

## 波動乱流における「凍結乱流」現象について

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)  
 Faculty of Engineering, Gifu University

### 1 波動乱流研究の概要

#### 1.1 波動乱流とは

波動乱流とは、様々な波数ベクトル  $k$  および振幅  $a$  を持つ無数の微小振幅波列が重ね合わさった状態であり、ある物理量  $\eta$  の場所  $x$ , 時刻  $t$  における値  $\eta(x, t)$  は、振幅に関する最低次の近似においては

$$\eta(x, t) = \sum_n a_n \cos(k_n \cdot x - \omega_n t + \theta_n), \quad (1)$$

のように表される。ここで  $\omega = \omega(k)$  は線形分散関係を表す。ただし、各波列は完全に独立ではなく、系の支配方程式もしくは境界条件の非線形性を通して、弱いながらも非線形相互作用を行い、その結果各波列の振幅、したがってそれが持つエネルギーがゆっくりと変化する。 $\eta(x, t)$  自身は非常に複雑な  $x$  と  $t$  の関数であり、研究の主な対象はエネルギースペクトル

$$\bar{\eta}^2 = \int E(k) dk \quad (2)$$

などの統計量およびその時間的な発展となる。以下に紹介する波動乱流の標準理論によると、スペクトルの時間変化を記述する非線形時間スケール  $t_{NL}$  は、代表的周波数に対応する線形時間スケール  $t_L$  に比べて非常に長く、代表的な無次元振幅を  $\epsilon$  とすると、3 波共鳴を許す系においては  $t_{NL} \sim O(\epsilon^{-2} t_L)$ 、それを許さない系においては  $O(\epsilon^{-4} t_L)$  となる。

#### 1.2 ハミルトン形式

波動乱流研究は基本的には、波動が増幅減衰することなく中立に伝播することができる保存系を対象としており、また多くの重要な応用例においてはハミルトン形式による定式化が可能である。例えば Zakharov(1968)[1] は、水面波の基礎方程式系は非粘性・非圧縮・非回転の近似のもとでは、正準方程式

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \psi(x, t)}, \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta(x, t)} \quad (3)$$

と同等であることを示した。ここで  $\eta(x, t)$  は水面変位、 $\psi(x, t)$  は水面における速度ポテンシャル、ハミルトニアン  $H$  は全エネルギー

$$H = \frac{1}{2} \int dx \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz + \frac{1}{2} g \int \eta^2 dx \quad (4)$$

である。一旦ハミルトン系として定式化できると、正準変換によってより便利な正準変数を導入することが可能となる。Zakharov(1968) は新たな正準変数として

$$b(k, t) = \sqrt{\frac{\omega(k)}{2k}} \hat{\eta}(k, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega(k)}} \hat{\psi}(k, t), \quad \omega(k) = \sqrt{gk}, \quad k = |k| \quad (5)$$

を導入した。ここで  $\hat{\eta}(\mathbf{k}, t)$ ,  $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$  はそれぞれ  $\eta(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi(\mathbf{x}, t)$  の  $\mathbf{x}$  に関するフーリエ変換を表す。Zakharov の  $b(\mathbf{k})$  を用いると  $H$  は

$$\begin{aligned}
H(b, b^*) &= \int \omega_0 b_0 b_0^* d\mathbf{k}_0 \\
&+ \int U_{012}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 + \text{c.c.}) \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{012} + \frac{1}{3} \int U_{012}^{(3)} (b_0 b_1 b_2 + \text{c.c.}) \delta_{0+1+2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{012} \\
&+ \int V_{0123}^{(1)} (b_0^* b_1 b_2 b_3 + \text{c.c.}) \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123} + \frac{1}{2} \int V_{0123}^{(2)} b_0^* b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123} \\
&+ \frac{1}{4} \int V_{0123}^{(4)} (b_0 b_1 b_2 b_3 + \text{c.c.}) \delta_{0+1+2+3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{0123} + O(b^5)
\end{aligned} \tag{6}$$

のように展開形で表現される。ここで  $b_0 = b(\mathbf{k}_0)$ ,  $U_{012} = U(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ,  $d\mathbf{k}_{012} = d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$  など。また  $\delta_{0+1+2}^{\mathbf{k}}$  などはデルタ関数  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  を表す。対応する正準方程式は

$$i \frac{\partial b(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H(b, b^*)}{\delta b^*(\mathbf{k}, t)} \quad (\text{and c.c.}) \tag{7}$$

と表され、 $b(\mathbf{k})$  に対する支配方程式は

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t} &= \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \\
&+ \int U_{012}^{(1)} b_1 b_2 \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} + 2 \int U_{210}^{(1)} b_1^* b_2 \delta_{0+1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} + \int U_{012}^{(3)} b_1^* b_2^* \delta_{0+1+2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} \\
&+ \int V_{0123}^{(1)} b_1 b_2 b_3 \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} + 3 \int V_{3210}^{(1)} b_1^* b_2^* b_3 \delta_{0+1+2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} \\
&+ \int V_{0123}^{(2)} b_1^* b_2 b_3 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} + \int V_{0123}^{(4)} b_1^* b_2^* b_3^* \delta_{0+1+2+3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} + \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで  $b$  について 2 次、3 次の項は、それぞれ 3 波相互作用、4 波相互作用を表している。この展開は一般には無限に続く。この無限級数のどこで打ち切るのが合理的であるかが問題となるが、これは分散関係  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  の型によって異なる。

### 1.3 分散関係の分類

分散関係  $\omega(\mathbf{k})$  は 3 波共鳴相互作用

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2, \quad \omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) \tag{9}$$

を許すかどうかによって大別され、3 波共鳴相互作用を許す場合は崩壊型 (decay type), そうでない場合は非崩壊型 (no-decay type) と呼ばれる。  $\omega = k^\alpha$  の場合、  $\alpha > 1$  なら崩壊型、  $\alpha < 1$  なら非崩壊型となる。水面波の場合、波長が短く復元力として表面張力が卓越する表面張力波は崩壊型 ( $\alpha = 3/2$ ), 波長が長く復元力として重力が卓越する重力波は非崩壊型 ( $\alpha = 1/2$ ) となる。なお 3 波共鳴と異なり、4 波共鳴条件

$$\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega(\mathbf{k}) \pm \omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) \pm \omega(\mathbf{k}_3) = 0 \tag{10}$$

は  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$  など自明な共鳴組の存在のために、どのような分散関係においても実現可能である。Phillips (1960)[3] は、波と波の非線形相互作用において、共鳴相互作用が果たす決定的に重要な役割について初めて指摘した。

## 1.4 Zakharov 方程式

Krasitskii (1994)[2] は

$$b_k = a_k + \int A_{012}^{(1)} a_1 a_2 \delta_{0-1-2}^k dk_{12} + \cdots \\ + \int B_{0123}^{(1)} a_1 a_2 a_3 \delta_{0-1-2-3}^k dk_{123} + \cdots + O(a^4) \quad (11)$$

なる正準変換によって最適な正準変数  $a(k)$  を導入することで,  $H$  の表現を, 崩壊型 (3 波系) の場合には

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + \frac{1}{2} \int V_{012} (a_0^* a_1 a_2 + \text{c.c.}) \delta_{0-1-2}^k dk_{012} + O(a^4), \quad (12)$$

非崩壊型 (4 波系) の場合には

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + \frac{1}{2} \int W_{0123} a_0^* a_1^* a_2 a_3 \delta_{0+1-2-3}^k dk_{0123} + O(a^5), \quad (13)$$

という形にまで簡略化することができ, これによって対応する正準方程式を, 崩壊型 (3 波系) の場合には

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k - i \int \left\{ \frac{1}{2} V_{012} a_1 a_2 \delta_{0-1-2}^k + V_{102} a_1 a_2^* \delta_{1-0-2}^k \right\} dk_{12}, \quad (14)$$

非崩壊型 (4 波系) の場合には

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k - i \int W_{0123} a_1^* a_2 a_3 \delta_{0+1-2-3}^k dk_{123}, \quad (15)$$

という形にまで簡略化できることを示した. 現在波動理論の脈絡で「Zakharov 方程式」といえば, (14),(15) を指すことが多い.

## 1.5 統計的記述への移行

Zakharov 方程式に  $a(k)$  を乗じ, アンサンブル平均を取ることににより, スペクトルや高次モーメントに対する支配方程式を導出することができる. その際, 非線形性のために何らかのクロージャー仮説が必要となるが, 通常は乱雑位相近似, すなわち最低次 (=自由波) においては  $a(k)$  の位相はランダムであるとの仮定が用いられる. この仮定の下では例えば

$$\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n(k) \delta(k - k'), \quad E(k) = \omega(k) n(k), \quad (16)$$

$$\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n(k_1) n(k_2) \left[ \delta_{1-3}^{k_1} \delta_{2-4}^{k_2} + \delta_{1-4}^{k_1} \delta_{2-3}^{k_2} \right], \quad (17)$$

などが成り立つ. ここで  $n(k)$  はウェイブアクションスペクトルと呼ばれ, エネルギースペクトル  $E(k)$  とは  $n(k) = E(k)/\omega(k)$  の関係にある.

さらにスペクトル変動の時間スケールが線形振動数に対応する時間スケールに比べて非常に長く, したがってスペクトル変動の時間スケールにおいては, 振動数がマッチしない, すなわち非共鳴的な相互作用の影響は消滅するはずであるとの考えから, 伝統的な波動乱流理論では

$$\frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega} \longrightarrow \pi \delta(\Delta\omega), \quad (t \rightarrow \infty) \quad (18)$$

のようなデルタ算法が用いられる。ここで  $\Delta\omega$  は  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$  などの振動数のミスマッチを表す。

これらの仮定や近似に基づく一連の操作の結果、3波系においては

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(k)}{\partial t} = & \pi \int \left[ |V_{012}|^2 (n_1 n_2 - n_0 n_1 - n_0 n_2) \delta_{0-1-2}^k \delta_{0-1-2}^\omega \right. \\ & \left. + 2 |V_{102}|^2 (n_0 n_2 - n_1 n_0 - n_1 n_2) \delta_{1-0-2}^k \delta_{1-0-2}^\omega \right] dk_{12}, \end{aligned} \quad (19)$$

4波系においては

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(k)}{\partial t} = & 2\pi \int |W_{0123}|^2 \delta_{0+1-2-3}^k \delta_{0+1-2-3}^\omega \\ & \times \{n_2 n_3 (n_0 + n_1) - n_0 n_1 (n_2 + n_3)\} dk_{123}, \end{aligned} \quad (20)$$

なる式が、スペクトルに対する発展方程式として導出される。(19),(20)は kinetic equation と呼ばれている。kinetic equation 導出の詳細については、[4][5][6][7]などを参照されたい。

従来の波動乱流の多くの研究は(19),(20)に基づいてなされてきており、取り扱われる代表的な研究項目をキーワード的に羅列すると、kinetic equation の一般的性質(保存則, H-定理など), 相互作用の局所性(kinetic equation の右辺の積分の収束性), 厳密な定常解としての Kolmogorov スペクトル, フラックスの向き, Zakharov 変換, Kolmogorov スペクトルとソース・シンク領域との接続, Kolmogorov スペクトルの安定性, などが挙げられる。またここで紹介した波動乱流の標準理論の適用例は非常に広範にわたる。代表的な具体例としては水面波(重力波, 表面張力波), プラズマ(Langmuir 波, イオン音波, ドリフト波, 磁気音波など), 地球流体(ロスビー波(バロトロピック & バロクリニック), 慣性重力波など), 固体(スピン波, 弾性波)などが含まれる。ここで紹介した波動乱流に関する標準理論およびその応用例の詳細については, Zakharov らの本[4]などを参照されたい。

ここまでで紹介したように, 少なくとも無限で一様な媒質中における波動乱流については, その理論的な取り扱い手順はほぼ確立されてきた感がある。しかしその一方でまだ今後の研究が必要と思われる点も多数残されている。具体的には, 例えば

- 共鳴相互作用抽出に必要な時間スケールの問題(kinetic equation の導出プロセスの見直しの可能性・必要性)(Tanaka 2007)[8]
- 平均値まわりのゆらぎの統計(Tanaka-Yokoyama (2011))[9]
- カスケードに伴う弱乱流仮定の自発的な破綻とその帰結
- 系の有限性(or 周期性)に起因するスペクトル空間の離散化の影響

などが挙げられよう。これらのうち, 本研究ではスペクトル空間の離散化に伴って発生する「凍結乱流現象」について紹介する。

## 2 凍結乱流現象

### 2.1 凍結乱流現象とは

実空間の有限性(境界条件)によってスペクトル空間( $k$ 空間)が離散化されると, 共鳴条件を満たす  $k$  の組が大幅に減少, 場合によっては完全に消失することが起こる。kinetic equation(19),

(20) が示すように、波動乱流においては、スペクトルの時間的変動ならびにエネルギーのカスケードはひとえに共鳴相互作用に依存しており、したがって共鳴相互作用の消失は直ちにエネルギーカスケードの消失を引き起こす。この状態が発生すると、例えば低波数領域にエネルギーを注入しても、それが高波数領域へカスケードすることなく、低波数領域に留まってしまうという現象が発生する。このようにスペクトル空間の離散化の結果、エネルギーカスケードが阻害される現象を凍結乱流 (frozen turbulence) と呼ぶ。念のために書き添えるが、通常の Navier-Stokes 乱流に関連してよく知られている「Taylor の凍結乱流仮説」とはまったく無縁のものである。

## 2.2 主な既往研究

凍結乱流に関する研究の歴史はまだ浅く、引き金になったのは Kartashova (1998)[10] の論文である。この論文は Diophantine equation や Bredikhin theorem などという用語が頻繁に登場する整数論の論文であるが、そこで彼女はスペクトル空間 ( $k$  空間) が離散化された場合の共鳴条件に関する議論を展開し、さまざまな結果を得ている。例えば、表面張力波 (分散関係は  $\omega^2 = \gamma k^3$ ) に対する共鳴条件のうち、振動数部分

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (21)$$

の成立は

$$p_1^3 + p_2^3 = p_3^3, \quad p_i \in N, \quad (22)$$

と同等であることを示したのち、これはフェルマーの最終定理の  $n = 3$  の場合に相当することから、解が存在しないことを明らかにした。<sup>1</sup> 彼女のこの解析によると表面張力波においては、 $k$  空間が離散化されると、共鳴相互作用が完全に消失することになる。

Pushkarev と Zakharov (1998)[11]、および Pushkarev (1999)[12] は Kartashova のこの研究結果を受けて、表面張力波の基礎方程式に基づく数値シミュレーションを行った。彼らのシミュレーションでは、低周波でエネルギー注入、高周波で人工的なダンピングが付加されている。彼らが得た結果によると、エネルギー注入が一定量以上の場合、したがって場の非線形性がある程度大きい場合には、離散化された  $k$  空間においても、エネルギーカスケードが起こり、 $k$  空間の連続性を前提とする通常の波動乱流理論が予想するところの Kolmogorov-Zakharov のべき則スペクトルがほぼ実現する。一方、エネルギー注入が小さい場合には高波数へのエネルギーカスケードが止まり、高波数でのダンピングによるエネルギー損失も消滅する。低波数領域の数十のモードのみが励起され、スペクトルは高波数に向けて指数関数的に減少する、すなわち凍結乱流状態の出現が報告されている。のちに Nazarenko (2006)[13] は、この現象に関連して、「凍結乱流状態の発生→エネルギーカスケードの消滅→高波数領域でのエネルギー散逸の消滅&低波数へのエネルギーの蓄積→場の非線形性の増大→エネルギーカスケードの復活→高波数へ向けての「なだれ的な」エネルギー流出→高波数におけるエネルギー散逸→場の非線形性の低下→凍結乱流状態の復活 (エネルギーカスケードの再消滅)」というサイクルが実現することを予言している。彼はこれを「砂山の挙動 (sandpile behaviour)」と呼んでいる。

また Connaughton ら (2001)[14] は、初期に低波数のある領域のみにエネルギーを与えた場合、振動数の共鳴条件に許容するミスマッチの大きさと、そのエネルギーを受け取ってアクティブになれる領域の広がり具合の関係を議論している。これは分散関係に基づく完全な kinematic な議論ではあるものの、凍結乱流現象に関連して示唆に富んだ知見を与えている。

<sup>1</sup>彼女はこの点について “This may well be the first time ever when Fermat’s Last Theorem has found its use in applied mathematics.” とコメントしている。

なお4波系については、TanakaとYokoyama(2004)[15]の研究がある。彼らは水面重力波の波動乱流場について、 $k$ 空間の離散化の程度を変えつつ多数の数値シミュレーションを行うことで、離散化の影響について検討している。その結果、 $k$ 空間の離散化をきわめて粗いものにしても、波動乱流理論と整合するスペクトル変化率が検出できることを報告している。

### 3 本研究の設定と結果

#### 3.1 動機・目的

Pushkarev & Zakharov[11]やPushkarev[12]の結果によると、離散化のために共鳴相互作用が完全に消滅するはずの表面張力波の波動乱流において、場の非線形性が弱い場合には確かに凍結乱流状態が実現するものの、場の非線形性がある程度強い場合には、エネルギーカスケードが復活している。非線形性の増大に伴うこのエネルギーカスケードの復活には、非線形性がもたらす振動数補正が何らかの形で関与しているであろうという考えが広く存在している。Connaughtonら(2001)[14]らの研究もそのような発想に基づくものである。しかし、振動数の非線形補正がどのようにして離散化の影響を帳消しにして、エネルギーカスケードを復活させることができるのか、その具体的なメカニズムについては、今だ詳細な研究はなされていないように思われる。本研究ではそのような状況をかながみ、まずは場の非線形性の程度を広い範囲で変えて、凍結乱流状態と通常の波動乱流状態の間の遷移が起こるさまを詳細に検討することで、凍結乱流の発生メカニズムについて新たな知見を得ようとするものである。

#### 3.2 対象とするモデル

上記の目的を達成するために我々が採用すべき系には以下の2つの要件が求められる。まず第1に、 $k$ 空間の離散化に伴って、3波共鳴相互作用が消滅するような系であること。これは線形分散関係として、表面張力と同じ $\omega = k^{3/2}$ を採用することで満足できる。次に第2の要件として、場の非線形性の程度を変えつつ多数の数値計算をする必要があるために、なるべく計算負荷が軽い必要がある。これについてはPushkarev & Zakharov[11]やPushkarev[12]が採用した表面張力波の基礎方程式をそのまま採用するのは適切ではない。ここで対象としているのは波動乱流全般に関する一般的な問題であり、現実に存在する特定の物理系に固執する必要は必ずしもない。そこでこれらの要件を満たすモデルとして、本研究では以下のハミルトン系を採用する。

$$H = H_2 + H_3 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2 + (2\pi) \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} V_{012} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} + \text{c.c.}) \delta_{0-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}}, \quad (23)$$

$$\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = -i \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} = -i \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{i}{2} (2\pi) \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \left( V_{012} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta_{0-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} + 2V_{102} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* \delta_{0-\mathbf{k}_1+2}^{\mathbf{k}} \right), \quad (24)$$

$$\omega = k^{3/2}, \quad V_{012} = (k_0 k_1 k_2)^{3/4}. \quad (25)$$

非線形相互作用のカーネル $V_{012}$ の形は、非線形項がFFTを用いて高速に計算できる畳み込み和になるように、また $k$ に関するべき次数は表面張力波のものに類似するように選択した。

また計算条件などは以下のように設定した。初期条件として採用するスペクトルは

$$a(\mathbf{k}, 0) = A \exp \left[ -\frac{(k-2)^2}{4} \right], \quad (26)$$

ここで比例係数  $A$  は  $H_2$  の値に連動して決める。空間メッシュ数は  $k$  空間の離散化の程度の影響を見るために、 $n_x \times n_y = 2^8 \times 2^8 = 65,536$ 、および  $2^9 \times 2^9 = 262,144$  の2種類を採用する。対象とする波数空間は  $k_{\max} = [10, 10]$  の原点を中心とする正方形領域、 $k = (1, 0)$  に対応するモード番号  $k_p$  は  $k_p = [n_x/10/3] = 8$  or  $17$ 。時間発展を追跡する時間  $t_{\text{end}}$  は、ハミルトニアン  $H_2$  の値によらず、最終時刻における相対的なスペクトル変化量が同程度になるようにするために  $H_2 \times t_{\text{end}}$  を固定した。たとえば  $H_2 = 2 \times 10^{-7}$  に対しては  $t_{\text{end}} = 250T_p$ 、 $H_2 = 2 \times 10^{-8}$  に対しては  $t_{\text{end}} = 2500T_p$  など。ここで  $T_p$  は  $k = (1, 0)$  に対応する周期で、本研究の規格化では  $T_p = 2\pi$  である。数値計算にかかる所要時間は、 $n_x = n_y = 2^8$  の場合、DELL optiplex960 で1時刻ステップあたり約0.1秒。 $\Delta t = 1/100 T_p$  とするとき、 $2500T_p$  で約7時間程度である。

### 3.3 計算結果

図1は  $n_x \times n_y = 2^9 \times 2^9$ 、 $H_2 = 5 \times 10^{-8}$  のときの、 $t = 0, 500T_p, 1000T_p$  における1次元  $n(k)$  スペクトルを示す。最終時刻  $t = 1000T_p$  においても初期スペクトル形状からの大きな変動はなく、「線形時間スケールに比べてスペクトル変動の時間スケールが非常に長くあるべき」という波動乱流理論の基本的要請を十分満たす程度に非線形性が弱く保たれていることを確認することができる。なお図に示したケースの場合、2次のハミルトニアン  $H_2$  に対する3次のハミルトニアン  $H_3$  の比は、つねに  $3 \times 10^{-5}$  以下に保たれており、この意味においても弱乱流の仮定は十分に成立している。

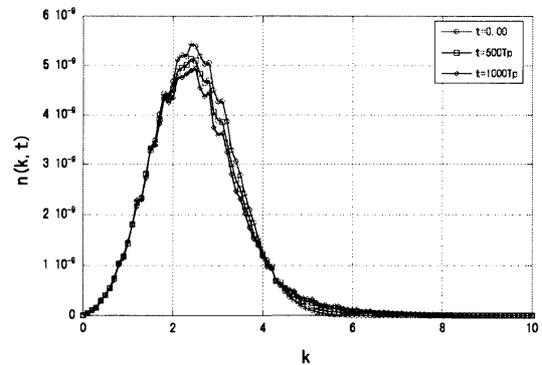


図1: 1次元スペクトル  $n(k)$  の時間変化

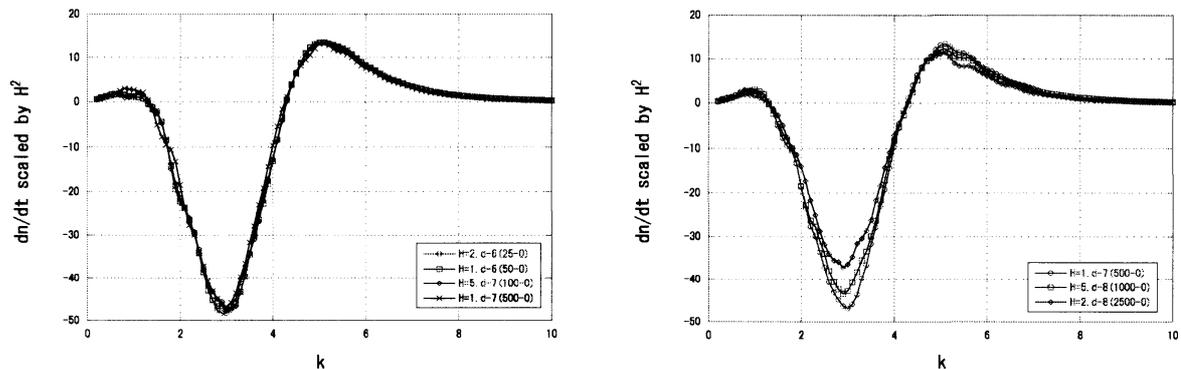


図2: スペクトル変化率  $\frac{dn(k)}{dt}$ . (左) $H$ が大きいとき、(右) $H$ が小さいとき。  $n_x = n_y = 2^9$ 。

図2は1次元スペクトル  $n(k)$  の時間変化率  $\frac{dn(k)}{dt}$  を  $k$  の関数としてプロットしたものである。波動乱流理論の予測によると、kinetic equation(19)が示すように、スペクトル変化率はスペクトルの2乗に比例する。したがって本研究のように対象とするスペクトル形状が相似である場合、スペクトル変化率は  $H^2$  でスケールされることが予想される。このため図2では  $\frac{dn(k)}{dt} / H^2$  を示しているが、左の比較的大きな  $H$  に対応するケースでは、異なる  $H_2$  に対して得られた結果がすべて

一つの曲線に重なることが確認できる。一方、比較的小さい  $H$  のグループの結果を示す右図では、 $H$  の減少に伴いエネルギー輸送が徐々に減少傾向にあることが見える。なおここには示さないが、この傾向は  $k$  空間の離散化の程度がより粗い  $n_x \times n_y = 2^8 \times 2^8$  の計算結果においてはより顕著に見ることができる。

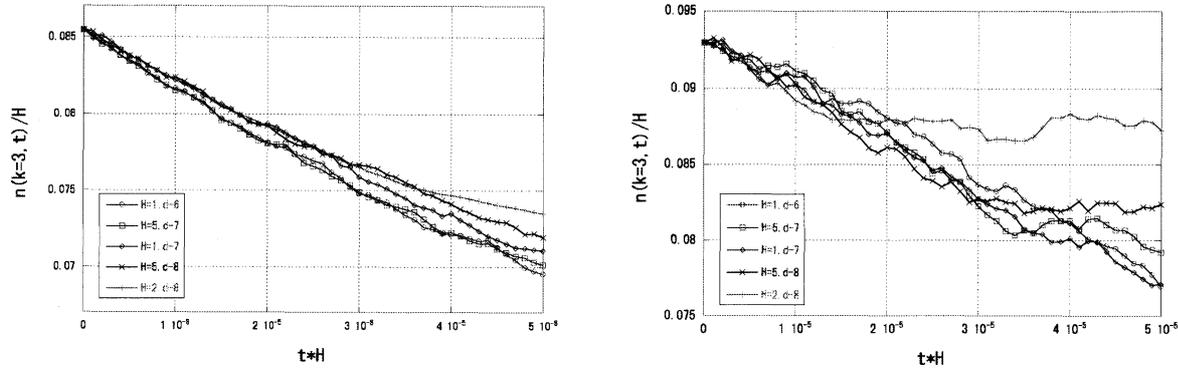


図 3:  $n(k=3)$  の時間変化. (左)  $n_x = n_y = 2^9$  の計算結果, (右)  $n_x = n_y = 2^8$  の計算結果.

図 3 は  $k = 3$  におけるスペクトル強度を時間の関数としてプロットしたものである。縦軸のスペクトル強度は  $H_2$  によって、横軸の時間は  $1/H_2$  によって、それぞれ規格化してある。左図は  $k$  空間におけるメッシュが細かい  $n_x = n_y = 2^9$  の計算結果、右図はメッシュが粗い  $n_x = n_y = 2^8$  の計算結果を示す。 $H_2$  の値は  $2 \times 10^{-8}$  から  $1 \times 10^{-6}$  の間の 5 種類で、両ケースとも共通している。メッシュの細かい方の計算結果はすべての結果がほぼ同一の直線に乗り、従来の波動乱流理論から想定される振舞いを示している。一方、右図に示すメッシュの粗い計算では、 $H_2$  の小さい値においてスペクトル強度の時間変動、したがってその原動力であるエネルギーカスケードが大きく阻害されている様子を認めることができる。

### 3.4 結論と今後の課題など

本研究では 3 波共鳴相互作用を許す分散関係を持つ、あるハミルトン系について、ハミルトニアン  $H$  (=非線形性の程度) およびスペクトル空間の離散化の程度を変えつつ数値シミュレーションを行った。その結果、 $H$  がある程度大きい間は、通常の波動乱流理論と整合するスペクトル変化率 (=エネルギー輸送) が実現することを確認した。また  $H$  の減少に伴い、スペクトル空間の離散化の影響が現れ、エネルギー輸送が阻害されることを確認した。併せて、スペクトル空間の離散化によるエネルギー輸送の阻害は、離散化の度合いのはげしいケースの方が顕著に現れることも確認することができた。

凍結乱流状態の出現 or 消滅には、振動数に対する非線形補正が大きな役割を果たしているであろうという漠然としたコンセンサスが広く存在する。各モードの振動数  $\omega(k)$  が線形振動数  $\omega_0(k)$  のまわりに非線形相互作用の影響によるゆらぎを持つとすると、共鳴条件は (9) ではなく

$$k = k_1 + k_2, \quad \omega_0(k) = \omega_0(k_1) + \omega_0(k_2) + \delta \quad (27)$$

のようになろう。ここで  $\delta$  は振動数の非線形補正を考慮した際に許容されるミスマッチを表す。この非線形補正とそれに伴う共鳴条件の緩和の程度は場の非線形性の程度、すなわちハミルトニアン  $H$  とともに増大するであろう。この効果が共鳴相互作用を消滅させる  $k$  空間の離散化の効果を

上回れば、共鳴相互作用が、したがってエネルギーカスケードが復活するであろうといった漠然とした考え方である。そこで各モードの複素振幅  $a(k, t)$  に対して実質的な振動数を算出した。各モードの複素振幅  $a(k, t)$  は不規則な時間変動を示し、それに対して合理的に振動数を算出することは原理的な困難もあるが、ここでは各モードの  $a(k)$  の位相部分の時間変化率

$$\Omega := -\text{Im} \left( \frac{da}{dt} / a \right) \quad (28)$$

で実質的な振動数  $\Omega$  を評価した。そして、ほぼ同一の  $k$  に対応する  $a(k)$  について、さまざまな時刻において算出した多数の  $\Omega$  のサンプルからその標準偏差  $\sigma_{\text{freq}}$  を算出した。

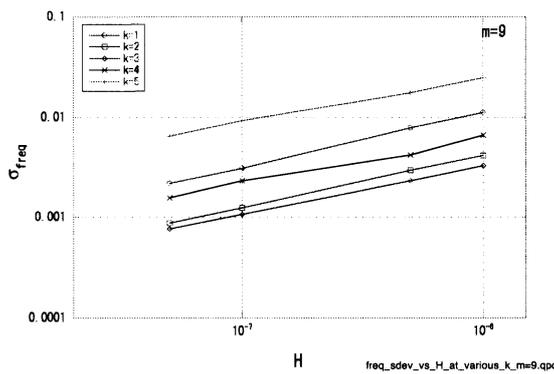


図 4: 振動数のゆらぎ幅とハミルトニアン  $H$  の関係

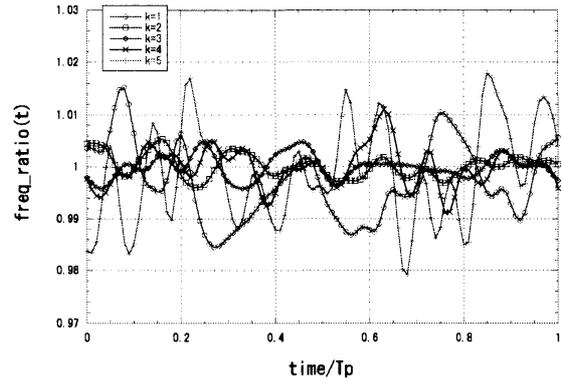


図 5: ある波動モードの振動数の時間変動の一例

図 4 はそのようにして得られた  $\sigma_{\text{freq}}$  を  $H$  の関数として両対数プロットしたものである。どの波数  $k$  においても、振動数のゆらぎ幅  $\sigma_{\text{freq}}$  がほぼ  $\sqrt{H}$  に比例して単調に増大していることが分かる。

しかし、凍結乱流の発生 & 消滅に対するこの理解の仕方に関しては、細部をもう少し具体的に詰める必要があるように思われる。図 5 はいくつかの任意に選択した波動モードの実質振動数  $\Omega(k)$  の  $1T_p$  の間の時間変化を示したものである。縦軸は実質振動数  $\Omega(k)$  をそのモードの線形振動数  $\omega_0(k)$  で割った比を示している。図から見るように各モードの振動数のゆらぎは、線形振動数の周りに、線形スケールに匹敵する速い時間スケールで不規則に変動している。そもそも共鳴相互作用が非線形エネルギー輸送において卓越した役割を果たす理由は、波動乱流理論における kinetic equation(19) の導出過程が示すように、その相互作用の位相部分が時間的に定常で、長時間平均において消えないで残るからである。一方非線形性で各波数モードにもたらされる振動数のゆらぎは、図 5 に見られるように代表的周期と同程度の速い時間スケールで変動しており、たとえ非線形ゆらぎのおかげで運良く共鳴条件が成立することがあったとしても、それはほんの一瞬のことのように思われる。本当にそのようなゆらぎが、離散化によって失われた非線形輸送を復活させるという重大な役割を果たせるのであろうか。それとも単一モードの  $\Omega(k)$  を見れば確かに不規則な変動をしていますが、

$$k = k_1 + k_2 \quad (29)$$

を満たす 3 つのモードを一組として見れば、何らかの非線形引き込み現象のようなものが働いていて、3 者の位相関係は十分長時間一定に保たれているというようなことが起こっているのであろうか。現時点ではまだまだ研究途上の段階であり、今後さまざまな角度からの更なる検討が必要である。

## 参考文献

- [1] Zakharov, V.E., 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.)*, **2**, 190–194.
- [2] Krasitskii, V.P. 1994 On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.*, **272**, 1–20.
- [3] Phillips, O.M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, **9**, 193–217.
- [4] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G., 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.
- [5] Hasselmann, K., 1962 On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500.
- [6] Janssen, P., 2004 *The interaction of ocean waves and wind*. (Cambridge UP), Chap. 4.
- [7] Davidson, R.C., 1972 *Methods in nonlinear plasma theory* (Academic Press), Chap.13.
- [8] Tanaka, M., 2007 On the role of resonant interactions in the short-term evolution of deep-water ocean spectra. *Journal of Physical Oceanography* **37**, 1022–1036.
- [9] Tanaka, M. and Yokoyama, N., 2011 A numerical study on statistical characteristics of amplitude fluctuations in a wave turbulence, submitted to *Physica D*.
- [10] Kartashova, E., 1998 Wave resonances in systems with discrete spectra, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **182**, 95–129.
- [11] Pushkarev, A.N. and Zakharov, V.E., 1998 Turbulence of capillary waves – theory and numerical simulation, in *Nonlinear ocean waves*, W. Perrie (Ed.), 111–131.
- [12] Pushkarev, A.N., 1999 On the Kolomogorov and frozen turbulence in numerical simuation of capillary waves, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18**, 345–351.
- [13] Nazarenko, S., 2006 Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence. *J. Stat. Mech. Theor. Exp.*, L02002.
- [14] Connaughton, C., Nazarenko, S., Pushkarev, A., 2001 Discreteness and quairesonances in weak turbulence of capillary waves, *Phy. Rev. E* **63**, 046306 (4 pages).
- [15] Tanaka, M. and Yokoyama, N. 2004 Effects of discretization of the spectrum in water wave turbulence. *Fluid Dynamic Research* **34**, 199–216.