_0^{1/2}$, $u_0^{1/2}$, $s^{1/2}$ を持つ[2] 線形作用素 $K(z)$ および $\overline{K}(z) \in \mathrm{End}(V)$ を次で定義する (z はスペクトル変数):

$$K(z)v_i = \sum_{i'} K_{i'}^i(z)v_{i'}, \qquad \overline{K}(z)v_i = \sum_{i'} \overline{K}_{i'}^i(z)v_{i'},$$

$$K_i^i(z) = 1 \qquad (|i|\le\alpha),$$
$$K_i^i(z) = q_n\frac{1-z^2}{(1-az)(1-bz)} \qquad (|i|>\alpha),$$
$$K_{-i}^i(z) = -q_n\frac{(q_n-q_n^{-1})z^{2\theta(i<0)} + (u_n^{1/2}-u_n^{-1/2})z}{(1-az)(1-bz)} \qquad (|i|>\alpha)$$
$$(\text{ただし } a = q_n^{1/2}u_n^{1/2},\ b = -q_n^{1/2}u_n^{-1/2}).$$

[2] $\overline{K}(z)$ の定義では, スペクトル変数を z から $s^{1/2}z^{-1}$ にとりかえれば $s^{1/2}$ を含まないで行列を定義することも可能であるが, 後の議論の都合上この形を用いた.

$$\begin{aligned}
\overline{K}^i_i(z) &= 1 \qquad (|i| \le \beta),\\
\overline{K}^i_i(z) &= q_0 \frac{1-sz^{-2}}{(1-cz^{-1})(1-dz^{-1})} \qquad (|i| > \beta),\\
\overline{K}^i_{-i}(z) &= -c_i q_0 \frac{(q_0 - q_0^{-1}) s^{\theta(i>0)} z^{-2\theta(i>0)} + (u_0^{1/2} - u_0^{-1/2}) s^{1/2} z^{-1}}{(1-cz^{-1})(1-dz^{-1})} \qquad (|i| > \beta)\\
&\quad (\text{ただし } c = s^{1/2} q_0^{1/2} u_0^{1/2},\ d = -s^{1/2} q_0^{1/2} u_0^{-1/2}).
\end{aligned}$$

また $K^i_j(z) = \overline{K}^i_j(z) = 0$ (それ以外のとき). すると $R(z)$ と $K(z)$, および $R(z)$ と $\overline{K}(z)$ は $V^{\otimes 2}$ 上で反射方程式を満たす[2]:

$$\begin{aligned}
K_2(w) R_{2,1}(zw) K_1(z) R_{1,2}\left(\frac{z}{w}\right) &= R_{1,2}\left(\frac{z}{w}\right) K_1(z) R_{2,1}(zw) K_2(w)\\
\overline{K}_1(z) R_{2,1}\left(\frac{s}{zw}\right) \overline{K}_2(w) R_{1,2}\left(\frac{z}{w}\right) &= R_{1,2}\left(\frac{z}{w}\right) \overline{K}_2(w) R_{2,1}\left(\frac{s}{zw}\right) \overline{K}_1(z).
\end{aligned}$$

$P^{(n)}$, $P^{(0)}$ を次で定め

$$P^{(n)}(v_i) = \begin{cases} v_i & (|i| \le \alpha) \\ v_{-i} & (|i| > \alpha), \end{cases} \qquad P^{(0)}(v_i) = \begin{cases} v_i & (|i| \le \beta) \\ c_i v_{-i} & (|i| > \beta), \end{cases}$$

また $\check{K}(z) = P^{(n)} K(z)$, $\check{\overline{K}}(z) = P^{(0)} \overline{K}(z)$ とおく. ここで $c_{-M}, \ldots, c_M$ は $c_0 = 1$, $c_i c_{-i} = 1$ を満たす方程式のパラメータである.

符号付きの $\check{R}$-行列や $\check{K}$-行列 $\check{R}^{\pm}$, $\check{K}^{\pm}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\check{R}_i^+(z) &= \check{R}_{i,i+1}(z), & \check{R}_i^-(z) &= f(z) \check{R}_{i,i+1}(z),\\
\check{K}^+(z) &= \check{K}(z), & \check{K}^-(z) &= f^n(z) \check{K}(z),\\
\check{\overline{K}}^+(z) &= \check{\overline{K}}(z), & \check{\overline{K}}^-(z) &= f^0(z) \check{\overline{K}}(z).
\end{aligned}$$

ここで, f, f^n, f^0 は次で与えられる有理関数である:

$$f(z) = \frac{q^2 z - 1}{q^2 - z}, \quad f^n(z) = \frac{1 - q_n^2 z^2 - (u_n^{1/2} - u_n^{-1/2}) z}{-q_n^2 + z^2 - (u_n^{1/2} - u_n^{-1/2}) z},$$

$$f^0(z) = \frac{1 - s q_0^2 z^{-2} - s^{1/2} q_0 (u_0^{1/2} - u_0^{-1/2}) z^{-1}}{-q_0^2 + s z^{-2} - s^{1/2} q_0 (u_0^{1/2} - u_0^{-1/2}) z^{-1}}.$$

f, f^n, f^0 は $f(z) f(1/z) = 1$, $f^n(z) f^n(1/z) = 1$, $f^0(z) f^0(s/z) = 1$ を満たしていることに注意.

3 つの符号 $\sigma, \sigma_n, \sigma_0$ を勝手にとる. 簡単のため, ここでは $V^{\otimes n}$ の i-番目と $(i+1)$-番目の成分に働く作用素 $\check{R}^{\sigma}_{i,i+1}(z)$ を $Q_i^{\sigma}(z)$ と表すことにする. 同様に, $V^{\otimes n}$ の n 番目の成分に働く作用素 $\check{K}^{\sigma_n}(z)$ を $Q_n^{\sigma_n}(z)$ と, $V^{\otimes n}$ の 1 番目の成分に働く作用素 $\check{\overline{K}}^{\sigma_0}(z)$ を $Q_0^{\sigma_0}(z)$ と表す.

Definition 2.1 境界付き量子 Knizhnik-Zamolodchikov (qKZ) 方程式とは, $V^{\otimes n}$-値関数 $F(z_1, \ldots, z_n)$ に対する次の s-差分方程式系である: 各 $1 \le i \le n$

に対し

$$\begin{aligned} F(z_1,\ldots,sz_i,\ldots,z_n) &= Q^{\sigma}_{i-1}(sz_i/z_{i-1})\cdots Q^{\sigma}_1(sz_i/z_1)Q^{\sigma_0}_0(z_i) \\ &\quad Q^{\sigma}_1(z_1z_i)\cdots Q^{\sigma}_i(z_iz_{i+1})\cdots Q^{\sigma}_{n-1}(z_nz_i)Q^{\sigma_n}_n(z_i) \\ &\quad Q^{\sigma}_{n-1}(z_i/z_n)\cdots Q^{\sigma}_i(z_i/z_{i+1})F(z_1,\ldots,z_n). \end{aligned}$$

3 固有値問題

この節では, C_n 型アフィン Hecke 代数 $\mathcal{H}_n$ の多項式表現 (野海表現) について復習し, その $\mathcal{H}_n$-作用で記述される条件を満たす Laurent 多項式の族 (qKZ family) を導入する. その族の要素と $V^{\otimes n}$ の基底ベクトルを組み合わせ和をとることで $V^{\otimes n}$-値 Laurent 多項式が得られるが, それが境界付き qKZ 方程式の解を与えることを示す. また, qKZ family を見つけることと, 或る固有値問題を解くことが同値であることを示す.

3.1 アフィン Hecke 代数と多項式表現

C_n 型アフィン Hecke 代数 $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(t^{1/2}, t_n^{1/2}, t_0^{1/2})$ とは, 生成元 $T_0,\ldots,T_n$ と次の定義関係式で定まる代数である.

$$\begin{aligned} (T_0 - t_0^{1/2})(T_0 + t_0^{-1/2}) &= 0, \\ (T_i - t^{1/2})(T_i + t^{-1/2}) &= 0 \qquad (1 \le i \le n-1), \\ (T_n - t_n^{1/2})(T_n + t_n^{-1/2}) &= 0, \\ T_0T_1T_0T_1 &= T_1T_0T_1T_0, \\ T_iT_{i+1}T_i &= T_{i+1}T_iT_{i+1} \qquad (1 \le i \le n-2), \\ T_{n-1}T_nT_{n-1}T_n &= T_nT_{n-1}T_nT_{n-1}, \\ T_iT_j &= T_jT_i \qquad (|i-j| \ge 2). \end{aligned}$$

なお, Y_i $(1 \le i \le n)$ を次で定めると

$$Y_i := T_j \ldots T_{n-1}(T_n \ldots T_0)T_1^{-1} \ldots T_{j-1}^{-1}$$

これらは互いに可換であることに注意する.

$W = \langle s_0,\ldots,s_n\rangle$ を C_n 型のアフィン Weyl 群とする. 変形パラメータ s を用いて, n-変数関数への W の作用が次で定まる:

$$\begin{aligned} s_if(\ldots,z_i,z_{i+1},\ldots) &= f(\ldots,z_{i+1},z_i,\ldots) \\ s_nf(\ldots,z_n) &= f(\ldots,1/z_n) \\ s_0f(z_1,\ldots) &= f(s/z_1,\ldots). \end{aligned}$$

さらに 2 つのパラメータ u_n および u_0 を追加し,

$$a := t_n^{1/2}u_n^{1/2}, b := -t_n^{1/2}u_n^{-1/2}, c := s^{1/2}t_0^{1/2}u_0^{1/2}, d := -s^{1/2}t_0^{1/2}u_0^{-1/2}$$

とおき, $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ の元に働く線形作用素を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_0^{\pm 1} &= t_0^{\pm 1/2} + t_0^{-1/2}\frac{(1-cz_1^{-1})(1-dz_1^{-1})}{1-sz_1^{-2}}(s_0-1) \\
\widehat{T}_i^{\pm 1} &= t_i^{\pm 1/2} + t_i^{-1/2}\frac{1-t_iz_iz_{i+1}^{-1}}{1-z_iz_{i+1}^{-1}}(s_i-1) \\
\widehat{T}_n^{\pm 1} &= t_n^{\pm 1/2} + t_n^{-1/2}\frac{(1-az_n)(1-bz_n)}{1-z_n^2}(s_n-1).
\end{aligned}$$

すると写像 $T_i \mapsto \hat{T}_i$ $(0 \leq i \leq n)$ は $\mathcal{H}_n$ の表現を与える. これは $C^\vee C_n$ 型ダブルアフィン Hecke 代数の多項式表現をその部分代数である $\mathcal{H}_n$ に制限したものになっており, 野海表現とも呼ばれる.

3.2 qKZ family

関数倍の作用の部分を無視すれば, R-行列は高々2 つのテンソル積成分の入れ替えであり, K-行列は高々1 つのベクトル空間の折り返しである. したがって $V^{\otimes n}$ をそれらの作用の軌道に分解することで, 各軌道に分けて独立に方程式を考えればよいことがわかる.

$\gamma := \min(\alpha, \beta)$ とおき, 正の整数 $d_{-M}, d_{-M+1}, \ldots, d_\gamma$ で $\sum_{i=-M}^{\gamma} d_i = n$ を満たすものをとる. $\delta \in \mathbb{Z}^n$ および $I_d \subset \mathbb{Z}^n$ を次で決める:

$$\begin{aligned}
\delta &:= ((-M)^{d_{-M}}, \ldots, \ldots, (-\gamma-1)^{d_{-\gamma-1}}, (-\gamma)^{d_{-\gamma}}, \ldots, \gamma^{d_\gamma}) && (1) \\
I_d &:= \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n; && (2) \\
&\qquad \sharp\{j; m_j = i\} = d_i \quad (-\gamma \leq i \leq \gamma) \\
&\qquad \sharp\{j; m_j = i\} + \sharp\{j; m_j = -i\} = d_i \quad (-M \leq i \leq -\gamma-1)\}.
\end{aligned}$$

I_d は各軌道の添え字集合であり δ は I_d の代表元である.

集合 $\mathbb{Z}^n$ 上の W-作用 $\cdot$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
s_0 \cdot (m_1, m_2, \ldots) &= (-m_1, m_2, \ldots) \\
s_i \cdot (\ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots) &= (\ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, m_i, m_{i+2}, \ldots) \\
s_n \cdot (\ldots, m_{n-1}, m_n) &= (\ldots, m_{n-1}, -m_n).
\end{aligned}$$

Definition 3.1 Laurent 多項式の族 $\{f_\epsilon; \epsilon \in I_d\}$ が次の条件を満たすとき,

符号 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0)$, 指数 $c_1, \ldots, c_M$ の qKZ family と呼ぶ:

$$\begin{aligned}
&\text{各 } 1 \le i \le n-1 \text{ について} \\
&\qquad \hat{T}_i f_\epsilon = q f_\epsilon \quad \text{if } \epsilon_i = \epsilon_{i+1} \qquad (3) \\
&\qquad \hat{T}_i f_\epsilon = f_{s_i \cdot \epsilon} \quad \text{if } \epsilon_i > \epsilon_{i+1} \qquad (4) \\
&i = n \text{ について} \\
&\qquad \hat{T}_n f_\epsilon = q_n f_\epsilon \quad \text{if } |\epsilon_n| \le \alpha \qquad (5) \\
&\qquad \hat{T}_n f_\epsilon = f_{s_n \cdot \epsilon} \quad \text{if } \epsilon_n > \alpha \qquad (6) \\
&i = 0 \text{ について} \\
&\qquad \hat{T}_0 f_\epsilon = q_0 f_\epsilon \quad \text{if } |\epsilon_1| \le \beta \qquad (7) \\
&\qquad \hat{T}_0 f_\epsilon = c_{-\epsilon_1} f_{s_0 \cdot \epsilon} \quad \text{if } \epsilon_1 < -\beta \qquad (8)
\end{aligned}$$

ただし $(q, q_n, q_0) = (\sigma t^{\sigma/2}, \sigma_n t_n^{\sigma_n/2}, \sigma_0 t_0^{\sigma_0/2})$, $c_0 := 1$, $i < 0$ に対し $c_i := c_{-i}^{-1}$.

実は, 多項式族に対する上記の条件は境界付き qKZ 方程式の解を構成するための十分条件であることが分かる. これがひとつめの主定理である:

Theorem 3.2 上記の記法のもとで, $\{f_\epsilon; \epsilon \in I_d\}$ は符号 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0)$, 指数 $c_1, \ldots, c_M$ の *qKZ family* とする. このとき

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\epsilon \in I_d} f_\epsilon v_\epsilon$$

は同一の符号 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0)$ およびパラメータ $c_1, \ldots, c_M$ で定義される境界付き *qKZ*方程式の解である. 他のパラメータの対応は $(q, q_n, q_0) = (\sigma t^{\sigma/2}, \sigma_n t_n^{\sigma_n/2}, \sigma_0 t_0^{\sigma_0/2})$ で与えられる.

3.3 固有値問題

簡単のため, この節からは $\mathcal{H}_n$ の元とそれに対応する作用素 (たとえば T_i と $\hat{T}_i$) を同一視し, 記号 ^ を省略する.

互いに可換な作用素 Y_i $(1 \le i \le n)$ は次のような積で与えられていた:

$$Y_i = T_i \ldots T_{n-1}(T_n \ldots T_0) T_1^{-1} \ldots T_{i-1}^{-1}.$$

Definition 3.3 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0)$ を符号とし, 正の整数 $d_{-M}, d_{-M+1}, \ldots, d_\gamma$ は $\sum_{i=-M}^{\gamma} d_i = n$ を満たしているとする. δ および I_d を式 *(1)*, *(2)* で決める. E を未知の

Laurent 多項式とし, 次のような固有値問題を定義する:

$$
\begin{aligned}
&Y_i E = \chi_i E \quad \textit{if } \delta_i < -\max(\alpha,\beta)\\
&T_i E = \sigma t^{\sigma/2} E \quad \textit{if } \delta_i = \delta_{i+1}\\
&T_{i-1}\cdots T_1 T_0 T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1} E = \sigma_0 t_0^{\sigma_0/2} E \quad \textit{if } |\delta_i| \le \beta\\
&T_i \cdots T_{n-1} T_n T_{n-1}^{-1}\cdots T_i^{-1} E = \sigma_n t_n^{\sigma_n/2} E \quad \textit{if } |\delta_i| \le \alpha\\
&(T_{n-1}\cdots T_1 T_0 T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1})^{-1} T_n (T_{n-1}\cdots T_1 T_0 T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1}) E\\
&\quad = \sigma_n t_n^{\sigma_n/2} E \quad \textit{if } -\alpha \le \delta_i < -\beta\\
&(T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1} T_n^{-1} T_{n-1}^{-1}\cdots T_i^{-1})^{-1} T_0 (T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1} T_n^{-1} T_{n-1}^{-1}\cdots T_i^{-1}) E\\
&\quad = \sigma_0 t_0^{\sigma_0/2} E \quad \textit{if } -\beta \le \delta_i < -\alpha.
\end{aligned}
$$

符号 $(\sigma,\sigma_n,\sigma_0)$, 指数 $c_1,\ldots,c_M$ の qKZ family $\{f_\epsilon;\epsilon\in I_d\}$ に対し, その特別な要素 f_δ は上記の固有値問題の解となることが容易に確認できる. 固有値 χ_i は次の式で与えられる:

$$
\begin{aligned}
\chi_i \quad &= \quad c_{-\delta_i}(\sigma t^{\sigma/2})^{n(\delta,>i)-n(\delta,<i)}\\
&\quad\ \text{ここで}\quad n(\delta,<i) := \sharp\{j; j<i, \delta_j=\delta_i\}\\
&\qquad\qquad\quad\ n(\delta,>i) := \sharp\{j; j>i, \delta_j=\delta_i\}.
\end{aligned}
$$

逆に, 上記の固有値問題の解 E に対し, 適当な T_i たちを作用させることで qKZ family を得ることができる. 厳密な主張 (Theorem 3.5) を与える前にいくつかの記号を準備しよう.

Lemma 3.4 $\epsilon\in I_d$ を固定する. $w\in W$ に対し, $w=s_{i_r}\cdots s_{i_1}$ を簡約表示とする. 各 $1\le m\le r$ に対し, $\epsilon^{(m)} := s_{i_m}\cdots s_{i_1}\cdot\epsilon$ とおく. $T_\emptyset^\epsilon = 1$ とし $T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1}$ を帰納的に次で定義する:

$1\le i_m\le n-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= T_{i_m} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } \epsilon^{(m-1)}_{i_m} > \epsilon^{(m-1)}_{i_m+1}\\
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= \sigma t^{-\sigma/2} T_{i_m} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } \epsilon^{(m-1)}_{i_m} = \epsilon^{(m-1)}_{i_m+1}\\
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= T_{i_m}^{-1} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } \epsilon^{(m-1)}_{i_m} < \epsilon^{(m-1)}_{i_m+1}
\end{aligned}
$$

$i_m = n$ のとき

$$
\begin{aligned}
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= T_{i_m} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } \epsilon^{(m-1)}_n > \alpha\\
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= \sigma_n t_n^{-\sigma_n/2} T_{i_m} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } |\epsilon^{(m-1)}_n| \le \alpha\\
T^\epsilon_{i_m,\ldots,i_1} &:= T_{i_m}^{-1} T^\epsilon_{i_{m-1},\ldots,i_1} && \textit{if } \epsilon^{(m-1)}_n < -\alpha
\end{aligned}
$$

$i_m = 0$ のとき

$$\begin{array}{lcll} T^{\epsilon}_{i_m,\ldots,i_1} & := & c^{-1}_{-\epsilon_1^{(m-1)}} T_{i_m} T^{\epsilon}_{i_{m-1},\ldots,i_1} & \mathit{if}\ \epsilon_1^{(m-1)} < -\beta \\ T^{\epsilon}_{i_m,\ldots,i_1} & := & \sigma_0 t_0^{-\sigma_0/2} T_{i_m} T^{\epsilon}_{i_{m-1},\ldots,i_1} & \mathit{if}\ |\epsilon_1^{(m-1)}| \leq \beta \\ T^{\epsilon}_{i_m,\ldots,i_1} & := & c_{\epsilon_1^{(m-1)}} T^{-1}_{i_m} T^{\epsilon}_{i_{m-1},\ldots,i_1} & \mathit{if}\ \epsilon_1^{(m-1)} > \beta. \end{array}$$

このとき, $T^{\epsilon}_{i_r,\ldots,i_1}$ は w の簡約表示の取り方によらずに定まり, T^{ϵ}_w と表す.

$\epsilon \in I_d$ に対し, 列 $(i_r, \ldots i_1) \in \{0, \ldots, n\}^r$ が ϵ-good であるとは, $\epsilon^{(m)} := s_{i_m} \cdots s_{i_1} \cdot \epsilon$ $(1 \leq m \leq r)$ たちが次の関係を満たすときをいう:

$$\begin{array}{lcll} \epsilon^{(m-1)}_{i_m} & \neq & \epsilon^{(m-1)}_{i_m+1} & (1 \leq i_m \leq n-1) \end{array} \tag{9}$$

$$\begin{array}{lcll} |\epsilon^{(m-1)}_n| & > & \alpha & (i_m = n) \end{array} \tag{10}$$

$$\begin{array}{lcll} |\epsilon^{(m-1)}_1| & > & \beta & (i_m = 0). \end{array} \tag{11}$$

これらの記号を用いて次の主定理が述べられる.

Theorem 3.5 *Def. 3.3* で定義した固有値問題の解を E とする. 任意の $\epsilon \in I_d$ に対し, $w_\epsilon \cdot \delta = \epsilon$ を満たすような δ-*good* な元 $w_\epsilon \in W$ が存在する. このとき $T^{\delta}_{w_\epsilon} E$ は w_ϵ の取り方によらない. $f_\epsilon := T^{\delta}_{w_\epsilon} E$ とおくと, *Laurent* 多項式の族 $\{f_\epsilon; \epsilon \in I_d\}$ は *qKZ family* をなす. ここで指数は次で与えられる

$$c_{-\delta_i} := \chi_i (\sigma t^{\sigma/2})^{-n(\delta,>i)+n(\delta,<i)}.$$

4 特殊解

この節では, まず $Y_1, \ldots, Y_n$ についての同時固有関数である, 非対称 Koornwinder 多項式の定義と性質について復習する. 特定の非対称 Koornwinder 多項式は T_i-固有関数でもあることがわかる. そこから前節で導入した固有値問題 (Definition 3.3) の解を得ることができる. したがって, Theorem 3.2 および Theorem 3.5 から境界付き qKZ 方程式の解が得られる.

4.1 非対称 Koornwinder 多項式

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ とする. $W_0 = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ を C_n 型の有限 Weyl 群とし, λ^+ を $W_0 \cdot \lambda$ の支配的元とする. すなわち, $\lambda^+_1 \geq \lambda^+_2 \geq \cdots \geq \lambda^+_n \geq 0$ である. $\mathbb{Z}^n$ 上に 2 つの半順序 $\lambda \geq \mu$ および $\lambda \succeq \mu$ を次で定義する:

$$\begin{array}{lll} \lambda \geq \mu & \text{if} & \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{i} \mu_j \quad (1 \leq \forall i \leq n), \\ \lambda \succeq \mu & \text{if} & \lambda^+ > \mu^+, \text{ or } \lambda^+ = \mu^+ \text{ and } \lambda \geq \mu. \end{array}$$

$w \cdot \lambda^+ = \lambda$ を満たす最短元 $w \in W_0$ をとり w_λ^+ で表す．また，$\rho = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$，$\rho(\lambda) = w_\lambda^+ \cdot \rho$，$\sigma(\lambda) = (\mathrm{sgn}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{sgn}(\lambda_n))$ (ただし $\mathrm{sgn}(0) = +1$) とおく．

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ に対し，非対称 Koornwinder 多項式 E_λ は次の 2 つの条件で定義されるものである:

$$\begin{aligned} Y_i E_\lambda &= y(\lambda)_i E_\lambda \qquad (12) \\ \text{ただし}\quad y(\lambda)_i &:= s^{\lambda_i} t^{\rho(\lambda)_i} (t_n t_0)^{\sigma(\lambda)_i/2} \\ E_\lambda &= x^\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} c_{\lambda\mu} x^\mu \quad (c_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

s, t, t_n, t_0 が次の条件をいずれも満たさないとき，パラメータは *generic* であるという:

$$\begin{aligned} &s^{r-1} t^{k+1} = 1 \quad (n-1 \geq k+1 \geq 0, r-1 \geq 1) \\ &s^{r-1} t^{k+1} t_n t_0 = 1 \quad (2n-2 \geq k+1 \geq 0, r-1 \geq 1). \end{aligned}$$

パラメータが generic ならば，$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ が動くとき，Y_i の固有値 $y(\lambda)_i$ たちは (組として) 互いに異なる．したがってこのとき非対称 KoornwinderE_λ 多項式は well-defined である．

作用素 T_i $(1 \leq i \leq n)$ の E_λ に対する作用は次で与えらえる．$1 \leq i \leq n-1$ について $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ ならば

$$T_i E_\lambda = -\frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{y(\lambda)_{i+1}/y(\lambda)_i - 1} E_\lambda + t^{1/2} E_{s_i \cdot \lambda}.$$

$1 \leq i \leq n-1$ について $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ ならば

$$T_i E_\lambda = t^{1/2} E_\lambda. \qquad (13)$$

$1 \leq i \leq n-1$ について $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ ならば

$$T_i E_\lambda = -\frac{t^{1/2} - t^{-1/2}}{y(\lambda)_{i+1}/y(\lambda)_i - 1} E_\lambda + t^{-1/2} \frac{N_i^+ N_i^-}{D_i^+ D_i^-} E_{s_i \cdot \lambda} \qquad (14)$$

ここで

$$\begin{aligned} D_i^\pm &:= (y(\lambda)_{i+1}/y(\lambda)_i)^{\pm 1} - 1 \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\ N_i^\pm &:= t^{1/2}((y(\lambda)_{i+1}/y(\lambda)_i)^{\pm 1} - t^{-1}) \qquad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

$\lambda_n < 0$ ならば

$$T_n E_\lambda = -\frac{(t_n^{1/2} - t_n^{-1/2}) + (t_0^{1/2} - t_0^{-1/2}) y(\lambda)_n^{-1}}{y(\lambda)_n^{-2} - 1} E_\lambda + t_n^{1/2} E_{s_n \cdot \lambda}.$$

$\lambda_n = 0$ ならば

$$T_n E_\lambda = t_n^{1/2} E_\lambda. \qquad (15)$$

$\lambda_n > 0$ ならば

$$T_n E_\lambda = -\frac{(t_n^{1/2} - t_n^{-1/2}) + (t_0^{1/2} - t_0^{-1/2}) y(\lambda)_n^{-1}}{y(\lambda)_n^{-2} - 1} E_\lambda + t_n^{-1/2} \frac{N_n^+ N_n^-}{D_n^+ D_n^-} E_{s_n \cdot \lambda} \tag{16}$$

ここで

$$\begin{aligned} D_n^{\pm} &:= y(\lambda)_n^{\mp 2} - 1 \\ N_n^{\pm} &:= t_n^{1/2} (y(\lambda)_n^{\mp 1} - t_n^{-1/2} t_0^{-1/2})(y(\lambda)_n^{\mp 1} + t_n^{-1/2} t_0^{1/2}). \end{aligned}$$

4.2 正の符号の解

ここでは, E_λ が well-defined であるとする. (例えばパラメータが generic であれば任意の $\lambda \in \mathbb{Z}^n$.) 式 (12), (13) および (15) から, E_λ は符号 $\sigma = +$, $\sigma_n = +$ の場合の固有値問題の解であることがわかる.

Proposition 4.1 正の整数 $d_{-M}, \ldots, d_\gamma$ として, $\sum_{i=-M}^{\gamma} d_i = n$ かつ $|i| \leq \beta$ ならば $d_i = 0$ であるものをとり, δ を (1) で決める. $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を, $\delta_i = \delta_{i+1}$ ならば $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ かつ $-\beta > \delta_i \geq -\alpha$ ならば $\lambda_i = 0$ なるものとする. このとき E_λ が *well-defined* ならば, E_λ は符号 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0) = (+, +, \pm)$ の固有値問題の解である. (この場合, 固有値問題には σ_0 を含む条件は現れないことに注意.)

4.3 負の符号の解の例 その 1

$2 \leq k+1 \leq n$, $1 \leq r-1$ なる整数 k, r を決める. パラメータは次の関係式のみを満たすとする:

$$s^{r-1} t^{k+1} = 1. \tag{17}$$

これは §4.1 の意味で generic な場合ではないので, Y_i たちの固有値が重複度を持ち E_λ が well-defined にならない可能性がある. しかし, 特定の λ については E_λ について興味深い性質が言える.

Definition 4.2 負の成分を持たない任意の $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ (すなわち $\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$) に対し, λ が *admissible* であるとは次の条件を満たすときをいう: 各 $1 \leq i \leq n-k$ に対し

$$\begin{aligned} &\lambda_i^+ - \lambda_{i+k}^+ \leq r - 1, \quad \text{かつ} \\ &\lambda_i^+ - \lambda_{i+k}^+ = r - 1 \quad \Rightarrow \quad w_\lambda^+(i) < w_\lambda^+(i+k). \end{aligned}$$

また, 任意の $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ (負の成分があってもよい) に対し, $i_1 < \ldots < i_p$ を非負成分の添え字とし $j_1 < \ldots < j_{n-p}$ を負の成分の添え字とする.

$$\lambda^0 := (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_p}, -\lambda_{j_{n-p}}, \ldots, -\lambda_{j_1})$$

とおき, λ^0 が上の意味で admissible であるとき λ を *admissible* と呼ぶ.

Lemma 4.3 *[2] パラメータは (17) に特殊化されているとする*. $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を *admissible* な元とすると次が成り立つ.
(i) E_λ は *well-defined.*
(ii) $T_i E_\lambda = -t^{-1/2} E_\lambda \Leftrightarrow s_i\lambda$ が *admissible* でない.

この補題より様々な固有値問題の解が得られる. 例えば以下の解が挙げられる.

Proposition 4.4 *[2]* 簡単のため $n = Mm$ を仮定する. $(k, r) = (M, 2)$ の場合, すなわちパラメータの特殊化を $s = t^{-M-1}$ とする. このとき

$$\mu = (m-1, m-2, \ldots, 1, 0, m-1, m-2, \ldots, 1, 0, \ldots, m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$$

は *admissible* である. よって E_μ は特殊化 $s = t^{-M-1}$ の下で *well-defined* である. また各 $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{m, 2m, \ldots, Mm\}$ に対し $T_i E_\mu = -t^{-1/2} E_\mu$ である. したがって E_μ は $\alpha = \beta = 0$, $\sigma = -$, $(d_{-M}, \ldots, d_{-1}, d_0) = (m, \ldots, m, 0)$ の場合の固有値問題の解となる. さらに E_μ は

$$E_\mu(z_1, \ldots, z_n; s = t^{-M-1}) = \prod_{\ell=1}^{k} \prod_{m(\ell-1)<i<j\leq m\ell} (z_i - t^{-1}z_j)\left(1 - \frac{t^{\ell-M-1}}{z_i z_j}\right)$$

と一次式の積に分解する.

4.4 負の符号の解の例 その2

パラメータは次の式を満たすとする:

$$t_n = -s^{-\ell}. \tag{18}$$

これは §4.1 の意味では generic なので, 任意の $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ に対し E_λ は well-defined である. しかし, 式 (18) の特殊化により, §4.2 で与えたものとは異なる解を構成することができる.

$E = E_{(\ell,\ldots,\ell)}(z_1, \ldots, z_n; t_n = -s^{-\ell})$ とおくと, (13) および (16) より次のことがわかる:

$$\begin{aligned} T_i E &= t^{1/2} E \qquad (1 \leq i \leq n-1), \\ T_n E &= -t_n^{-1/2} E, \\ T_0 E &= t_0^{1/2} E. \end{aligned}$$

従ってこれは符号 $\sigma_n = -$ の場合の解を与える.

Proposition 4.5 $E_{(\ell,\ldots,\ell)}(z_1, \ldots, z_n; t_n = -s^{-\ell})$ は符号 $(\sigma, \sigma_n, \sigma_0) = (+, -, +)$ の固有値問題の解である.

参考文献

[1] I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin, Quantum affine algebras and holonomic difference equations, *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), no. 1, 1–60.

[2] M. Kasatani, The polynomial representation of the double affine Hecke algebra of type $(C_n^\vee, C_n)$ for specialized parameters, arXiv:math/0608773.

[3] M. Kasatani, K. Shigechi, in preparation.

[4] M. Kasatani, Y. Takeyama, The quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation and non-symmetric Macdonald polynomials, *Funkcialaj Ekvacioj* **50** (2007), 491–509.

[5] I. G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials* (Cambridge University Press, 2003).

[6] A. Nakayashiki, Trace construction of a basis for the solution space of sl_N qKZ equation, *Comm. Math. Phys.* **212** (2000), no. 1, 29–61.

[7] M. Noumi, Macdonald-Koornwinder polynomials and affine Hecke rings, *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* **919** (1995), 44–55 (in Japanese).

[8] J. V. Stokman, Quantum affine Knizhnik-Zamolodchikov equations and quantum spherical functions, I, arXiv:1001.2645.