Title	和音に対するピアノ運指決定法 (最適化手法の深化と広がり)
Author(s)	若松, 万紗子; 松井, 知己
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1773: 87-95
Issue Date	2012-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/171711
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1773巻 2012年 87-95

和音に対するピアノ運指決定法

中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻
若松万紗子 松井 知己
Department of Information and System Engineering,
Graduate School of Science and Engineering, Chuo University
Masako Wakamatsu and Tomomi Matsui

1. はじめに

ピアノの上達には適切な指使いをすることが大切である．しかし，楽譜には全ての音に対して運指が記載されているわけではない．また，和音の場合は一度に引く音の数が増えるため，同じ音を弾くにしても弾き方が複数通りある．そのため，単音の場合よりも適切な指使いで弾くことはピアノ初心者にとって困難である．そこで本研究では，ピアノ初心者を対象とし，和音を含むピアノの楽譜データから弾きやすい運指を出力するシステムを構築することを目的とする．本研究では，和音に対するコストを設定し，コストに重み付けを行った上で，ダイクストラ法によって最短経路問題を解く方法を提案する．

2. 複旋律に対応した運指決定法

2.1. 運指最適化問題

以下では，与えられた楽譜データの各音を弾く指を求める問題を扱う．隣り合う2つの音間のコストの和が最小となる運指を最適な運指として求める．これを運指最適化問題として定式化すると，

入力：音の並び $s_1, s_2, \ldots, s_n$
出力：指番号の並び $f_1, f_2, \ldots, f_n$
最小化：$\sum_{p=1}^{n-1} c(s_p, s_{p+1}, f_p, f_{p+1})$

と書くことができる．ただし，コスト$c(s_p, s_{p+1}, f_p, f_{p+1})$は，音$s_p$を指番号$f_p$で弾き，次の音$s_{p+1}$を指番号$f_{p+1}$で弾くコストである．次に，運指最適化問題を最短経路問題として解く．音が単音の場合，運指は指の本数分存在するので5通り存在する．2和音の場合，5本の指から2本の指を選ぶことになるので ${}_5C_2=10$通りの指使いが存在する．同様にして，3和音の場合は10通り，4和音の場合は5通り，5和音の場合は1通りである．よって，合計31通りの運指が存在するので，$31 \times n$個のノードを使い，運指最適化問題を最短経路問題としてモデル化できる．最短経路問題はダイクストラ法を用いて効率的に解くことができる．

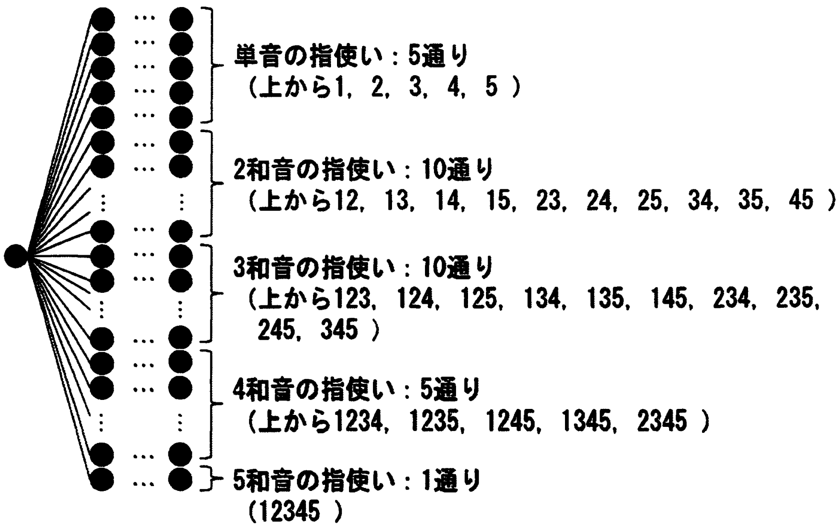

図 1: 和音に対応した運指決定法のグラフ構造

図 1 のグラフにおいて，各音に対応する運指は頂点集合である．枝は隣り合った 2 つの音の運指間をついないでおり，コスト値が与えられている．

3.　　コストの導入

3.1. 総和移動コスト

和音（単音）のひとつひとつの音に注目し，ある和音（単音）のそれぞれの音から，次のそれぞれの音に移動するコストの和を，和音（単音）から和音（単音）への移動に関してのコストとする．

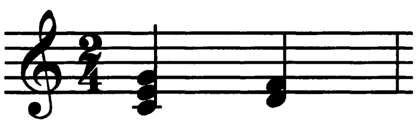

図 2: 総和移動コスト値　計算例の楽譜

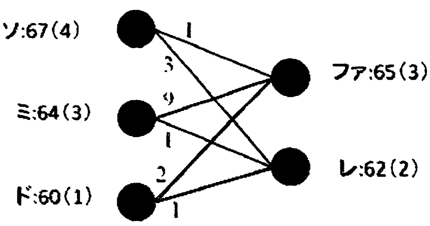

図 3: 総和移動コスト値　計算例

図 2 及び図 3 の総和移動コストは 1+3+9+1+2+1=17 である．

3.2. 和音コスト

ある和音をある指使いで弾くときのコストを和音コストとする.「一番低い音の指番号＋各音間のコスト＋一番低い音と一番高い音間のコスト」と定める. このように定める理由として,「一番低い音の指番号」については, 一番低い音には指番号の若い指を使った運指が弾きやすいためである.「各音間のコスト」及び「一番高い音と一番低い音間のコスト」については, 音が離れている場合は指も離れている指を使い, 音が近い場合は指も近い指を選ぶという考えからである. また, 指を広げても届かない運指が選ばれないようにするため上記式を定めた.

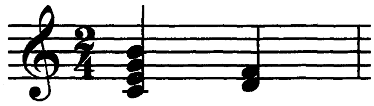

図 4: 和音コスト値　計算例の楽譜

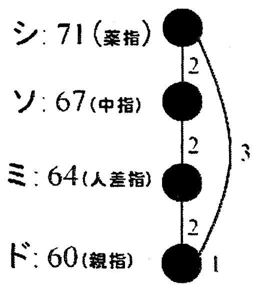

図 5: 和音コスト値　計算例

図 4 の 1 つ目の和音について述べる. この和音の和音コストは, 図 5 より, 1+2+2+2+3=10 である.

3.3. 平均移動コスト

ある和音単音のそれぞれの音から, 次の和音のそれぞれの音に伸びる枝の数の合計で総和移動コストを割った値を平均移動コストとする. 総和移動コストは和音数が大きいほど値が大きくなってしまい, 単音や和音数が少ない音の値との差が大きくなってしまう. 和音数が大きい場所だけが弾くことが容易な運指になり, 他の和音数が小さい場所が弾くことが困難な運指になってしまうのを避けるために平均移動コストを導入した.

図 6: 平均移動コスト値　計算例の楽譜

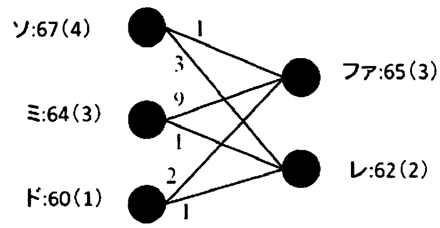

図 7: 平均移動コスト値　計算例

図 7 において，各音から伸びている枝の本数は 6 本である．総和移動コストは 1+3+9+1+2+1=17 であるので，上記図の平均移動コストは 17÷6=2 である．

3.4. 最大移動コスト

和音のそれぞれの音から，次の和音のそれぞれの音に移動するコストの中から最も大きい値を最大移動コストとする．コストが大きく弾くのが困難な運指に注目することにした．

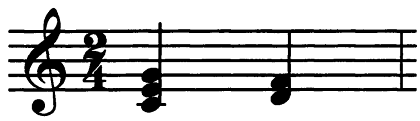

図 8: 最大移動コスト値　楽譜

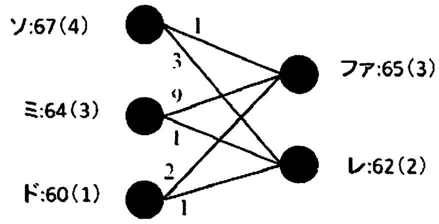

図 9: 最大移動コスト値

図 8 のような和音を弾くと考える．図 9 において，和音の各音から，次の各音に移動するコストの中で最大のものは 9 である．したがって，上記図の最大移動コストは 9 である．

3.5. 検証結果

検証では，楽譜に指番号が記載されている曲を用いて，楽譜に記載されている運指と，運指最適化問題を最短経路問題としてモデル化しダイクストラ法を用いて得られた運指を比較し，適合率を求めた．楽譜に記載されていない部分の運指は一致しているとして適合率を計算した．

表 1: 検証結果

曲目	総和移動コスト	和音コスト	平均移動コスト	最大移動コスト
美しきアメリカ	80%	82%	79%	75%
イ長調の前奏曲	80%	86%	82%	76%
アロハオエ	45%	45%	45%	45%
しずかな歌	96%	96%	100%	100%

「美しきアメリカ」と「イ長調の前奏曲」は和音コストを導入したときに高い適合率が得られた.「しずかな歌」に関しては，コストを設定し導入していくことで適合率を 100%までに上げることができた. しかし,「アロハオエ」は適合率は変化が無かった.

4. 規則の設定と重み付け

3 章の計算実験から曲によって適合率の差があることが判明した. そこで，本章では新たに規則を導入し，総和移動コスト，和音コスト，平均移動コスト，最大移動コストのそれぞれのコスト及び導入規則に重み付けをした総和を用いることにした.

4.1. 黒鍵

黒鍵を弾く場合はコストを増加させる. 黒鍵は白鍵に比べて，鍵盤の幅が狭く白鍵よりも高い位置にあることから指の移動が困難である. したがって，黒鍵は白鍵よりも弾きにくいと考え，コストを増加することとする.

4.2. 基本運指

和音を弾くときは，ある音に対して一定の運指を使う場合が多い. 例えば，ドミソを弾くときは，親指　中指　小指（1 3 5）で弾くことが多い. ある音に対して，一般的に用いられる運指を基本運指と呼ぶことにする. 基本運指でない場合はコストを増加することとする.

表 2: 基本運指

運指	和音
親指（1）中指（3）小指（5）	ドミソ，ドファラ，レファラ，レソシ，ミソシ，ミラド，ファラド，ファシレ，ソシレ，ソドミ，ラドミ，ラレファ，シレファ，シミソ
親指（1）人差指（2）小指（5）	ドミラ，レファシ，ミソド，ファラレ，ソシミ，ラドファ，シレソ

表 2 の左欄に記載されている運指は，右欄に記載されている和音を弾くときに一般的に使われる運指である．この表 2 にあげた運指を基本運指として取り上げる．取り上げた和音はいずれも黒鍵を含まないものとする．

4.3. 困難運指

弾くのが困難な運指はコストを増加させることとする．弾くのが困難な運指を困難運指と呼ぶことにする．以下に困難運指を挙げる．

- 2 和音の場合
  中指　薬指 (3 4)，薬指　小指 (4 5)
- 3 和音の場合
  人差指，中指　薬指 (2 3 4)，人差指　中指　小指 (2 3 5)，中指　薬指　小指 (3 4 5)
- 4 和音の場合
  人差指　中指　薬指　小指 (2 3 4 5)
- 5 和音の場合
  全ての指 (1 2 3 4 5)

4.4. 重み付け

指を広げても届かない運指が選ばれないように「和音コスト」に 5 の重みを置き，ある音に対して一般的に用いられる運指が選ばれるように「基本運指」に 15 の重みを置く．さらに，弾くのが困難な運指が選ばれないように「困難運指」に 10 の重みを置くこととした．すなわち，

トータルコスト=1×(総和移動コスト)+5×(和音コスト)+1×(平均移動コスト)
+1×(最大移動コスト)+1×(黒鍵)+15×(基本運指)+10×(困難運指)

とする．このトータルコストを用いて 3 章と同様に実験を行う．

4.5. トータルコストを用いた実験結果

トータルコストを用いて，ダイクストラ法により最短経路問題を解いた．以下の表がその結果である．

表 3: 重み付けの実験結果

曲目	適合率
美しきアメリカ	93%
イ長調の前奏曲	80%
アロハオエ	100%
しずかな歌	100%

「イ長調の前奏曲」は和音コストを導入した時とくらべると適合率が下がってしまったが，他の3曲については適合率をあげることができた．「アロハオエ」については，「しずかな歌」と同様に，適合率を100%までに上げることができた．

5. 逆最適化問題の定式化

重み付けをすることで適合率を上げることができた．しかしながら，4.4節で設定した重みが全ての曲において適切な重みであるとは限らない．そこで，演奏者が弾き慣れている運指や，楽譜の運指などを教師運指として用いて，重みのチューニングを行う必要がある．以下では，複数の曲に対しても楽譜に記載されている理想的な運指が出力されるように重みを定める問題を逆最適化問題として定式化する．

総和移動コスト，平均移動コスト，最大移動コスト，和音コスト，黒鍵，基本運指，困難運指の重みをそれぞれ$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$とする．運指$u,v$間の上記7つのコストをそれぞれ$f_1(u,v),f_2(u,v),\dots,f_7(u,v)$と表す．これらを用いて運指$u,v$間の距離を

$$w(u,v)=\alpha_1 f_1(u,v)+\alpha_2 f_2(u,v)+\cdots+\alpha_7 f_7(u,v)$$

と定める．以下で記述する逆最適化問題は，教師運指が得られているフレーズから生成される2章で定義されたグラフ$G=(V,A)$と，教師運指に対応するパスPに対し，Pが最短路となるように上記式の重み$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_7)$を定める問題である．本研究では以下のような逆最適化問題

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6+\beta_7\\
\text{s.t.}\quad & \pi(v)-\pi(u)\geq w(u,v)(\forall(u,v)\in A),\\
& \pi(v)-\pi(u)=w(u,v)(\forall(u,v)\in P),\\
& w(u,v)=\sum_{i=1}^{7}\alpha_i f_i(u,v)(\forall(u,v)\in A),\\
& 1-\beta_i\leq \alpha_i/\tilde{\alpha}_i\leq 1+\beta_i(i\in\{1,2,\dots,7\}),
\end{aligned}$$

を提案する．上記の問題の変数は$\pi(u),\pi(v),w(u,v),(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_7),(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_7)$であり，グラフとパスP及び重み推奨値$(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\dots,\tilde{\alpha}_7)$と値$f_i(u,v)$は問題の入力として与えられるデータである．逆最適化問題の目的関数は，求める重み$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_7)$が予め与えられた推奨値$(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\dots,\tilde{\alpha}_7)$と大きくずれないよう最小化している．

和音コスト，黒鍵，基本運指，困難運指の値$f_4(u,v),f_5(u,v),f_6(u,v),f_7(u,v)$は，正確には運指$u,v$間に定められるものではなく，和音コストと基本運指は運指vと和音によって，黒鍵は和音によって，困難運指は運指によってのみ定まる，運指間の性質ではなく，運指のものの良し悪しを表しており，教師運指に近い運指が最適解として選

ばれやすくする．本研究では以下の値を推奨値として用いた．

表 4　推奨値

$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_5$	$\tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_7$
1	1	1	5	1	15	10

6. 実験結果

計算実験を行うにあたり，使用したソフトウェアは数理システム: NUOPT12.1.0 を用いた．「美しきアメリカ」，「イ長調の前奏曲」，「アロハオエ」，「しずかな歌」の 4 曲について逆最適化問題を解いた．教師運指が比較的 1 つに定めることができる 1 フレーズを選んで実験を行った．

表 5 検証結果

	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_5$	$\tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_7$
美しきアメリカ	1	1	1	4	1	15	10
イ長調の前奏曲	1	1	1	1	1	15	10
アロハオエ	1	1	1	5	1	15	10
しずかな歌	1	1	1	5	1	15	10

実験を行った結果，「美しきアメリカ」の$\tilde{\alpha}_4$が 4 に，「イ長調の前奏曲」の$\tilde{\alpha}_4$が 1 となった．次に，上記表の逆最適化問題を解いて得られた重みを用いて，最短経路問題から得られた運指と教師運指との適合率を求めた．

表 6 教師運指との適合率

	美しきアメリカ	イ長調の前奏曲	アロハオエ	しずかな歌
美しきアメリカ (1,1,1,4,1,15,10)	94%	78%	100%	100%
イ長調の前奏曲 (1,1,1,1,1,15,10)	92%	86%	100%	100%
アロハオエ しずかな歌 (1,1,1,5,1,15,10)	93%	80%	100%	100%

表 6 の縦列の曲名下の数値は逆最適化問題を解いて得られた重みである．各曲で得られた重みを用いてそれぞれの曲に対して最短経路問題を解いた．そのときに出力された運指と教師運指との適合率が表 6 である．この表から，ある曲から得られた重みはその曲では有効で高い適合率が求めることができるが，他の曲に使え，高い適合率

を得ることができるとは限らないことがわかる.

7. まとめ

ピアノの運指は，演奏における曲の表情や，速さ，弾きやすさなど，曲によって異なる．曲が何を重視するかで運指が変わってくる．そのため，和音に対するコスト設定を導入し，最短経路問題としてダイクストラ法によって解いたが，全ての曲の適合率を上げることはできなかった．しかし，基本運指や困難運指といった和音を弾く際の規則を導入した実験では,8割以上の適合率を得ることができた.和音を弾く際の，複数の音を同時に弾くといった和音特有の性質を重視すべきであることがわかる.
今後の課題として，複数の曲に対して楽譜に記載された運指を出力する重みを求めることがあげられる．今回は短いフレーズに対して逆最適化問題を解いたが，1曲全てのフレーズに対して逆最適化問題を解くことが必要であると考えられる．さらに，複数の曲を繋げたものを1つの曲とみなして逆最適化問題を解くこともあげられる．また，重みの数を増やして最適値を絞ることで楽譜に記載されている教師運指を出力することが必要である．さらに，弾きやすさだけではなく，音の繋がりなどの演奏の表現方法も考慮した運指決定法を提案することが課題である.

8. 参考文献

[1] Melanie Hart，Robert Bosch，and Elbert Tsai，“Finding Optimal Piano Fingerings,” The UMAP Journal，**21** (2000)，pp. 167－177.
[2] 大沼茉莉子，“ピアノの運指決定法,” 2009年度卒業論文，中央大学理工学部情報工学科 2010年3月.
[3]釘本望美,“ピアノ演奏CG自動生成システムに関する研究,” 2007年度卒業論文，関西大学院大学理工学部情報科学科，2008年3月.
[4] 澤井賢一，黒木裕介，松井知己，“フルートの運指最適化と逆最適化を用いたパラメータチューニング,” オペレーションズ・リサーチ，**53** (2008)，pp. 39－46.