

## ベクトル空間アクセス構造を用いた秘密分散法

東邦大学 理学部 情報科学科  
足立 智子, 藤井 聖子

Toho University, Department of Information Science

Tomoko Adachi, Seiko Fujii

**要旨** 秘密情報を復元できる権限を持つ参加者部分集合の族をアクセス構造という。本稿では、ベクトル空間アクセス構造を紹介する。さらに、会合数 1 の場合に、グラフを用いたアクセス構造との対応についても述べる。

### 1. はじめに

秘密情報を  $n$  人に分散し、任意の  $t$  人の合意があれば秘密情報が復元できるが、 $t$  人未満では復元できない。これが Shamir の  $(t, n)$  しきい値法[3]と呼ばれる秘密分散法である。秘密分散法の考え方は、核兵器制御スイッチ(秘密情報)の制御方法にも採り入れられている。Time Magazine (1992)によれば、ロシアでは大統領・国防大臣・国防省の三人のうち二人が合意すれば、核爆弾投下が決行できる仕組みになっている。現在では、クラウドコンピューティングでも採り入れられており、NRI セキュアテクノロジーズは 2010 年 10 月より秘密分散技術を用いて分割した重要データを複数のデータセンターで管理するサービスを提供している。

秘密情報の復元に必要な参加者を、任意の  $t$  人ではなく、決められた参加者の部分集合としたい場合には、アクセス構造を用いる。先の例を用いると、どの 2 人からも秘密情報が復元できるのではなく、大統領を含めた 2 人でないと秘密情報が復元できないような場合である。1989 年、Brickell によってベクトル空間を用いたアクセス構造[1]が提案された。本稿では、ベクトル空間アクセス構造を持つ秘密分散法における分散情報の配布や秘密情報の復元の方法を紹介する。さらに、会合数が 1 である場合について、グラフを用いたアクセス構造との対応[2]についても紹介する。

### 2. ベクトル空間アクセス構造

秘密分散法を実現する代表的な方法として、Shamir の  $(t, n)$  しきい値法がある。これは、 $n$  人の参加者集合  $\Pi$  のうち、任意の  $t$  人が持つ分散情報  $y$  から秘密情報

$S$  が復元できる方法である。より一般的な方法として、秘密情報  $S$  を復元できる参加者集合と復元できない参加者集合に分類するアクセス構造がある。本節では、アクセス構造による秘密分散法をベクトル空間上で構成する Brikell の方法を紹介する。

## 2.1 アクセス構造

参加者集合のうち、秘密情報を復号できる権限を持つ集合をアクセス集合という。アクセス集合の族をアクセス構造  $\Gamma$  といい、アクセス集合のうち、一人でも参加者が欠けると秘密情報を復元できなくなる最小の集合を最小アクセス集合といい、この族を最小アクセス構造  $\Gamma_0$  という。 $\Gamma_0$  の要素(最小アクセス集合)を基とも呼ぶ。アクセス構造、および最小アクセス集合を数学的に定義すると以下となる。

定義 2.1 アクセス構造  $\Gamma$  と最小アクセス構造  $\Gamma_0$

参加者集合を  $\Pi$ 、参加者部分集合を  $B, B'$  とする。このときアクセス構造  $\Gamma$  および最小アクセス構造  $\Gamma_0$  を以下で定義する。

$$\Gamma := \{B' \subseteq P : B \subseteq B', B \in \Gamma_0\}$$

$$\Gamma_0 := \{B \in \Gamma : B' \setminus \{V_i\} \notin \Gamma \mid V_i \in B', i=1, \dots, n\}$$

秘密情報の値の情報が非アクセス集合の任意の参加者からは得られないならば完全な秘密分散法といい、本稿においてはこの場合についてのみ考える。

定義 2.2 アクセス構造を実現する完全な秘密分散法

$n$  人の利用者集合  $\Pi$  の中で秘密情報  $S$  を分散させるとき、以下の性質を同時に満たすものを完全な秘密分散法という。

1. アクセス集合  $B \subseteq P$  の持つ分散情報から秘密情報  $S$  の値を特定できる。
2. 非アクセス集合  $N \subseteq P$  の持つ分散情報から秘密情報  $S$  の値に関して何も得られない。

## 2.2 ベクトル空間アクセス構造の構成法

素数を  $p$  とし、2 以上の整数を  $d$  とする。このとき、剰余環  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  は、位数  $p$  の体になる。 $Z_p$  上の  $d$  次元ベクトル空間を  $(Z_p)^d$  と表し、本稿では、このベクトル空間を用いる。

アクセス構造を  $\Gamma$  とする。参加者集合  $P = \{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  と、 $\Pi$  に属さないディ

ーラーDが存在する。条件

$$\phi(D) = (1, 0, \dots, 0) \in \langle \phi(P_i) : P_i \in B \subset \Pi, i = 1, \dots, n \rangle \Leftrightarrow B \in \Gamma$$

を満たす写像  $\phi: P \cup \{D\} \rightarrow (Z_p)^d \setminus \{0\}$  により、参加者それぞれに非零ベクトルを公開値として与える。すなわち、ディーラーDのベクトル  $\phi(D) = (1, 0, \dots, 0)$  は、Bが権限を持つ部分集合であるそのときのみ、集合  $\{\phi(P_j) : P_j \in B\}$  のベクトルの線形結合として表せる。ここで、ベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の線形結合  $\langle v_i \rangle$  とは、ベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_n$  とスカラー  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を用い、 $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  の形で表されることを意味する。

次に、Brikell法による秘密情報の分散配布、および復元について紹介する。ディーラーDは、秘密情報Sから分散情報  $V_i$  を作成し、n人の参加者  $P_i$  へ配布する。すなわち、参加者  $P_i$  は、公開されているベクトル  $\phi(P_i)$  と非公開の値である分散情報  $V_i$  を所持する。秘密情報Sの復元は、アクセス集合  $B \in \Gamma$  に含まれる全参加者が集まった時に可能となる。

アルゴリズム 2.1 Brikellによるベクトル空間上でのアクセス構造の構成法

Step 1. [初期設定] pを素数、dを2以上の整数、 $1 \leq i \leq n$ とする。ディーラーDは  $(1, 0, \dots, 0)$  を除く  $(Z_p)^d$  から、ベクトル  $\phi(P_i)$  を選択する。ディーラーDは、ベクトル  $\phi(P_i)$  を参加者  $P_i$  に公開値として与え、秘密情報  $S \in Z_p$  を保持する。また、 $Z_p$  上のd-1個のランダムな要素  $r_2, \dots, r_d$  を選択し、ベクトル  $\vec{r} = (S, r_2, \dots, r_d)$  を与える。

Step 2. [分散配布] ディーラーDは分散情報  $V_i = \vec{r} \cdot \phi(P_i)$  を計算し、参加者  $P_i$  に非公開に付与する。

Step 3. [復元] 参加者  $P_i \in B$  が、それぞれベクトル  $\phi(P_i)$  と分散情報  $V_i$  を持ちより  $(1, 0, \dots, 0) = \sum_{\{i: P_i \in B\}} C_i \phi(P_i)$  に代入し、この方程式を満たす  $C_i$  を求める。さらに、参加者  $P_i$  は、求めた値  $C_i$  と分散情報  $V_i$  を持ちより、 $S = \sum_{\{i: P_i \in B\}} C_i V_i$  により秘密情報Sを復元できる。

次に、 $p=3, d=4$  として例を示す。ディーラーDと4人からなる参加者集合  $P = \{P_i | 1 \leq i \leq 4\} \cdot D$  が存在する。ベクトル空間  $(Z_3)^2$  上でアクセス構造を構成する。今、ディーラーDにはベクトル  $\phi(D) = (1, 0)$  を、4人の参加者  $P_1, P_2, P_3, P_4$  各々にはベクトル  $\phi(P_1) = (1, 1), \phi(P_2) = (2, 1), \phi(P_3) = (1, 2), \phi(P_4) = (2, 2)$  を与える。このとき、 $B_1 = \{P_1, P_2\}, B_2 = \{P_1, P_3\}, B_3 = \{P_2, P_4\}, B_4 = \{P_3, P_4\}$  を基とする最小アク

セス構造  $\Gamma_0 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  を考える。図 2.1 では、4 本の太線が 4 つの基に対応する。

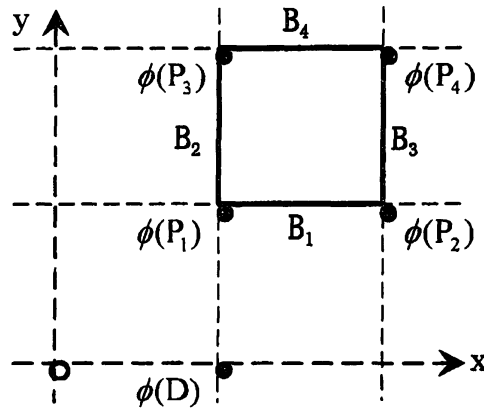


図 2.1 ベクトル空間  $(Z_3)^2$  上における  
4 人の参加者によるアクセス構造の例

例 2.1 ベクトル空間  $(Z_3)^2$  上でのアクセス構造の構成例

Step 1. [初期設定] ディーラーD は、ベクトル  $\phi(P_1) = (1,1)$ ,  $\phi(P_2) = (2,1)$ ,  $\phi(P_3) = (1,2)$ ,  $\phi(P_4) = (2,2)$  を参加者  $P_i$  に公開値として与え、秘密情報  $S = 2 \in Z_3$  を保持する。また、 $Z_3$  上の 1 個のランダムな要素  $r_2 = 2$  を選択し、 $\vec{r} = (2, 2)$  を得る。

Step 2. [分散配布] ディーラーD は分散情報  $V_i = (2,2) \cdot \phi(P_i)$  を計算し、 $V_i$  を参加者  $P_i$  に非公開に付与する。

$$V_1 = (2, 2) \in (1, 1)$$

同様に、 $V_2 = 0, V_3 = 0, V_4 = 2$

Step 3. [復元] アクセス集合  $B_1$  とし、次式を満たす  $C_i$  を求める。

$$C_1 \phi(P_1) + C_3 \phi(P_3) = (P_1) + C (1, 2)$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \pmod{3} \text{ を解き、 } C_1 = 2, C_2 = 2 \text{ を得る。}$$

参加者  $P_i \in B$  は、求めた値  $C_i$  と分散情報  $V_i$  を持ち寄り、次式を用いて秘密情報  $S$  を復元できる。

$$S = \sum C_i \phi(P_i) + C_3 V_3 = C_1 V_1 + C_3 V_3 =$$

3. 会合数 1 のアクセス構造

はじめに、アクセス構造の連結という概念について紹介する。 $\Gamma$  を参加者集合  $\Pi$  上のアクセス構造とする。任意の参加者  $p, q \in P$  に対し、 $1 \leq i \leq \ell-1$  に関して  $p \in A_i, q \in A_i, A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$  であるような最小アクセス集合  $A_1, \dots, A_\ell \in \Gamma_0$  が存在するならば、アクセス構造  $\Gamma$  は連結されているという。

グラフ  $G$  は、頂点集合  $V(G)$  と辺集合  $E(G)$  から成る。このとき、グラフを用いたアクセス構造  $\Gamma$  では、頂点集合  $V(G)$  が参加者集合  $\Pi$  に対応し、辺集合  $E(G)$  が最小アクセス構造  $\Gamma_0$  に対応し、辺が基に対応する。また、基(最小アクセス集合)の参加者の最大人数および最小人数を、それぞれランクおよびコランクといい、 $\text{rank}(\Gamma), \text{corank}(\Gamma)$  と表す。

アクセス構造  $\Gamma$  の会合数とは、2つの異なる最小アクセス集合に共通する要素(参加者)の最大数のことである。グラフによって定義される会合数 1 のアクセス構造について、2006年に Jaume Marti-Farre と Carles Padro によって評価がなされた[2]。例 2.1 のベクトル空間  $(\mathbb{Z}_3)^2$  上でのアクセス構造は、グラフによって定義される会合数 1 のアクセス構造である。

以上を踏まえ、本節では、グラフによって定義される会合数 1 のベクトル空間アクセス構造をいくつか紹介する。

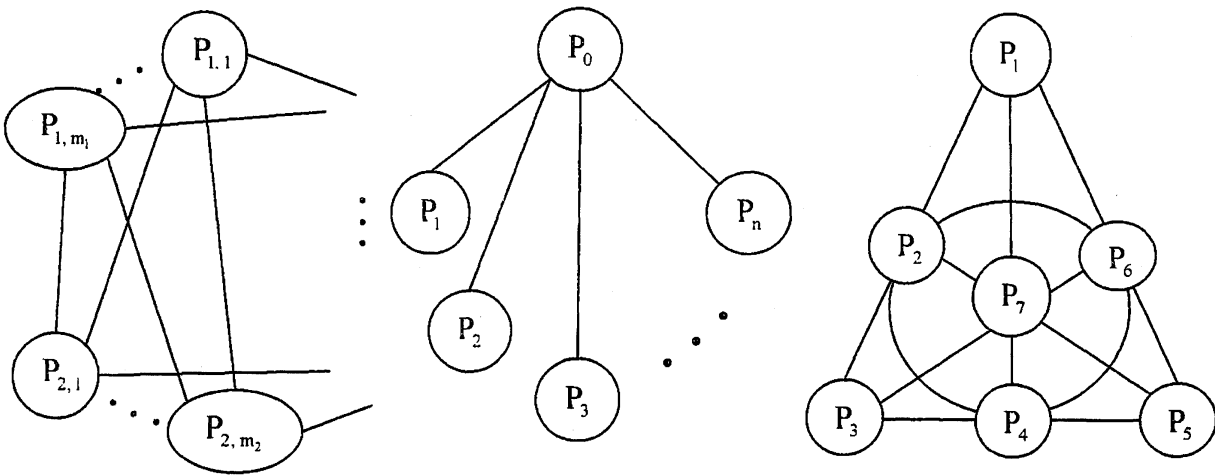


図3.1 完全多部グラフに関するアクセス構造

図3.2 星アクセス構造

図3.3 ファノ平面に関するアクセス構造

### 3.1 完全多部グラフに関するアクセス構造

グラフ  $G$  の頂点集合  $V(G)$  を  $k$  個の部分集合  $M_j (1 \leq j \leq k)$  に分割し、これを部分と呼ぶ。このとき  $|M_j| = m_j$  とする。このとき、任意の辺の両端点が異なる部

分に属しているようなグラフを  $k$  部グラフという。特に、各頂点が自分の属していない部分に含まれる頂点全てと辺で連結しているものを完全多部グラフといい、 $K_{m_1, \dots, m_k}$  で表す。完全多部グラフに関するアクセス構造  $\Gamma\langle K_{m_1, \dots, m_k} \rangle$  において、2つの異なる最小アクセス集合に共通する頂点の最大数は1であるので、会合数は1である(図 3.1 参照)。

### 補題 3.1

完全多部グラフに関するアクセス構造  $\Gamma\langle K_{m_1, \dots, m_k} \rangle$  は、ベクトル空間アクセス構造である。

### 証明 3.1

$m_1, \dots, m_k$  をグラフ  $G$  の頂点集合  $V(G)$  の部分  $M_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) の位数とする。

いま  $p$  を素数とし、剰余環  $Z_p$  上の2次元ベクトル空間  $(Z_p)^2$  を考える。 $Z_p$  上の異なる要素を  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とする。また、それぞれ頂点、すなわち参加者  $P_i$  に与えるベクトルを  $\phi(P_i) = (x_i, 1)$  とする。つまり、同じ部分に含まれる参加者には同じベクトルを与える。このとき、

$$\phi(D) = (1, 0) \in \langle \phi(P_i) : P_i \in B \subset \Pi, i = 1, \dots, n \rangle \Leftrightarrow B \in \Gamma$$

を確かめるのは容易である。同様に、位数  $p$  の  $d$  次元ベクトル空間において適当なベクトルを与えるときについても確かめることができる。ゆえに、完全多部グラフに関するアクセス構造  $\Gamma\langle K_{m_1, \dots, m_k} \rangle$  はベクトル空間アクセス構造である。□

### 3.2 星グラフに関するアクセス構造

参加者が1人の部分  $\{P_0\}$  と  $n$  人の部分  $\{P_1, \dots, P_n\}$  から成る完全二部グラフ  $K_{1, n}$  を、星グラフ  $S(P_0)$  という。この星グラフは、2つの異なる最小アクセス集合  $A, A' \in \Gamma_0$  に関して、 $A \cap A' = \{P_0\}$  であるような  $P_0 \in P$  が存在するアクセス構造とみなすことができる。このアクセス構造を星アクセス構造  $\Gamma\langle S(P_0) \rangle$  といい、会合数は1である(図 3.2 参照)。

### 補題 3.2

星グラフに関するアクセス構造  $\Gamma\langle S(P_0) \rangle$  は、ベクトル空間アクセス構造である。

## 証明 3.2

位数 2 の 2 次元ベクトル空間  $(Z_2)^2$  を考える。このとき、星アクセス構造  $\Gamma(S(P_0)) = \{A_1, \dots, A_r\}$  に対応する星グラフの頂点は、2 つの部分  $\{P_0\}$  および  $\{P_1, \dots, P_n\}$  に分割できる。参加者  $P_0$  にはベクトル  $\phi(P_0) = (1, 1)$  を、残りの参加者  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) にはベクトル  $\phi(P_i) = (0, 1)$  を与えたとする。つまり、同じ部分に含まれる参加者には同じベクトルを与える。このとき、

$$\phi(D) = (1, 0) \in \langle \phi(P_i) : P_i \in A_j \subset P, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r \rangle \Leftrightarrow B \in \Gamma$$

を確かめるのは容易である。同様に、位数  $p$  の  $d$  次元ベクトル空間において適当なベクトルを与えるときについても確かめることができる。ゆえに、星グラフに関するアクセス構造  $\Gamma(S(P_0))$  は、ベクトル空間アクセス構造である。

□

## 3.3 ファノ平面に関するアクセス構造

ファノ平面とは、位数 2 の有限射影平面であり、ファノ平面に関するアクセス構造を  $\Gamma_2$  で表す(図 3.3 参照)。 $\Gamma_2$  は会合数 1 を持ち、ランク (最小アクセス集合の参加者の最大人数) とコランク (最小アクセス集合の参加者の最小人数) 共に 3 である。

## 補題 3.3

$\Gamma_2$  をファノ平面に関するアクセス構造であるとする。つまり、 $\{P_1, P_2, P_3\}$ ,  $\{P_1, P_4, P_7\}$ ,  $\{P_1, P_5, P_6\}$ ,  $\{P_2, P_4, P_6\}$ ,  $\{P_2, P_5, P_7\}$ ,  $\{P_3, P_4, P_5\}$ ,  $\{P_3, P_6, P_7\}$  を基に持つ、7 人の参加者集合  $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$  から成るアクセス構造である。このとき、アクセス構造  $\Gamma_2$  はベクトル空間アクセス構造である。

## 証明 3.3

位数 2 の 4 次元ベクトル空間  $(Z_2)^4$  を考える。 $\phi: P \cup \{D\} \rightarrow (Z_2)^4$  を  $\phi(D) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\phi(P_1) = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\phi(P_2) = (0, 1, 1, 0)$ ,  $\phi(P_3) = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\phi(P_4) = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\phi(P_5) = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\phi(P_6) = (0, 0, 0, 1)$ ,  $\phi(P_7) = (1, 1, 0, 1)$  によって定義される写像であるとする。ベクトル  $\phi(D)$  が集合  $\{\phi(P_i) : P_i \in A\}$  のベクトルの線型結合である場合に限り、 $A \subset \Pi$  ならば  $A \in \Gamma_2$  であることを調べるのは難しくない。同様に、位数  $p$  の  $d$  次元ベクトル空間において適当なベクトルを与えるときについても確かめることができる。ゆえに、 $\Gamma_2$  はベクトル空間  $(Z_2)^4$  上のベクトル空間アクセス構造である。 □

3.4  $\Gamma_2$ に関連した3つのアクセス構造

前節までに、ファノ平面に関するアクセス構造 $\Gamma_2$ について紹介してきた。本節では、これに関連したアクセス構造を3つ： $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}, \Gamma_{2,3}$  紹介する(図3.4 参照)。これらは会合数1である。以下に、各々の定義を示す。

定義 3.1  $\Gamma_2$ に関連したアクセス構造 $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}, \Gamma_{2,3}$

ファノ平面に関するアクセス構造 $\Gamma_2$ の参加者 $P' = \{P_1, \dots, P_7\}$ の部分集合を $Q' = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ ,  $Q'' = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ とする。このとき、アクセス集合 $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}$ は部分集合 $Q'$ から、アクセス集合 $\Gamma_{2,3}$ は部分集合 $Q''$ から成る、以下の基を持つ族と定義する。

- 1)  $\Gamma_{2,1} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_2, P_4, P_6\}, \{P_3, P_4, P_5\}\}$
- 2)  $\Gamma_{2,2} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_2, P_4, P_6\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_4\}, \{P_2, P_5\}, \{P_3, P_6\}\}$
- 3)  $\Gamma_{2,3} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_4\}, \{P_2, P_5\}\}$

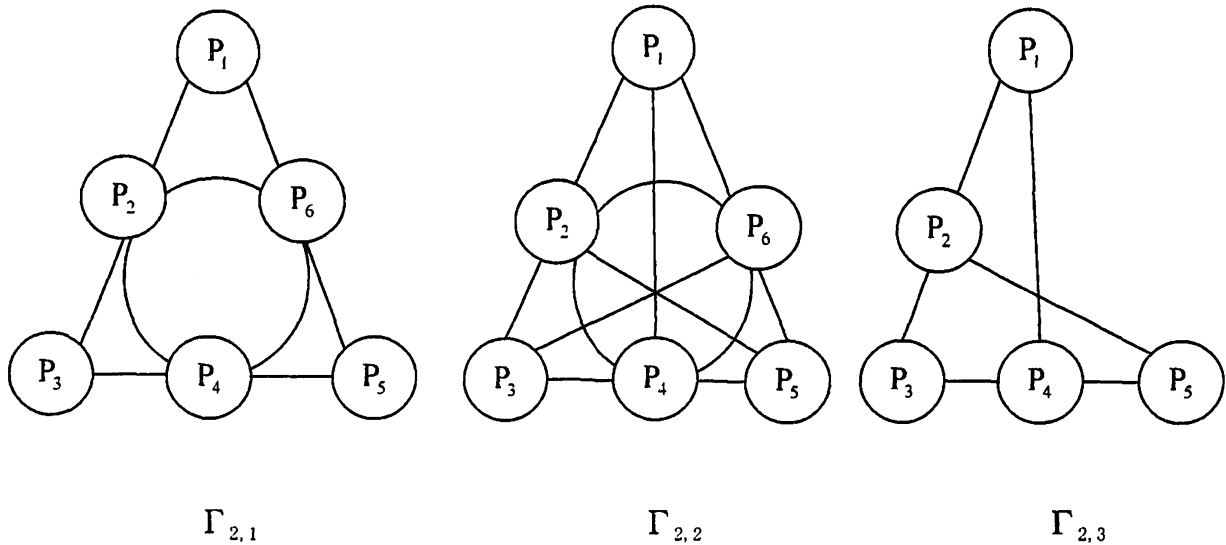


図 3.4  $\Gamma_2$ に関する3つのアクセス構造

参加者集合 $\Pi$ 上のアクセス構造を $\Gamma$ とする。任意の部分集合 $Q \subset P$ に関して、アクセス構造 $\Gamma$ による部分集合 $Q$ 上の誘導構造は、 $\Gamma(Q) = \{A \in \Gamma : A \subset Q\}$ で定義される。つまり、アクセス構造 $\Gamma_{2,1}$ は、アクセス構造 $\Gamma_2$ による参加者部分集合 $Q'$ 上の誘導構造 $\Gamma_2(Q') = \{A' \in \Gamma_2 : A' \subset Q'\}$ である。また、アクセス構造 $\Gamma_{2,3}$ は、アクセス構造 $\Gamma_{2,2}$ による参加者部分集合 $Q''$ 上の誘導構造 $\Gamma_{2,2}(Q'')$ である。また、アクセス構造 $\Gamma$ の双対構造は、 $\Gamma^* = \{A \subset P : P \setminus A \notin \Gamma\}$ で定義される。つまり、



アクセス構造  $\Gamma_{2,2}$  は、 $\Gamma_{2,1}$  の双対構造  $(\Gamma_{2,1})^* = \{A'' \subset Q' : Q' \setminus A'' \notin \Gamma_{2,1}\}$  である。

#### 補題 3.4

$\Gamma_2$  に関連した 3 つのアクセス構造  $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}, \Gamma_{2,3}$  は、ベクトル空間アクセス構造である。

#### 証明 3.4

アクセス構造  $\Gamma$  がベクトル空間アクセス構造ならば、その部分集合である誘導構造  $\Gamma(Q)$  もベクトル空間アクセス構造であることは明らかである。よって、 $\Gamma_{2,1} = \Gamma_2(\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\})$  を確かめればよい。この結果から双対構造  $(\Gamma_{2,1})^* = \Gamma_{2,2}$  を確かめられ、さらに、 $\Gamma_{2,3} = \Gamma_{2,2}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\})$  を調べることで補題 3.4 の結果を得る。  $\square$

#### 3.5 グラフに関するアクセス構造とベクトル空間アクセス構造との関係

会合数 1 のアクセス構造に関し、ベクトル空間アクセス構造とあるグラフによって与えられるアクセス構造は同値であるという次の定理が、Farre らによって与えられた。

#### 定理 3.1

会合数 1 の参加者集合  $\Pi$  上のアクセス構造  $\Gamma$  と以下の条件は同値：

- 1)  $\Gamma$  はベクトル空間アクセス構造である。
- 2)  $\Gamma$  は以下の構造のいずれかである。
  - 完全多部グラフに関するアクセス構造  $\Gamma\langle K_{m_1, \dots, m_k} \rangle$
  - 星アクセス構造  $\Gamma\langle S(P_0) \rangle$
  - ファノ平面に関するアクセス構造  $\Gamma_2$
  - $\Gamma_2$  に関連したアクセス構造  $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}, \Gamma_{2,3}$

定理 3.1 の 2) が 1) の十分条件であることは、補題 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 から明らかである。いま、1) が 2) の必要条件であることについて確かめる。

$\Gamma$  を、会合数 1、 $\text{corank}(\Gamma) \geq 3$ 、基  $\Gamma_0$  を持つ参加者集合  $\Pi$  上のベクトル空間アクセス構造であると仮定する。まず、 $A_1, A_2, A_3 \in \Gamma_0$  を、

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_1 \cap A_3 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$$

であるような、3 つの異なる最小アクセス集合とすると、

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \setminus ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \in \Gamma$$

である。更に、 $i=1,2,3$  に関して  $|A_i|=3$  であり、 $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$  でもある。これより、会合数 1、 $\text{corank}(\Gamma) \geq 3$  である参加者集合  $\Pi$  上のベクトル空間アクセス構造  $\Gamma$  は、星アクセス構造  $\Gamma(S(P_0))$ 、ファノ平面に関するアクセス構造  $\Gamma_2$ 、またはアクセス構造  $\Gamma_{2,1}$  である。

次に、 $|A_1| \geq 3$  かつ  $|A_2|=2$  であるような任意の二つの最小アクセス集合に関し、 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  とすれば、

$$(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \notin \Gamma)$$

である。 $|A_1| \geq 3$ 、 $|A_2|=2$ 、 $|A_3| \geq 2$  であるような三つの異なる最小アクセス集合に関し、 $\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \neq A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$  とすると、

$$|A_1|=3, |A_3|=3, A_1 \cap A_3 \neq \emptyset, (A_1 \cup A_3) \setminus (A_2 \cup (A_1 \cap A_3)) \in \Gamma$$

となる。また、 $\emptyset \neq A_1 \cap A_2 \neq A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$  とすれば、

$$|A_1|=3, A_2 \cap A_3 = \emptyset, (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \setminus ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)) \in \Gamma$$

となる。これより、会合数 1、 $\text{corank}(\Gamma) = 2$  を持つ、参加者集合  $\Pi$  上のベクトル空間アクセス構造  $\Gamma$  は、完全多部分グラフ  $\Gamma(K_{m_1, \dots, m_k})$ 、星アクセス構造  $\Gamma(S(P_0))$ 、アクセス構造  $\Gamma_{2,2}$ 、またはアクセス構造  $\Gamma_{2,3}$  である。

以上より、会合数 1 のベクトル空間アクセス構造  $\Gamma$  は、完全多部グラフに関するアクセス構造  $\Gamma(K_{m_1, \dots, m_k})$ 、星アクセス構造  $\Gamma(S(P_0))$ 、ファノ平面に関するアクセス構造  $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_2$  に関連したアクセス構造  $\Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2}, \Gamma_{2,3}$  のいずれかであることが示せた。よって定理 3.1 の 1) と 2) は確かに同値である。

#### 4. 終わりに

本稿では Shamir の  $(t, n)$  しきい値法をより一般的な状況としたアクセス構造を扱った。アクセス構造は、Brickell によってベクトル空間アクセス構造が考案されている。なかでも会合数 1 を持つ、グラフを用いたベクトル空間アクセス構造について紹介をしてきた。

一般にこれらの秘密分散の効率を測るパラメータとして、情報比  $\rho$  が用いられる。 $\Sigma$  は秘密情報の集合、 $\zeta_p$  はユーザー  $p$  が受け取る可能性のある分散情報の集合を意味する。情報比は、

$$\rho = \log |\Sigma| / \max_{p \in \Pi} \log |\zeta_p|$$

で表され、すなわち秘密情報の長さ と 参加者に与える分散情報の最大長の長さの比を意味する。特に、アクセス構造  $\Gamma$  を実現する完全な秘密分散法の最大の情報比を  $\rho^*(\Gamma)$  と表記し、最適情報比という。

ここで、情報比に関し、Padro と Saez によって一般化が与えられた独立シー

ケンス法について紹介をする。  $\Gamma$  を参加者集合  $\Pi$  上のアクセス構造であるとしよう。  $\emptyset \neq B_1 \subset \dots \subset B_m \notin \Gamma$  を、  $R \subset P$  によって独立に生成される  $\Pi$  の部分集合の数列とする。すなわち、  $i=1, \dots, m$  であるとき、  $B_0$  が空集合であり  $B_i \cap X_i \in \Gamma$  かつ  $B_{i-1} \cap X_i \notin \Gamma$  であるような  $X_1, \dots, X_m \subset R$  が存在する。このとき、  $R \in \Gamma$  ならば  $\rho^*(\Gamma) \leq |R|/(m+1)$  であり、  $A \notin \Gamma$  ならば  $\rho^*(\Gamma) \leq |R|/m$  となることが知られている。このシーケンス法を用いると、定理 3.1 が  $\rho^*(\Gamma) > 2/3$  と同値であることがいえる。この詳細な考察については、参考文献[2]の第3節に詳しい。

#### 参考文献

- [1] E. F. Brickell : Some ideal secret sharing schemes. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 6 (1989), pp. 105 - 113.
- [2] J. M. Farre, C. Padro : Secret sharing schemes on access structures with intersection number equal to one. *Discrete Applied Mathematics*, 154 (2006), pp. 552 - 563
- [3] A. Shamir : How to share a secret. *Communications of the ACM*, 22 (1979), pp. 612 - 613.