数理解析研究所講究録
第1767巻2011年61-74

$Sp(2,\mathbf{C})$ 上の主系列 Whittaker 関数の明示公式
(Explicit formulas of principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{C})$)

宮崎 直 (Tadashi Miyazaki) *

Abstract

We give explicit formulas of Whittaker functions for principal series representations of $Sp(2,\mathbf{C})$. Moreover, we compute Novodvorsky's archimedean local zeta integrals using these formulas. See [9] for details.

1 序文

本稿では，$Sp(2,\mathbf{C})$ 上の主系列 Whittaker 関数の明示公式について述べる．Whittaker 関数とは保型形式の Fourier 展開に現れる球関数の中で，代表的なものの1つであり，その明示公式は局所ゼータ積分の計算などの保型形式の研究に役立つ．$Sp(2,\mathbf{R})$ の場合については，既に様々な表現に関する Whittaker 関数の明示公式 ([10], [15], [13], [11], [4], [3], [5]) が与えられており，実素点での局所ゼータ積分の計算にも応用されている ([12], [6])．また，$Sp(2,\mathbf{C})$ の場合についても，クラス1主系列表現に関する Whittaker 関数の明示公式は Proskurin によって与えられている ([16])．本稿では，$Sp(2,\mathbf{C})$ の一般の主系列表現に関する Whittaker 関数の明示公式を与え，その局所ゼータ積分の計算への応用を紹介する．詳しい証明については，[9] を参照されたい．

2 $Sp(2,\mathbf{C})$ の構造

G を複素斜交群

$$Sp(2,\mathbf{C})=\{g\in GL(4,\mathbf{C})\mid {}^tgJ_2g=J_2\},\quad J_2=\begin{pmatrix} O_2 & 1_2\\ -1_2 & O_2\end{pmatrix}$$

*Department of Mathematics, Rikkyo University, Nishi-Ikebukuro, Tokyo 171-8501, Japan
miyaza@ms.u-tokyo.ac.jp

とし，$\mathfrak{g}$をそのLie代数とする．Gの岩澤分解$G=NAK$を以下のように固定する:

$$N=\left\{ n[\mathbf{x}]=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 \\ 0 & 1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbf{C}^4 \right\},$$

$$A=\{\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1}) \mid a_i \in \mathbf{R}_{>0}\ (i=1,2)\},\quad K=Sp(2)=Sp(2,\mathbf{C})\cap U(4).$$

$\mathfrak{k}$を極大コンパクト部分群KのLie代数とし，$\mathfrak{g}$のCartan分解を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$$

とする．ここで，$\mathfrak{p}$はKilling形式に関する$\mathfrak{k}$の直交補空間である．

また，KにおけるAの中心化部分群

$$\begin{aligned} M=&\{k\in K \mid kak^{-1}=a,\ a\in A\} \\ =&\{\mathrm{diag}(m_1,m_2,m_1^{-1},m_2^{-1}) \mid m_1,m_2\in U(1)\}\simeq U(1)^2. \end{aligned}$$

をとり，Pを$P=NAM$で定義されるGの極小放物型部分群とする．

3 Whittaker関数

加法群$\mathbf{C}$のユニタリ指標$\psi_{\mathbf{C}}$を$\psi_{\mathbf{C}}(z)=\exp(2\pi\sqrt{-1}(z+\bar{z}))$ $(z\in\mathbf{C})$ で定義する．複素数$c_1,c_2\in\mathbf{C}$に対して，Nのユニタリ指標ψ_{c_1,c_2}を

$$\psi_{c_1,c_2}(n[\mathbf{x}])=\psi_{\mathbf{C}}(c_1x_1+c_2x_2),\qquad \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{C}^4$$

で定義する．このとき，Nのユニタリ指標全体は$\{\psi_{c_1,c_2} \mid c_1,c_2\in\mathbf{C}\}$で尽くされる．$c_1c_2\neq 0$であるとき，ユニタリ指標$\psi_{c_1,c_2}$は非退化であるという．

Nの非退化ユニタリ指標ψに対して，$C^\infty(N\backslash G;\psi)$を

$$F(ng)=\psi(n)F(g),\qquad (n,g)\in N\times G$$

をみたすG上の滑らかな関数F全体のなす空間とし，Gはこの空間に右移動で作用するものとする．

Gの既約許容Hilbert表現(Π,H_Π)に対して，絡作用素の空間$\mathcal{I}_{\Pi,\psi}$と$\mathcal{I}^\infty_{\Pi,\psi}$を

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\Pi,\psi}&=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(H_{\Pi,K},C^\infty(N\backslash G;\psi)), \\ \mathcal{I}^\infty_{\Pi,\psi}&=\mathrm{Hom}_G(H^\infty_\Pi,C^\infty(N\backslash G;\psi)), \end{aligned}$$

で定義する．ここで，$H_{\Pi,K}$ は H_Π の K-有限ベクトル全体のなす部分空間，H_Π^∞ は H_Π の滑らかなベクトル全体のなす部分空間とする．さらに，$\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)$ と $\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)^\infty$ を

$$\mathrm{Wh}(\Pi,\psi) = \{\Phi(f) \mid f \in H_{\Pi,K},\ \Phi \in \mathcal{I}_{\Pi,\psi}\},$$
$$\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)^\infty = \{\Phi(f) \mid f \in H_\Pi^\infty,\ \Phi \in \mathcal{I}_{\Pi,\psi}^\infty\}$$

で定義する．$\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)$ または $\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)^\infty$ の元を (Π,ψ) に関する Whittaker 関数という．

Whittaker 関数については，一般の準分裂半単純 Lie 群の場合について多くの一般論が知られている．$G = Sp(2,\mathbf{C})$ の場合についてまとめておこう:

定理 3.1 ([7], [8], [17], [20], [21])．以下が成立する．
(i) 絡作用素の空間 $\mathcal{I}_{\Pi,\psi}$ と $\mathcal{I}_{\Pi,\psi}^\infty$ の次元は以下で与えられる:

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{I}_{\Pi,\psi} = 8, \qquad \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{I}_{\Pi,\psi}^\infty = 1.$$

(ii) $\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)^\infty$ の K-有限な関数全体のなす部分空間は，

$$\mathrm{Wh}(\Pi,\psi)^{\mathrm{mg}} = \{W \in \mathrm{Wh}(\Pi,\psi) \mid W \text{ は緩増加}\}$$

と一致する．
(iii) G の既約許容 Hilbert 表現 (Π, H_Π) に対して，$\mathcal{I}_{\Pi,\psi} \neq 0$ が成立するとき，Π はある既約主系列表現と同型である．

定理 3.1(iii) より，Π が既約主系列表現である場合だけ考えれば十分である．主系列表現の定義については，次節で述べる．さらに，$u_1, u_2 \in \mathbf{C}^\times$ に対して，$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-同型写像 $\Xi_{u_1,u_2}\colon C^\infty(N\backslash G;\psi_{c_1,c_2}) \to C^\infty(N\backslash G;\psi_{u_1c_1,u_2^2c_2})$ が

$$\Xi_{u_1,u_2}(F)(g) = F(ug), \qquad u = \mathrm{diag}(u_1u_2, u_2, (u_1u_2)^{-1}, u_2^{-1})$$

で定義される．従って，$\psi = \psi_{1,1}$ の場合だけ考えれば十分である．本稿では，$\mathcal{I}_{\Pi,\psi_{1,1}}$ または $\mathcal{I}_{\Pi,\psi_{1,1}}^\infty$ の元 Φ と G の既約主系列表現の極小 K-タイプに属する f に対して，Whittaker 関数 $\Phi(f)$ の明示公式を与える．

4 主系列表現

整数ベクトル $d = (d_1, d_2) \in \mathbf{Z}^2$ に対して，M のユニタリ指標 σ_d を

$$\sigma_d(m) = m_1^{d_1} m_2^{d_2}, \qquad m = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_1^{-1}, m_2^{-1}) \in M$$

で定義する．このとき，M の既約ユニタリ表現の同値類全体は $\{\sigma_d \mid d \in \mathbf{Z}^2\}$ で尽くされる．

複素ベクトル $\nu=(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{C}^2$ に対して，A の指標 $e^\nu\colon A\ni a\mapsto a^\nu\in\mathbf{C}^\times$ を

$$a^\nu=a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2},\qquad\qquad a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\in A$$

で定義する．また，$\rho=(4,2)$ とおいておく．

定義 4.1. $\nu\in\mathbf{C}^2$ と $d\in\mathbf{Z}^2$ に対して，G の主系列表現 $(\Pi_{[\nu,d]},H_{[\nu,d]})$ を

$$\Pi_{[\nu,d]}=\mathrm{Ind}_P^G(1_N\otimes e^{\nu+\rho}\otimes\sigma_d)$$

で定義する．すなわち，$\Pi_{[\nu,d]}$ の表現空間 $H_{[\nu,d]}$ は

$$H_{[\nu,d]}^\infty=\left\{f\in C^\infty(G)\;\middle|\;\begin{array}{l}f(namg)=a^{\nu+\rho}\sigma_d(m)f(g),\\(n,a,m,g)\in N\times A\times M\times G\end{array}\right\}$$

の L^2-ノルム

$$\|f\|^2=\int_K|f(k)|^2dk$$

による完備化であり，G はこの空間に右移動で作用する．

本稿では，$\Pi_{[\nu,d]}$ が既約である事を常に仮定するものとする．(ν が $\mathbf{C}^2$ のある離散部分集合に含まれる場合を除いては，$\Pi_{[\nu,d]}$ は既約になる事が知られている．詳しくは，[18] を参照されたい．)

G の Weyl 群を $\mathcal{W}_G=\mathfrak{S}_2\ltimes\{\pm1\}^2$ と定義し，演算を

$$\begin{aligned}&(\mathrm{s},\epsilon_1,\epsilon_2)\cdot(\mathrm{s}',\epsilon_1',\epsilon_2')=(\mathrm{ss}',\epsilon_1\epsilon'_{\mathrm{s}^{-1}(1)},\epsilon_2\epsilon'_{\mathrm{s}^{-1}(2)}),\\&\mathrm{s},\mathrm{s}'\in\mathfrak{S}_2,\quad\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_1',\epsilon_2'\in\{\pm1\}\end{aligned}$$

で定める．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群を表す．また，$\mathcal{W}_G$ の $\mathbf{C}^2$ への作用を

$$w\cdot(z_1,z_2)=(\epsilon_1z_{\mathrm{s}^{-1}(1)},\epsilon_2z_{\mathrm{s}^{-1}(2)}),\qquad w=(\mathrm{s},\epsilon_1,\epsilon_2)\in\mathcal{W}_G,\qquad(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2$$

で定める．主系列表現 $\Pi_{[\nu,d]}$ が既約であるとき，

$$\Pi_{[\nu,d]}\simeq\Pi_{[w\cdot\nu,w\cdot d]},\qquad\qquad w\in\mathcal{W}_G$$

が成立する事が知られている ([18, Corollary 2.8])．従って，$d_1\geq d_2\geq0$ と仮定しても一般性を失わない．今後，常に $d_1\geq d_2\geq0$ である事を仮定するものとする．

5 $K = Sp(2)$ の既約有限次元表現

G の既約主系列表現の極小 K-タイプにおける Whittaker 関数の明示公式を記述するには，極小 K-タイプの基底または生成系をとる必要がある．この節では，K の既約有限次元表現の構成を紹介しよう．

まず，$(\tau_{\mathrm{st}}, V_{\mathrm{st}})$ を表現空間が $V_{\mathrm{st}} = M_{4,1}(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^4$ であり，作用が

$$\tau_{\mathrm{st}}(k)v = k \cdot v, \qquad k \in K,\ v \in V_{\mathrm{st}}$$

で定義される K の表現とする．ここで，$k \cdot v$ は k と v の行列としての積を表すものとする．$1 \le i \le 4$ に対して，$\mathbf{e}_i$ を $(i,1)$-成分が 1 で他の成分が 0 である $V_{\mathrm{st}} = M_{4,1}(\mathbf{C})$ の元とする．

$\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 V に対して，$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n \ge 0} \mathrm{Sym}^n(V)$ を V 上の対称代数とその次数付き $\mathbf{C}$-代数としての直和分解とする．また，$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge 0\}$ とおく．ここで，$\mathbf{C}$-代数 $\mathcal{R} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}^\lambda$ を

$$\mathcal{R} = \mathrm{Sym}(V_{\mathrm{st}}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathrm{Sym}(V_{\mathrm{st}} \wedge_{\mathbf{C}} V_{\mathrm{st}}),$$
$$\mathcal{R}^{(\lambda_1,\lambda_2)} = \mathrm{Sym}^{\lambda_1-\lambda_2}(V_{\mathrm{st}}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathrm{Sym}^{\lambda_2}(V_{\mathrm{st}} \wedge_{\mathbf{C}} V_{\mathrm{st}})$$

で定義し，τ_{st} から誘導される K の $\mathcal{R}$ への作用を T と書く．

$1 \le i \le 4$ と $1 \le j \ne k \le 4$ に対して，，

$$\mathfrak{e}_i = \mathbf{e}_i \otimes 1, \qquad \mathfrak{e}_{jk} = 1 \otimes (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)$$

とおくと，これらの元は $\mathcal{R}$ の $\mathbf{C}$-代数としての生成系をなす．$I_{\mathcal{R}}$ を

$$\xi^{(1)} = \mathfrak{e}_{13} + \mathfrak{e}_{24}, \qquad \xi^{(2)} = \mathfrak{e}_{12}\mathfrak{e}_{34} - \mathfrak{e}_{13}\mathfrak{e}_{24} + \mathfrak{e}_{14}\mathfrak{e}_{23},$$
$$\xi^{(3)}_{ijk} = \mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_{jk} + \mathfrak{e}_j\mathfrak{e}_{ki} + \mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_{ij} \quad (1 \le i < j < k \le 4).$$

で生成される $\mathcal{R}$ のイデアルとすると，直接計算によって $I_{\mathcal{R}}$ は K-不変である事が確かめられる．従って，T から誘導される K の作用 $\tilde{T}$ によって $\mathcal{R}/I_{\mathcal{R}}$ は自然に K-加群になる．$\lambda \in \Lambda$ に対して，V_λ を自然な全射 $\mathcal{R} \ni r \mapsto r + I_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}/I_{\mathcal{R}}$ による $\mathcal{R}^\lambda$ の像とし，$\tau_\lambda(k) = \tilde{T}(k)|_{V_\lambda}$ $(k \in K)$ とおく．

命題 5.1. 以下が成立する:
(i) $\lambda \in \Lambda$ に対して，$(\tau_\lambda, V_\lambda)$ は K の既約表現である．
(ii) K の既約表現の同値類全体は $\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で尽くされる．
(iii) 既約主系列表現 $\Pi_{[\nu,d]}$ の極小 K-タイプは τ_d である．また，

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_d, H_{[\nu,d],K}) = 1,$$

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_\lambda \lambda, H_{[\nu,d],K}) = 0 \qquad (d >_{\mathrm{lex}} \lambda \text{のとき})$$

が成立する．ここで，$>_{\mathrm{lex}}$ は辞書式順序を表す．つまり，$(\lambda_1, \lambda_2) >_{\mathrm{lex}} (\lambda_1', \lambda_2')$ は

$$\lambda_1 > \lambda_1' \text{ または } (\lambda_1 = \lambda_1' \text{ かつ } \lambda_2 > \lambda_2').$$

が成立する事を意味する．

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ に対して，集合 $S_\lambda = S_{[\lambda;1]} \times S_{[\lambda;2]}$ を

$$S_{[\lambda;1]} = \left\{ (l_1, l_{-1}, l_2, l_{-2}) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^4 \;\middle|\; l_1 + l_{-1} + l_2 + l_{-2} = \lambda_1 - \lambda_2 \right\},$$
$$S_{[\lambda;2]} = \left\{ \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,-1} \\ L_{-1,1} & L_{-1,-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} L_{j_1,j_2} \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \ (j_1, j_2 \in \{\pm 1\}) \\ L_{1,1} + L_{1,-1} + L_{-1,1} + L_{-1,-1} \leq \lambda_2 \end{array} \right\}$$

で定義する．$\mathbf{L} = ((l_i), (L_{j_1,j_2})) \in S_\lambda$ に対して，

$$v_{\mathbf{L}}^\lambda = \mathfrak{e}_1^{l_1} \mathfrak{e}_3^{l_{-1}} \mathfrak{e}_2^{l_2} \mathfrak{e}_4^{l_{-2}} \mathfrak{e}_{12}^{L_{1,1}} \mathfrak{e}_{14}^{L_{1,-1}} \mathfrak{e}_{32}^{L_{-1,1}} \mathfrak{e}_{34}^{L_{-1,-1}} \mathfrak{e}_{13}^{\mathbf{L}[\lambda]} + I_{\mathcal{R}},$$
$$\mathbf{L}[\lambda] = \lambda_2 - \left(L_{1,1} + L_{1,-1} + L_{-1,1} + L_{-1,-1} \right)$$

とおく．$\mathfrak{e}_{13} + I_{\mathcal{R}} = (\mathfrak{e}_{42} + \xi^{(1)}) + I_{\mathcal{R}} = \mathfrak{e}_{42} + I_{\mathcal{R}}$ より，$\{v_{\mathbf{L}}^\lambda\}_{\mathbf{L} \in S_\lambda}$ は $\mathbf{C}$-ベクトル空間 V_λ の生成系をなす．

次の記号を用意しておく：

$$\delta[i] = \left((\delta_{1,i},\ \delta_{-1,i},\ \delta_{2,i},\ \delta_{-2,i}), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad (i \in \{\pm 1, \pm 2\}),$$
$$\Delta[j_1, j_2] = \left((0,0,0,0), \begin{pmatrix} \delta_{1,j_1} \cdot \delta_{1,j_2} & \delta_{1,j_1} \cdot \delta_{-1,j_2} \\ \delta_{-1,j_1} \cdot \delta_{1,j_2} & \delta_{-1,j_1} \cdot \delta_{-1,j_2} \end{pmatrix} \right) \qquad (j_1, j_2 \in \{\pm 1\}).$$

ここで，$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ，つまり，

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}), \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

6 偏微分方程式系

K-準同型写像 ϕ: $V_d \to \mathrm{Wh}(\Pi_{[\nu,d]}, \psi_{1,1})$, に対して，

$$\phi(v)(ngk) = \psi_{1,1}(n)\phi(\tau_d(k)v)(g), \qquad (n,g,k) \in N \times G \times K \tag{6.1}$$

が成立する．従って，岩澤分解 $G=NAK$ より，K-準同型写像 ϕ は $\phi(v^d_{\mathbf{L}})|_A$ $(\mathbf{L}\in S_d)$ によって特徴付けられる事が分かる．よって，$\phi(v^d_{\mathbf{L}})|_A$ $(\mathbf{L}\in S_d)$ の明示公式を与えれば良い．明示公式を記述する上で用いる A の座標 $y=(y_1,y_2)$ を

$$y_1=a_1/a_2, \qquad y_2=a_2^2, \qquad a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\in A$$

で定義する．この座標のとり方は単純ルートに対応している．

さて，$\Pi_{[\nu,d]}$ の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群としての構造から，Whittaker 関数の動径成分 $\phi(v^d_{\mathbf{L}})|_A$ $(\mathbf{L}\in S_d)$ のみたす偏微分方程式を構成しよう．単射 K-準同型 $\iota_{[\nu,d]}\colon V_d\to H_{[\nu,d],K}$ をとって固定すると，K-準同型写像 $\phi\colon V_d\to \mathrm{Wh}(\Pi_{[\nu,d]},\psi_{1,1})$ は，ある $\Phi\in\mathcal{I}_{\Pi_{[\nu,d]},\psi_{1,1}}$ を用いて，$\phi=\Phi\circ\iota_{[\nu,d]}$ と表せる．また，$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$(または，その普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$) の元は，$C^\infty(N\backslash G;\psi)$ 上の左不変微分作用素である事に注意しておく．

まずは $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の元から偏微分方程式を構成しよう．よく知られているように $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $H_{[\nu,d],K}$ に定数倍で作用するから，$D\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ に対して，ある定数 $\chi_{[\nu,d]}(D)$ が存在して，

$$\Pi_{[\nu,d]}(D)\iota_{[\nu,d]}(v^d_{\mathbf{L}})=\chi_{[\nu,d]}(D)\iota_{[\nu,d]}(v^d_{\mathbf{L}}) \qquad (\mathbf{L}\in S_d) \tag{6.2}$$

となる事が分かる．$Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の生成系の構成法と $\chi_{[\nu,d]}(D)$ の計算法については古典的に知られている (例えば，[1] を参照)．等式 (6.2) の両辺の Φ による像を考える事で，

$$D\phi(v^d_{\mathbf{L}})=\chi_{[\nu,d]}(D)\phi(v^d_{\mathbf{L}}) \qquad (\mathbf{L}\in S_d) \tag{6.3}$$

を得る．これを書き下すと，$\phi(v^d_{\mathbf{L}})|_A$ の偏微分方程式が得られる．

次に Dirac-Schmid 方程式と呼ばれる偏微分方程式の構成を紹介する．$\mu=(1,0)$ または $(1,1)$ とする．ベクトル空間 $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ を随伴表現 Ad によって K-加群とみなすとき，定数倍を除いて唯 1 つの単射 K-準同型写像

$$I^{\mathfrak{p}}_\mu\colon V_\mu\to\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\otimes_{\mathbf{C}}V_\mu$$

が存在する．$d-\mu\in\Lambda$ であるとき，自然な全射 K-準同型写像 $P_{\mu,d-\mu}\colon V_\mu\otimes_{\mathbf{C}}V_{d-\mu}\to V_d$ が $v_1\otimes v_2\mapsto v_1v_2$ で定義される．ここで，v_1v_2 は $\mathcal{R}/I_{\mathcal{R}}$ における v_1 と v_2 の積である．また，自然な K-準同型写像 $B_{[\nu,d]}\colon\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\otimes_{\mathbf{C}}H_{[\nu,d],K}\to H_{[\nu,d],K}$ が $X\otimes f\mapsto\Pi_{[\nu,d]}(X)f$ で定まる．さて，$V_\mu\otimes_{\mathbf{C}}V_{d-\mu}$ から $H_{[\nu,d],K}$ への 2 種類の K-準同型写像

$$B_{[\nu,d]}\circ(\mathrm{id}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}\otimes\iota_{[\nu,d]})\circ(\mathrm{id}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}\otimes P_{\mu,d-\mu})\circ(I^{\mathfrak{p}}_\mu\otimes\mathrm{id}_{V_{d-\mu}}), \qquad \iota_{[\nu,d]}\circ P_{\mu,d-\mu}$$

を考えよう．

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_K(V_\mu\otimes_{\mathbf{C}}V_{d-\mu},V_\lambda)=0 \qquad (\lambda>_{\mathrm{lex}}d\text{ のとき}),$$

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_\mu \otimes_{\mathbf{C}} V_{d-\mu}, V_d) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_d, H_{[\nu,d],K}) = 1,$$
$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_{\lambda'}, H_{[\nu,d],K}) = 0 \qquad (d >_{\mathrm{lex}} \lambda' \text{のとき})$$

より，$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_K(V_\mu \otimes_{\mathbf{C}} V_{d-\mu}, H_{[\nu,d],K}) = 1$ であるから，ある定数 γ_μ が存在して，

$$B_{[\nu,d]} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}} \otimes \iota_{[\nu,d]}) \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}} \otimes P_{\mu,d-\mu}) \circ (I_\mu^{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{id}_{V_{d-\mu}}) = \gamma_\mu \iota_{[\nu,d]} \circ P_{\mu,d-\mu} \tag{6.4}$$

が成立する．ここで，$\delta \in S_\mu$ に対して，

$$I_\mu^{\mathfrak{p}}(v_\delta^\mu) = \sum_{\delta' \in S_\mu} X_{\delta,\delta'}^{(\mu)} \otimes v_{\delta'}^\mu, \qquad X_{\delta,\delta'}^{(\mu)} \in \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$$

であるとする．(実際に偏微分方程式を構成する際には $X_{\delta,\delta'}^{(\mu)}$ の明示形を求める必要がある．) このとき，$(\delta, \mathbf{L}) \in S_\mu \times S_{d-\mu}$ に対して，(6.4) の両辺による $v_\delta^\mu \otimes v_{\mathbf{L}}^{d-\mu}$ の像を考えると，等式

$$\sum_{\delta' \in S_\mu} \Pi_{[\nu,d]}(X_{\delta,\delta'}^{(\mu)}) \iota_{[\nu,d]}(v_{\mathbf{L}+\delta'}^d) = \gamma_\mu \iota_{[\nu,d]}(v_{\mathbf{L}+\delta}^d) \tag{6.5}$$

が得られる．γ_μ の値については，$\delta + \mathbf{L} = (d_1 - d_2)\delta[1] + d_2\Delta[1,1]$ となる δ と $\mathbf{L}$ に関する (6.5) の両辺において，G の単位元 1_4 での値を評価する事で計算できる．等式 (6.2) の両辺の Φ による像を考えると，

$$\sum_{\delta' \in S_\mu} X_{\delta,\delta'}^{(\mu)} \phi(v_{\mathbf{L}+\delta'}^d) = \gamma_\mu \phi(v_{\mathbf{L}+\delta}^d) \tag{6.6}$$

が得られる．これを書き下すと，$\phi(v_{\mathbf{L}}^d)|_A$ の偏微分方程式が得られる．

上記の 2 種類の偏微分方程式を整理すると次のような偏微分方程式系を得る:

命題 6.1. $\mathbf{L} \in S_d$ に対して，

$$\mu_{1,\mathbf{L}} = \nu_1 - (l_1 + l_2 + L_{1,1} + L_{1,-1}) + (l_{-1} + l_{-2} + L_{-1,1} + L_{-1,-1}),$$
$$\mu_{2,\mathbf{L}} = \nu_2 - (L_{1,1} + L_{1,-1} + L_{-1,1} + L_{-1,-1}),$$

とおく．また，$i = 1, 2$ に対して，$\partial_i = y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ とおく．$\phi \in \mathrm{Hom}_K(V_d, \mathrm{Wh}(\Pi, \psi))$ に対して，関数 $\varphi_{\mathbf{L}}(y)$ $(\mathbf{L} \in S_d)$ を

$$\begin{aligned}\phi(v_{\mathbf{L}}^d)(a) =& (\sqrt{-1})^{l_1 - l_{-2} + L_{-1,1} - L_{1,-1}} y_1^4 y_2^3 \\ & \times (2\pi y_1)^{d_1 - l_2 - l_{-2}} (2\pi y_2)^{\frac{d_1+d_2}{2} - L_{-1,1} - L_{1,-1}} \varphi_{\mathbf{L}}(y), \qquad a \in A\end{aligned}$$

で定義する．このとき，関数 $\varphi_{\mathbf{L}}$ $(\mathbf{L} \in S_d)$ は次の偏微分方程式系をみたす:

(i) $\mathbf{L}_d = (d_1 - d_2)\delta[1] + d_2\Delta[1,1]$ とおく．このとき，

$$\{\partial_1^2 + (-\partial_1 + 2\partial_2)^2 - 8(2\pi y_1)^2 - 16(2\pi y_2)^2 - (\mu_{1,\mathbf{L}_d})^2 - (\mu_{2,\mathbf{L}_d})^2\}\varphi_{\mathbf{L}_d} = 0,$$

$$\Big\{\partial_1^2(-\partial_1 + 2\partial_2)^2 + 8(2\pi y_1)^2\big\{(\partial_1 + 1)(-\partial_1 + 2\partial_2 - 1) - 1\big\}$$
$$- 16(2\pi y_2)^2\partial_1^2 + 16(2\pi y_1)^4 - (\mu_{1,\mathbf{L}_d})^2(\mu_{2,\mathbf{L}_d})^2\Big\}\varphi_{\mathbf{L}_d} = 0.$$

(ii) $d - (1,0) \in \Lambda$ と仮定し，$\epsilon \in \{\pm 1\}$，$\mathbf{L} \in S_{d-(1,0)}$ とおく．このとき，

$$\left(\partial_1 - 2l_{2\epsilon} - \epsilon\mu_{1,\mathbf{L}+\delta[\epsilon]}\right)\varphi_{\mathbf{L}+\delta[\epsilon]} + 2\varphi_{\mathbf{L}+\delta[2\epsilon]} = 0.$$

さらに $l_2 = l_{-2} = L_{1,-1} = L_{-1,1} = \mathbf{L}[d-(1,0)] = 0$ のとき，

$$\left(-\partial_1 + 2\partial_2 - \epsilon\mu_{1,\mathbf{L}+\delta[2\epsilon]}\right)\varphi_{\mathbf{L}+\delta[2\epsilon]} - 2(2\pi y_1)^2\varphi_{\mathbf{L}+\delta[\epsilon]} + 8\pi y_2\varphi_{\mathbf{L}+\delta[-2\epsilon]} = 0.$$

(iii) $d - (1,1) \in \Lambda$ と仮定し，$\epsilon \in \{\pm 1\}$，$\mathbf{L} \in S_{d-(1,1)}$ とおく．このとき，

$$\left\{2\partial_2 - 4L_{\epsilon,-\epsilon} - \epsilon\big(\mu_{1,\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,\epsilon]} + \mu_{2,\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,\epsilon]}\big)\right\}\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,\epsilon]} + 4\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,-\epsilon]} = 0.$$

さらに $l_2 = l_{-2} = L_{1,-1} = L_{-1,1} = 0$ のとき，

$$2\pi y_2(\mu_{1,\mathbf{L}} + \mu_{2,\mathbf{L}})\varphi_{\mathbf{L}} - 4\pi y_1\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[-1,1]} + 4\pi y_1\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[1,-1]} = 0.$$

さらに $l_2 = l_{-2} = L_{1,-1} = L_{-1,1} = \mathbf{L}[d-(1,1)] = 0$ のとき，

$$\left\{2\partial_1 - 2\partial_2 - \epsilon\big(\mu_{1,\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,-\epsilon]} + \mu_{2,\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,-\epsilon]}\big)\right\}\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,-\epsilon]}$$
$$- 4(2\pi y_2)^2\varphi_{\mathbf{L}+\Delta[\epsilon,\epsilon]} + 4(2\pi y_1)(2\pi y_2)\varphi_{\mathbf{L}} = 0.$$

命題 6.1 における (i) の式は (6.3) より得られ，(ii) と (iii) の式はそれぞれ (6.6) の $\mu = (1,0)$ の場合と $\mu = (1,1)$ の場合から得られる．(ii), (iii) の式によって，$\varphi_{\mathbf{L}_d}$ から他の $\varphi_{\mathbf{L}}$ は帰納的に決まる．さらに (i) の式は $\varphi_{\mathbf{L}_d}$ がみたす偏微分方程式系であるが，具体的な計算によって解空間が 8 次元である事が分かる．定理 3.1(i) と命題 5.1(iii) より，$\mathrm{Hom}_K(V_d, \mathrm{Wh}(\Pi,\psi))$ も 8 次元であるから，この偏微分方程式系は $\mathrm{Hom}_K(V_d, \mathrm{Wh}(\Pi,\psi))$ の元である事を特徴付けるものである事が分かる．

7　Whittaker 関数の明示公式

命題 6.1 の偏微分方程式系を解く事によって，次の定理を得る．

定理 7.1. (i) $\nu_1 \notin \mathbf{Z}$, $\nu_2 \notin \mathbf{Z}$, $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbf{Z}$, $\nu_1 + \nu_2 \notin \mathbf{Z}$ と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\nu^{(w)}(v_{\mathbf{L}}^d)(a) =& (\sqrt{-1})^{l_1 - l_{-2} + L_{-1,1} - L_{1,-1}} y_1^4 y_2^3 (2\pi y_1)^{d_1 - l_2 - l_{-2}} (2\pi y_2)^{\frac{d_1+d_2}{2} - L_{-1,1} - L_{1,-1}} \\ &\times \sum_{m_1, m_2 \geq 0} C_{m_1,m_2}^{w,\mathbf{L}} (2\pi y_1)^{\mu_{1,\mathbf{L}}^w + 2m_1} (2\pi y_2)^{\mu_{2,\mathbf{L}}^w - \chi(w)\mathbf{L}[d] + 2m_2} \qquad (a \in A) \end{aligned}$$

で特徴付けられる $\mathrm{Hom}_K(V_d, \mathrm{Wh}(\Pi, \psi))$ の基底 $\{\mathrm{M}_\nu^{(w)} \mid w \in \mathcal{W}_G\}$ が存在する．ここで，$w = (\mathrm{s}, \epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathcal{W}_G = \mathfrak{S}_2 \ltimes \{\pm 1\}^2$ に対して，$(\mu_{1,\mathbf{L}}^w, \mu_{2,\mathbf{L}}^w) = w \cdot (\mu_{1,\mathbf{L}}, \mu_{2,\mathbf{L}})$, $\chi(w) = (1 - \epsilon_1\epsilon_2)/2$ であり，係数は

$$C_{m_1,m_2}^{w,\mathbf{L}} = Q_{m_1,m_2}^{w,\mathbf{L}} \sum_{\substack{0 \leq k_1 + k_2 \leq m_1 \\ k_1 \geq 0,\ 0 \leq k_2 \leq m_2}} P_{m_1,m_2;k_1,k_2}^{w,\mathbf{L}} A_{k_1,k_2}^{w,\mathbf{L}},$$

$$\begin{aligned} Q_{m_1,m_2}^{w,\mathbf{L}} =& \prod_{\epsilon \in \{\pm 1\}} \left(\frac{\epsilon \mu_{1,\mathbf{L}} - \mu_{1,\mathbf{L}}^w}{2} - m_1 \right)_{l_{2\epsilon}} \\ &\times \left(\frac{\epsilon(\mu_{1,\mathbf{L}} + \mu_{2,\mathbf{L}}) - \mu_{1,\mathbf{L}}^w - \mu_{2,\mathbf{L}}^w + 2\chi(w)\mathbf{L}[d]}{4} - m_2 \right)_{L_{\epsilon,-\epsilon}} \end{aligned}$$

$$P_{m_1,m_2;k_1,k_2}^{w,\mathbf{L}} = (-1)^{m_1+m_2+k_1} \frac{\Gamma\left(-\frac{\mu_{1,\mathbf{L}}^w - \mathbf{L}[d]}{2} - m_1\right) \Gamma\left(-\frac{\mu_{2,\mathbf{L}}^w + \mathbf{L}[d]}{2} + \chi(w)\mathbf{L}[d] - m_2 + k_1\right)}{(m_1 - k_1 - k_2)!(m_2 - k_2)!},$$

$$A_{k_1,k_2}^{w,\mathbf{L}} = \frac{(-1)^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} \Gamma\left(-\frac{\mu_{1,\mathbf{L}}^w - \mu_{2,\mathbf{L}}^w}{2} - k_1\right) \Gamma\left(-\frac{\mu_{1,\mathbf{L}}^w + \mu_{2,\mathbf{L}}^w}{2} - k_2\right)$$

で定義される．

(ii) 絡作用素の空間 $\mathrm{Hom}_K(V_d, \mathrm{Wh}(\Pi, \psi)^\infty)$ の次元は 1 であり，この空間の元 W_ν で

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_\nu(v_{\mathbf{L}}^d)(a) =& (\sqrt{-1})^{l_1 - l_{-2} + L_{-1,1} - L_{1,-1}} y_1^4 y_2^3 (2\pi y_1)^{d_1 - l_2 - l_{-2}} (2\pi y_2)^{\frac{d_1+d_2}{2} - L_{-1,1} - L_{1,-1}} \\ &\times \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{\mathcal{L}(\alpha_2)} \int_{\mathcal{L}(\alpha_1)} U_{\mathbf{L}}(s_1, s_2) (2\pi y_1)^{-2s_1} (2\pi y_2)^{-2s_2} ds_1 ds_2 \quad (a \in A) \end{aligned}$$

で特徴付けられるものが存在する．ここで，積分核 $U_{\mathbf{L}}(s_1, s_2)$ は

$$U_{\mathbf{L}}(s_1, s_2) = \frac{Q_{\mathbf{L}}(s_1, s_2)}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{\mathcal{L}(\beta_2)} \int_{\mathcal{L}(\beta_1)} P_{\mathbf{L}}(s_1, s_2; t_1, t_2) A_{\mathbf{L}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$Q_{\mathbf{L}}(s_1, s_2) = \prod_{\epsilon \in \{\pm 1\}} \left(s_1 + \epsilon \frac{\mu_{1,\mathbf{L}}}{2} \right)_{l_{2\epsilon}} \left(s_2 + \epsilon \frac{\mu_{1,\mathbf{L}} + \mu_{2,\mathbf{L}}}{4} \right)_{L_{\epsilon,-\epsilon}},$$

$$P_{\mathbf{L}}(s_1, s_2; t_1, t_2) = \Gamma\left(s_1 + \frac{\mathbf{L}[d]}{2}\right) \Gamma\left(s_2 - t_1 - \frac{\mathbf{L}[d]}{2}\right) \Gamma(s_1 - t_1 - t_2) \Gamma(s_2 - t_2),$$

$$A_{\mathbf{L}}(t_1, t_2) = \prod_{\epsilon \in \{\pm 1\}} \Gamma\left(t_1 + \epsilon \frac{\mu_{1,\mathbf{L}} - \mu_{2,\mathbf{L}}}{4}\right) \Gamma\left(t_2 + \epsilon \frac{\mu_{1,\mathbf{L}} + \mu_{2,\mathbf{L}}}{4}\right)$$

で与えられる．また，$\mathcal{L}(\alpha)$ は $\alpha-\sqrt{-1}\infty$ から $\alpha+\sqrt{-1}\infty$ への実軸と垂直な積分路を表し，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ は $\alpha_1>\beta_1+\beta_2$, $\alpha_2>\max\{\beta_1+d_2/2,\ \beta_2\}$, $\beta_1>(|\mathrm{Re}(\nu_1-\nu_2)|+d_1+d_2)/4$, $\beta_2>(|\mathrm{Re}(\nu_1+\nu_2)|+d_1+d_2)/4$ をみたす実数とする．

(iii) $\nu_1\notin\mathbf{Z}$, $\nu_2\notin\mathbf{Z}$, $\nu_1-\nu_2\notin\mathbf{Z}$, $\nu_1+\nu_2\notin\mathbf{Z}$ であるとき，$\mathrm{W}_\nu=\sum_{w\in W_G}\mathrm{M}_\nu^{(w)}$.

8 Novodvorsky の局所ゼータ積分の計算への応用

$(\tilde{\Pi},H_{\tilde{\Pi}})$ を $GSp(2,\mathbf{C})$ の既約許容 Hilbert 表現であり，$\tilde{\Pi}(z1_4)=\mathrm{id}_{H_{\tilde{\Pi}}}$ $(z\in\mathbf{C}^\times)$ と $\tilde{\Pi}|_{Sp(2,\mathbf{C})}\simeq\Pi$ で特徴付けられるものとする．この節では，適当な $(\tilde{\Pi},\psi)$ に関する Whittaker 関数 W について，以下で定義される Novodvorsky の局所ゼータ積分 $Z_N(s,W)$ と $Z_N(s,W^\vee)$ の計算を行う:

$$Z_N(s,W)=\int_{\mathbf{C}^\times}\int_{\mathbf{C}}W\left(\begin{pmatrix} y&0&0&0\\ 0&y&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&x&0&1\end{pmatrix}\right)|y|^{2s-3}\,d^+x\,d^\times y,$$

$$W^\vee(g)=W(g\eta),\qquad \eta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ここで，d^+x は $\mathbf{C}$ 上の通常の Lebesgue 測度を 2 倍したものとし，$d^\times y$ は $d^\times y=(2\pi)^{-1}\dfrac{d^+y}{|y|^2}$ で定義される $\mathbf{C}^\times$ 上の Haar 測度とする．

局所 L-因子 $L(s,\tilde{\Pi})=L(s,\tilde{\Pi}^\vee)$ と局所 ϵ-因子 $\epsilon(s,\tilde{\Pi},\psi_{\mathbf{C}})$ を

$$\begin{aligned}L(s,\tilde{\Pi})=L(s,\tilde{\Pi}^\vee)&=\Gamma_{\mathbf{C}}\left(s+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}+\frac{d_1-d_2}{4}\right)\Gamma_{\mathbf{C}}\left(s-\frac{\nu_1-\nu_2}{4}+\frac{d_1-d_2}{4}\right)\\&\quad\times\Gamma_{\mathbf{C}}\left(s+\frac{\nu_1+\nu_2}{4}+\frac{d_1+d_2}{4}\right)\Gamma_{\mathbf{C}}\left(s-\frac{\nu_1+\nu_2}{4}+\frac{d_1+d_2}{4}\right),\\ \epsilon(s,\tilde{\Pi},\psi_{\mathbf{C}})&=(-1)^{d_2},\end{aligned}$$

で定義する．ここで，$\Gamma_{\mathbf{C}}(s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ であるとする．

$d_0=(d_1-d_2)/2\in\mathbf{Z}_{\geq0}$ とおく．$y_1>0$ に対して，

$$W_{0,y_1}(g)=\mathrm{W}_\nu(v^d_{d_0\delta[-1]+d_0\delta[2]})(g\,\mathrm{diag}(y_1,1,y_1^{-1},1))\qquad(g\in Sp(2,\mathbf{C}))$$

によって特徴付けられる $(\tilde{\Pi},\psi)$ に関する Whittaker 関数 W_{0,y_1} をとる．このとき，以下が成立する:

命題 8.1. $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき，局所ゼータ積分 $Z_N(s, W_{0,y_1})$ と $Z_N(s, W_{0,y_1}^\vee)$ は絶対収束する．2 つの商 $\epsilon(s,\tilde{\Pi},\psi_{\mathbf{C}})\dfrac{Z_N(s,W_{0,y_1})}{L(s,\tilde{\Pi})}$ と $\dfrac{Z_N(1-s,W_{0,y_1}^\vee)}{L(1-s,\tilde{\Pi}^\vee)}$ は共に次の積分と等しくなる．

$$(-1)^{d_2}\frac{(2\pi)^{3d_0+2d_2}}{2^6\cdot 2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathcal{L}(\alpha)}\frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}+\frac{d_0}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(t-\frac{\nu_1-\nu_2}{4}-\frac{d_0}{2})}{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+1-s)}$$
$$\times\frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\nu_1+\nu_2}{4}+\frac{d_0+d_2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(t-\frac{\nu_1+\nu_2}{4}-\frac{d_0-d_2}{2})}{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+s)}y_1^{4-2s-2t+d_0}dt.$$

ここで，実数 α は $\alpha>\max\{\mathrm{Re}(s),\ \mathrm{Re}(1-s),\ (|\mathrm{Re}(\nu_1)|+|\mathrm{Re}(\nu_2)|+2(d_0+d_2))/4\}$ となるようにとる．

$GSp(2)$ が総虚体上で定義されているとする．上の命題での複素素点での局所ゼータ積分の評価と，Novodvorsky [14], Bump [2], Takloo-Bighash [19] による大域的ゼータ積分と有限素点での局所ゼータ積分に関する結果を合わせる事によって，Whittaker 模型を持つ中心指標が自明な $GSp(2,\mathbf{A})$ の尖点的保型表現に関するスピノル L 関数の解析接続と関数等式が得られる．

注意 8.2. Whittaker 模型を持つ $GSp(2,\mathbf{A})$ の尖点的保型表現に関するスピノル L 関数の解析接続と関数等式は，もっと一般的な状況で Asgari と Shahidi によって証明されている．彼らは Langlands-Shahidi 法を用いて $GL(4)$ へのリフティングを証明しており，$GL(4,\mathbf{A})$ の尖点的保型表現に関するスタンダード L 関数の解析的性質からこれらの結果が導かれる．

参考文献

[1] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 7–9.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1975 and 1982 French originals by Andrew Pressley.

[2] Daniel Bump. The Rankin-Selberg method: a survey. In *Number theory, trace formulas and discrete groups (Oslo, 1987)*, pp. 49–109. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[3] Miki Hirano, Taku Ishii, and Takayuki Oda. Confluence from Siegel-Whittaker functions to Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 141, No. 1, pp. 15–31, 2006.

[4] Taku Ishii. On principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$. *J. Funct. Anal.*, Vol. 225, No. 1, pp. 1–32, 2005.

[5] Taku Ishii. Whittaker functions on real semisimple Lie groups of rank two. *Canad. J. Math.*, Vol. 62, No. 3, pp. 563–581, 2010.

[6] Taku Ishii and Tomonori Moriyama. Spinor L-functions for generic cusp forms on $\mathrm{GSp}(2)$ belonging to principal series representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 360, No. 11, pp. 5683–5709, 2008.

[7] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, Vol. 48, No. 2, pp. 101–184, 1978.

[8] Hisayosi Matumoto. Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators. *Acta Math.*, Vol. 161, No. 3-4, pp. 183–241, 1988.

[9] Tadashi Miyazaki. Principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{C})$. *J. Funct. Anal.*, Vol. 261, No. 4, pp. 1083–1131, 2011.

[10] Takuya Miyazaki and Takayuki Oda. Principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2;\mathbf{R})$. Explicit formulae of differential equations. In *Automorphic forms and related topics (Seoul, 1993)*, pp. 59–92. Pyungsan Inst. Math. Sci., Seoul, 199?

[11] Takuya Miyazaki and Takayuki Oda. Principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2;\mathbf{R})$. II. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 50, No. 2, pp. 243–260, 1998.

[12] Tomonori Moriyama. Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on $\mathrm{GSp}(2)$. *Amer. J. Math.*, Vol. 126, No. 4, pp. 899–920, 2004.

[13] Shinji Niwa. Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R})$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, Vol. 71, No. 8, pp. 189–191, 1995.

[14] Mark E. Novodvorsky. Automorphic L-functions for symplectic group $\mathrm{GSp}(4)$. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 87–95. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[15] Takayuki Oda. An explicit integral representation of Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2;\mathbf{R})$ for the large discrete series representations. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 46, No. 2, pp. 261–279, 1994.

[16] Nikolai Proskurin. *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Vol. 1677 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 100, pp. 171–193, 1974.

[18] Birgit Speh and David A. Vogan, Jr. Reducibility of generalized principal series representations. *Acta Math.*, Vol. 145, No. 3-4, pp. 227–299, 1980.

[19] Ramin Takloo-Bighash. L-functions for the p-adic group GSp(4). *Amer. J. Math.*, Vol. 122, No. 6, pp. 1085–1120, 2000.

[20] David A. Vogan, Jr. Gel′fand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules. *Invent. Math.*, Vol. 48, No. 1, pp. 75–98, 1978.

[21] Nolan R. Wallach. Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups. In *Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983)*, Vol. 1024 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 287–369. Springer, Berlin, 1983.