数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 63-77

可積分測地流を持つエルミート多様体のあるクラスについて

清原　一吉

岡山大学大学院自然科学研究科

Kazuyoshi Kiyohara[1]

Department of Mathematics, Okayama University

1 はじめに

この稿の目的は可積分測地流を持つエルミート多様体のあるクラス（Hermite-Liouville 多様体と呼ばれる）について、主に複素射影空間上の構成と同型問題について論ずることである。定理等の証明と詳細は別の論文に掲載する予定である。

Hermite-Liouville (H-L) 多様体は Liouville 多様体および Kähler-Liouville 多様体（K-L —）から派生した概念であるので、まずそれらについて簡単に触れよう。

Liouville 多様体は、荒くいえば、「Liouville 計量」（または「Liouville-Stäckel 型の計量」）を持つリーマン多様体のことである。そのような型の計量で最も簡単なものは次のような形をしている。

$$g = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} (f_k(x_k) - f_i(x_i))\, dx_i^2$$

ここで $(x_1, \ldots, x_n)$ は局所座標系、$f_i(x_i)$ は、$f_1(x_1) > \cdots > f_n(x_n)$ を満たす勝手な一変数関数である。一般に n 次元 Liouville 多様体の測地流は n 個の独立な、ファイバーごとに２次式である第一積分を持ち、それらにより、完全積分可能である。典型例は定曲率多様体とユークリッド空間の２次超曲面である。

Kähler-Liouville 多様体は Liouville 多様体のエルミート版で、その測地流が複素次元分 (n) だけの、ファイバーごとにエルミート形式であるような第一積分を持つ Kähler 多様体である。その主な性質は：

- その測地流は（一般に）完全積分可能。
- ある n 次元 Liouville 多様体を全実全測地的部分多様体として含む。

[1]e-mail: kiyohara@math.okayama-u.ac.jp

典型例としてはFubini-Study計量を持つ複素射影空間$\mathbb{CP}^n$がある。多くの（全部ではない）トーリック多様体はこのような構造を許容する。以上のことについては[3]を参照していただきたい。

ここで多様体のKähler条件について次の諸点に注意したい： K-L多様体の理論においてKähler条件は局所および大域的構造を決定する上で、非常に効果的に作用する；しかしながら、Kähler条件は先験的には測地流の可積分性とは何の関係もない；さらに、Eを測地流のハミルトニアン、F_iを第一積分とすると$E' = E + \sum_i \epsilon_i F_i$ （ϵ_i: 十分小）はあるエルミート計量に対応し、その測地流は完全積分可能であり、しかもそれは一般にKähler計量ではない。

それゆえ、K-L多様体と同じ定義を持つが、計量は必ずしもKählerでない場合を考察するのが自然になる。これがすなわち、Hermite-Liouville多様体である。

別の自然なH-L多様体の例が、Kähler計量のいわゆる「h射影同値」から現れる。1つの多様体上の2つのリーマン計量gと$\tilde{g}$が射影同値であるとはそれらの測地線がパラメタをのぞいて一致する場合をいう。つまり、両者のLevi-Civita接続がある1-form ϕを用いて

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X.$$

の関係を持つときをいう。Levi-Civitaは局所的にそのような計量を決定したが、それによると、最も非退化な場合にはLiouville計量の特別な場合になる。

後にMatveevとTopalovは射影同値な計量の大域的な理論を発展させた（[4]）が、それは座標によらない第一積分の構成、そのような計量のペアのヒエラルキー$(g, \tilde{g})$, $(g_A, \tilde{g}_A)$, $(g_{A^2}, \tilde{g}_{A^2})$, ... の構成を含む。

Topalovはまたその Kähler類似であるh-射影同値について考察した（[5]）。1つの複素多様体上の2つのKähler計量がh-射影同値であるとは、

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = a(t)\dot{\gamma}(t) + b(t)\, J\,\dot{\gamma}(t)$$

（$a(t)$, $b(t)$は任意の関数）を満たす曲線$\gamma(t)$のクラスが両者で一致する場合をいう。つまり、

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X - \phi(JX)JY - \phi(JY)JX.$$

が成立する場合である。ここでJは複素構造を表す。Topalovは第一積分を見いだし、ある非退化性の条件の下で、これらの多様体がKähler-Liouville多様体であることを証明した。

彼はまた実の場合と同様のヒエラルキー$(g, \tilde{g})$, $(g_A, \tilde{g}_A)$, ...を考察したが、この場合：g_A, $\tilde{g}_A$はHermitianだが、一般にはKählerではない；$(g_A, \tilde{g}_A)$は一般にh-射影同値では

なく、その変種である

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X + \phi(Q^{-1}X)QY + \phi(Q^{-1}Y)QX,$$

を満たすにすぎない。ここで、Q は歪対称な非退化 $(1,1)$-テンソルである。この場合、多様体は Hermite-Liouville 多様体であり、その測地流は依然として完全積分可能である。

H-L 多様体の 3 番目の例は次のようなものである。E_0 を次式で定義される、$\mathbb{C}^{n+1}$ 内のエルミート型楕円体

$$E_0 : \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{|z_i|^2}{a_i} = 1 \qquad (a_0 > \cdots > a_n > 0)$$

とし、

$$\rho : E_0 \left(\subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right) \to \mathbb{CP}^n$$

を自然な $U(1)$ 束とする。そのとき、ρ から決まる $\mathbb{CP}^n$ 上の自然な Hermite 計量（Kähler ではない）は H-L 多様体を定義し、その測地流は完全積分可能である。

この稿の目的は、まず $\mathbb{CP}^n$ 上に単純な素材（いくつかの円上の関数と円の間の微分同相写像）を用いて Hermite-Liouville 多様体をたくさん構成し、次に構成されたものの中でどれが互いに同型で、どれが Kähler になるか、を明らかにすることである。まず 2 節と 3 節で Liouville 多様体と K-L 多様体を復習し、4 節で h-射影同値を復習する。5 節で H-L 多様体を $\mathbb{CP}^n$ 上に構成し、最後の 6 節で上に説明した諸例についての対応を説明する。

2 Liouville 多様体

この節の内容については [3, Part 1] を参照されたい。

Liouville 多様体とは、リーマン多様体 (M, g), $\dim M = n$, と余接束 T^*M 上の関数のなす n 次元ベクトル空間 $\mathcal{F}$ の組であって、次の条件を満たすもののことである。

(1) 各 $F \in \mathcal{F}$ と $p \in M$ について、$F_p := F|_{T_p^*M}$ は 2 次形式である。

(2) 各 $p \in M$ について、F_p, $F \in \mathcal{F}$, は同時対角化可能。

(3) $\mathcal{F}$ は測地流のハミルトニアン E を含む。

(4) 任意の $F, H \in \mathcal{F}$ について、ポアソン積 $\{F, H\}$ は消える。

(5) ある $p \in M$ において、$\mathcal{F}_p := \{ F_p ; F \in \mathcal{F} \}$ は n 次元。

Liouville 多様体 $(M, g; \mathcal{F})$ は「ある $F \in \mathcal{F} - \{0\}$ と $p \in M$ に対して $F_p = 0$ ならば、ある $\xi \in T_p^*M$ において $dF_\xi \neq 0$」を満たすとき、proper であるといわれる。proper な Liouville 多様体に対して rank が定義される。

$$1 \leq \operatorname{rank}(M, g; \mathcal{F}) \leq \dim M\,.$$

次の諸項が知られている。

- 最大 rank (rank = $\dim M$) かつ M: compact ならば、M の適当な有限被覆はトーラスに微分同相。
- Rank one の Liouville 多様体は完全に分類されている。それらは S^n (type A) か、$\mathbb{RP}^n$ (type B) か、または $\mathbb{R}^n$ (type C, D) に微分同相である。

Rank one, type (B) の Liouville 多様体は、標準計量 dt^2 を持つある円 $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ ($l > 0$) と、その上の $n-1$ 個の関数の射影類 $[f_1(t)], \ldots, [f_{n-1}(t)]$ の組（type (B) の core と呼ばれる）を用いて分類される。それらは（適当な代表元 f_i に対して）次の性質を持つ。

1. 定数の組 $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-1} < l/2$ があって、$f_m(\pm\beta_m) = 0$; $f_m(t) > 0$ for $-\beta_m < t < \beta_m$; $f_m(t) < 0$ for $\beta_m < t < l - \beta_m$ を満たす。
2. $f'_m(\beta_m) < 0$.
3. $f_m(t) = f_m(-t)$ for any $t \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$.
4. $f_1(t) < \cdots < f_{n-1}(t)$ for any $t \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$.

この場合の「分類」は次の形に述べられる。

定理 Rank one, type (B) の proper な Liouville 多様体の同型類と type (B) の cores の同型類は 1 対 1 の対応がある。

ここで 2 つの Liouville 多様体の同型の定義は

$$(M, g; \mathcal{F}) \simeq (M', g'; \mathcal{F}')$$
$$\iff \exists\phi : (M, g) \underset{\rightarrow}{\simeq} (M', g') \quad \text{with} \quad \phi_* \mathcal{F} = \mathcal{F}'.$$

であり、2 つの type (B) の cores の同型の定義は

$$\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2 \iff \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \quad \text{or} \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1^r$$

で与えられる。ただし、

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1], \ldots, [f_{n-1}])$$

のとき、

$$\mathcal{C}^r = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1^r], \ldots, [f_{n-1}^r]),$$

は、

$$f_i^r(t) = -f_{n-i}(l/2 - t) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

で与えられる。

Type (B) の core から type (B) の proper な Liouville 多様体は次のように構成される。$\beta_0 = 0$, $\beta_n = l/2$ とおき、正数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を

$$\int_{\beta_{i-1}}^{\beta_i} \frac{dt}{\sqrt{(-1)^{i-1} f_1(t) \ldots f_{n-1}(t)}} = \frac{\alpha_i}{4}$$

で定義する。C^∞ 写像

$$\mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z} \to \begin{cases} [\beta_{i-1}, \beta_i] & (2 \le i \le n-1) \\ [-\beta_1, \beta_1] & (i = 1) \\ [\beta_{n-1}, l - \beta_{n-1}] & (i = n) \end{cases}$$

$(w_i \mapsto t)$ を

$$\left(\frac{dt}{dw_i}\right)^2 = (-1)^{i-1} f_1(t) \ldots f_{n-1}(t),$$
$$t(0) = \beta_i, \quad t(\alpha_i/4) = \beta_{i-1}.$$

で定義する。

トーラス

$$R = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z}) = \{(w_1, \ldots, w_n)\},$$

を作り、その上の involutions σ_i $(1 \le i \le n-1)$ と τ を

$$\sigma_i(x) = (w_1, \ldots, w_{i-1}, -w_i, \frac{\alpha_{i+1}}{2} - w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n),$$
$$\tau(x) = (w_1 + \frac{\alpha_1}{2}, -w_2, \ldots, -w_n).$$

で定める。それらの生成する R の変換群 G は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ に同型であり、商空間 $N = R/G$ は自然な可微分構造によって実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ に微分同相になる。

関数 $f_{ik} \in C^\infty(\mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z})$ を

$$f_{ik}(w_i) = f_k(t(w_i)), \qquad 1 \le k \le n-1,\ 1 \le i \le n,$$

で定め、行列値関数 $[b_{ij}(w_i)]_{1 \le i,j \le n}$ を

$$b_{ij} = b_{ij}(w_i) = \begin{cases} (-1)^i \prod_{k \ne j} f_{ik}(w_i) & (1 \le j \le n-1), \\ (-1)^{i+1} \prod_k f_{ik}(w_i) & (j = n). \end{cases}$$

で定める。この時、

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(w_i) F_j = (\partial/\partial w_i)^2, \qquad 1 \le i \le n,$$

によって、N 上の対称2次テンソル場 $F_1, \ldots, F_n$ が矛盾なく定まる。また、F_n は各点で正定値になっている。従って、

$$\mathcal{F} = \mathrm{Span}\{F_1, \ldots, F_n\},$$

と置くことにより、そのエネルギー関数（測地流のハミルトニアン）が $F_n/2$ であるような Liouville 多様体 $(N, g; \mathcal{F})$ が得られる。これが求めるものである。

例： (1) 定曲率1の $\mathbb{RP}^n$ に対応する core は

$$l = \pi, \quad f_i(t) = (\cos t)^2 - c_i \quad (1 \le i \le n-1)$$

で与えられる。ただし、$1 > c_1 > \cdots > c_{n-1} > 0$ は勝手な定数。

(2) E を楕円体 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \quad (a_0 > \cdots > a_n > 0)$ とすると、その射影化 $E/\{\pm\mathrm{identity}\}$ に対応する core は

$$l = \frac{1}{2} \times \text{ the length of the ellipse } \frac{x_0^2}{a_0} + \frac{x_n^2}{a_n} = 1,$$
$$f_i(t) = (\cos s(t))^2 - \frac{a_i - a_n}{a_0 - a_n} \qquad (1 \le i \le n-1),$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_0(\cos s)^2 + a_n(\sin s)^2}}$$

で与えられる。

3 Kähler-Liouville多様体

この節の内容については [3, Part 2] を参照されたい。

Kähler-Liouville 多様体とは、Kähler 多様体 (M, g), $\dim_{\mathbb{C}} M = n$、と T^*M 上の関数からなる n 次元実ベクトル空間 $\mathcal{F}$ の組で次の性質を満たすもののことである。

(1) 各 $F \in \mathcal{F}$ と $p \in M$ に対し $F_p := F|_{T_p^*M}$ はエルミート形式である。

(2) F_p, $F \in \mathcal{F}$, は同時対角化可能。

(3) $\mathcal{F}$ は測地流のハミルトニアン E を含む。

(4) すべての $F, H \in \mathcal{F}$ についてポアソン積 $\{F, H\}$ は消える。

(5) $\mathcal{F}_p := \{\ F_p\,; F \in \mathcal{F}\ \}$ はある点 $p \in M$ で n 次元。

適当な非退化性条件（proper, type (A)）の下で、次の諸結果を得る。

- (M, g) の無限小同型からなる n 次元可換リー環 $\mathcal{Y}$ で任意の $Y \in \mathcal{Y}$ と $F \in \mathcal{F}$ に対し, $\{Y, F\} = 0$ を満たすものがある。特に $\mathcal{Y}$ と $\mathcal{F}$ により、(M, g) の測地流は完全積分可能になる。

- Mcompactなら、$\mathcal{Y}$はM上にn次元トーラスの作用を導き、それにより、Mはトーリック多様体になる。

実の場合と同様、rankの概念が定義されるが、

- Mがcompactで、$(M,g;\mathcal{F})$のrankが1ならば、Mはトーリック多様体として$\mathbb{CP}^n$に同型。

- Mがcompactの時、$(M,g;\mathcal{F})$の「実部」を取ることにより、同じrankのLiouville多様体を得る。

Compactでrank oneの場合、その実部はrank one, type (B)のLiouville多様体であり、対応するtype (B)のcoreは次の形をしている。

$$(\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [v(t)-c_1], \ldots, [v(t)-c_{n-1}]) .$$

ここで$1 > c_1 > \cdots > c_{n-1} > 0$は定数であり、$v(t) \in C^\infty(\mathbb{R}/l\mathbb{Z})$は次の条件を満たしている。

(1) $v(-t) = v(t)$.

(2) $v(0) = 1$, $v(l/2) = 0$.

(3) $v'(t) < 0$ if $0 < t < l/2$.

(4) $-v''(0) = v''(l/2) = c_*$.

(5) $v'(\beta_i) = -\sqrt{2c_* c_i(1-c_i)}$, where $\beta_i = v^{-1}(c_i) \in (0, l/2)$, $1 \le i \le n-1$.

このようなcoreを “special kind” と呼ぶことにする。

この時の分類問題は次のように解かれる。

定理　Rank oneのKähler-Liouville多様体の同型類とspecial kindのtype (B)のcoresの同型類には1対1の対応がある。

この場合、

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [v(t)-c_1], \ldots, [v(t)-c_{n-1}]\},$$

に対して

$$\mathcal{C}^r = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [v^r(t)-c_1^r], \ldots, [v^r(t)-c_{n-1}^r]\},$$

ただし、

$$v^r(t) = 1 - v(l/2 - t), \qquad c_i^r = 1 - c_{n-i}$$

となっていることに注意する。

ここで、special kind の core からどのように K-L manifold を構成するかを述べよう。

1. まず対応する Liouville 多様体 $(N, g; \mathcal{F})$ を前節のように作る。

2. N 上のベクトル場 $X_0, \ldots, X_n$ を

$$X_i = \frac{\mathrm{grad}\ \left(\prod_k (v_k - c_i)\right)}{c_* \prod_{\substack{0 \le m \le n \\ m \ne i}} (c_m - c_i)}, \qquad 0 \le i \le n, \quad c_0 = 1,\, c_n = 0,$$

 で定義する。ただし、$v_k(w_k) = v(t(w_k))$。それらは

$$[X_i, X_j] = 0 \quad (\forall i, j) \quad \text{および} \quad \sum_{i=0}^{n} X_i = 0.$$

 を満たしている。

3. $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n = \{[u_0, \ldots, u_n]\}$ を自然な射影とする。このとき、微分同相写像 $\phi : N \to \mathbb{RP}^n$ で

$$\phi_*(X_i) = \pi_* \left(u_i(\partial/\partial u_i)\right), \qquad 0 \le i \le n.$$

 を満たすものが存在する。

4. 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ で、斉次座標 $[u_0, \ldots, u_n]$ を持ち、上の $\mathbb{RP}^n$ を実部として含むものを考える。トーラス $U(1)^n = U(1)^{n+1}/U(1)$ が $\mathbb{CP}^n$ に自然に作用している：

$$((\lambda_0, \ldots, \lambda_n), [u_0, \ldots, u_n]) \mapsto [\lambda_0 u_0, \ldots, \lambda_n u_n], \quad |\lambda_i| = 1.$$

5. この時、ベクトル場 X_i はトーラス作用で不変になるように自然に $\mathbb{CP}^n$ 上に拡張される。明らかに、$Y_i = JX_i$ $(0 \le i \le n)$ はそのトーラス作用を生成する。

6. また、各 $F \in \mathcal{F}$ もトーラス作用で不変なエルミート形式となるように $\mathbb{CP}^n$ 上に自然に拡張される。

7. 同様に拡張された計量 g は Kähler 計量であり、Kähler-Liouville 多様体 $(\mathbb{CP}^n, g; \mathcal{F})$ を得る。

例 $l = \pi$, $v(t) = (\cos t)^2$ $(1 > c_1 > \cdots > c_{n-1} > 0$ は勝手)、に対しては、Fubini-Study 計量を持つ $\mathbb{CP}^n$ が対応する。

4 Kähler計量のh-射影同値

この節の内容については、[2] を参照されたい。

g と $\tilde{g}$ を M 上の射影同値なリーマン計量とする；

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X.$$

$(1,1)$ 型テンソル A を $\tilde{g}(\cdot,\cdot) = \det(A)^{-1} g(A^{-1}\cdot,\cdot)$ で定義する。すると、

- $K_c(\dot{\gamma}(t)) := \det(A - cI)\, g((A-cI)^{-1}\,\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$ は任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して、(M,g) の各測地線 $\gamma(t)$ 上定数である。

従って、適当な非退化性条件の下で (M,g) は Liouville 多様体になり、$(M,\tilde{g})$ も同様である。また、

- $g_A(\cdot,\cdot) := g(A\cdot,\cdot)$ と置くことにより、２つの計量 $(g_A, \tilde{g}_A)$ は再び射影同値になる。

そのようにして、射影同値な計量の pairs のヒエラルキー $(g,\tilde{g})$, $(g_A,\tilde{g}_A)$, $(g_{A^2},\tilde{g}_{A^2})$, $\ldots$, (またはより一般に適当な解析関数 $u(t)$ を使って、 $(g_{u(A)},\tilde{g}_{u(A)})$) が得られる。

さて、g と $\tilde{g}$ をある複素多様体 M 上の h-射影同値な Kähler 計量としよう；

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X - \phi(JX)JY - \phi(JY)JX.$$

A を $\tilde{g}(\cdot,\cdot) = \det(A)^{-1/2} g(A^{-1}\cdot,\cdot)$ で定義される $(1,1)$ 型テンソル場とする。すると次のことが判る。

- $AJ = JA.$
- $K_c(\dot{\gamma}(t)) := \det(A - cI)^{1/2}\, g\left((A-cI)^{-1}\,\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)$ は任意の $c \in \mathbb{R}$ について (M,g) の各測地線 $\gamma(t)$ 上で定数。

$\mathcal{F} = \mathrm{Span}\,\{K_c^* \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ と置く。ただし、 K_c^* は K_c を計量を用いて T^*M 上の関数と見なしたものである。

$h_1 \geq \cdots \geq h_n$ を A の（$\mathbb{C}$-線形準同型と見た時の）固有関数とする。我々は A に次の非退化性条件を課す。

$$\text{ある点}\, p \in M \,\text{において}\; h_1(p) > \cdots > h_n(p) \quad \text{かつ} \quad dh_i \neq 0 \; (\forall i) \quad .$$

このとき、さらに M が compact ならば、次の定理を得る。

定理 (K.-Topalov). $(M,g;\mathcal{F})$ は rank one の Kähler-Liouville 多様体である。特に M は $\mathbb{CP}^n$ に双正則であり、(M,g) の測地流は完全積分可能である。逆に、勝手な rank one の K-L manifold に対して、別の K-L 多様体 $(M,\tilde{g};\tilde{\mathcal{F}})$ があって、g と $\tilde{g}$ は h-射影同値となる。

次に h-射影同値のとき、対応する cores はどのような関係にあるかを述べる。

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z};\ [h(t)-c_1],\dots,[h(t)-c_{n-1}])$$

を $(M,g;\mathcal{F})$ の core とするとき、 h-射影同値な $(M,\tilde{g};\tilde{\mathcal{F}})$ の core は

$$\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z};\ [\tilde{h}(\tilde{t})-\tilde{c}_1],\dots,[\tilde{h}(\tilde{t})-\tilde{c}_{n-1}]),$$

で与えられる。ただし、$a>0,\gamma>0$ は勝手な定数で、

$$\tilde{h}(\tilde{t}(t)) = \frac{a\,h(t)}{(a-1)\,h(t)+1},\quad \tilde{c}_i = \frac{a\,c_i}{(a-1)\,c_i+1}$$
$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\sqrt{a\gamma}}{(a-1)\,h(t)+1},\quad \tilde{l} = \int_0^l \frac{\sqrt{a\gamma}}{(a-1)\,h(t)+1}\,dt,$$

または、$h(t)$ と c_i を各々 $h^r(t)$ と c_i^r で置き換えた式のいずれかで与えられる。この場合、2つの cores $\mathcal{C}$ と $\tilde{\mathcal{C}}$ は互いに h-射影同値と呼ばれ、$\phi:\mathbb{R}/l\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$ $(t\mapsto\tilde{t})$ は h-射影同値を与える写像と呼ばれる。写像 ϕ は正則同型

$$\Phi: M \to \tilde{M}$$

を定義し、M 上の2つの計量 g と $\Phi^*\tilde{g}$ は h-射影同値となる。

5　$\mathbb{CP}^n$ 上定義される Hermite-Liouville 多様体

Hermite-Liouville 多様体の定義は、計量が必ずしも Kähler ではなく、単に Hermitian であるということを除いて、K-L 多様体のそれと全く同じである。この節ではまず1つの H-L 多様体を2つの type (B) の cores、 1つは general kind、もう1つは special kind、

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z};[f_1(t)],\dots,[f_{n-1}(t)]),$$
$$\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z};[h(s)-c_1],\dots,[h(s)-c_{n-1}]),$$

と、 1つの微分同相写像

$$\phi:\mathbb{R}/l\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}\quad(t\mapsto s)$$

で、$ds/dt > 0$ かつ

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(-t) = -\phi(t), \quad \phi(\beta_i) = \tilde{\beta}_i,$$

を満たすものから構成する。ここで、$0 < \beta_i < l/2$ と $0 < \tilde{\beta}_i < \tilde{l}/2$ は $f_i(\beta_i) = 0$ と $h(\tilde{\beta}_i) = c_i$ によって各々定義されたものである。

構成された H-L 多様体 $(M, g; \tilde{\mathcal{F}})$ は次のような性質を持っている。

- M は $\mathbb{CP}^n$ に双正則。
- (M, g) は無限小同型のなす n 次元可換リー環 $\mathcal{Y}$ で、任意の $Y \in \mathcal{Y}$ と $F \in \tilde{\mathcal{F}}$ に対し, $\{Y, F\} = 0$ を満たすものを許容する。特に、(M, g) の測地流は第一積分の空間 $\mathcal{Y}$ と $\tilde{\mathcal{F}}$ により、完全積分可能である。

注 ϕ =Identity の場合は Igarashi-Kiyohara [1] により得られている。

構成は次のように行われる。

1. まず、general kind の core から Liouville 多様体 $(N, g; \mathcal{F})$ を構成する。

$$N = R/\sim, \quad R = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z}, \quad \text{etc..}$$

2. 次に、同様に Liouville 多様体 $(\tilde{N}, \tilde{g}, \mathcal{H})$ を special kind の core から構成し、それを K-L 多様体の構成の手順に沿って、$\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$ と同一視する。

$$\tilde{N} \underset{\rightarrow}{\simeq} \mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n.$$

3. 微分同相 $\phi : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$ は微分同相

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}/\tilde{\alpha}_i\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\beta_{i-1}, \beta_i] & \xrightarrow{\phi} & [\tilde{\beta}_{i-1}, \tilde{\beta}_i] \end{array}$$

と、それゆえ微分同相

$$R \underset{\rightarrow}{\simeq} \tilde{R}, \qquad \Phi : N \underset{\rightarrow}{\simeq} \tilde{N}.$$

を導く。

4. $(\tilde{N}, \tilde{g}, \mathcal{H})$ を「複素化」する代わりに、$\Phi_*(N, g; \mathcal{F})$ を

$$N \underset{\rightarrow}{\simeq} \tilde{N} \underset{\rightarrow}{\simeq} \mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$$

を使って複素化する。

この時、我々は次の定理を得る。

定理 構成されたH-L多様体がKählerになるのはcore $\mathcal{C}$もまたspecial kindで、2つのcores $\mathcal{C}$と$\tilde{\mathcal{C}}$が$\phi:\mathbb{R}/l\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$により$h$-射影同値になる場合に限る。この場合、このH-L多様体はcore $\mathcal{C}$から構成されたK-L多様体と同型になる

さて2つの3つ組 $(k=1,2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_k &= (\mathbb{R}/l_{(k)}\mathbb{Z};[f_{(k)1}(t)],\ldots,[f_{(k)n-1}(t)]),\\
\tilde{\mathcal{C}}_k &= (\mathbb{R}/\tilde{l}_{(k)}\mathbb{Z};[h_{(k)}(s)-c_1],\ldots,[h_{(k)}(s)-c_{n-1}]),\\
\phi_k &: \mathbb{R}/l_{(k)}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\tilde{l}_{(k)}\mathbb{Z}\quad (t\mapsto s)
\end{aligned}$$

を考えよう。対応するH-L多様体を$(M_k,g_k;\mathcal{F}_k)$ $(k=1,2)$とする。この時、次の定理を得る。

定理 H-L多様体$(M_k,g_k;\mathcal{F}_k)$ $(k=1,2)$が互いに同型であるのは次の3つが成立する場合に限られる。

(1) $\mathcal{C}_1$と$\mathcal{C}_2$は互いに同型。

(2) $\tilde{\mathcal{C}}_1$と$\tilde{\mathcal{C}}_2$は微分同相$\phi:\mathbb{R}/\tilde{l}_{(1)}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\tilde{l}_{(2)}\mathbb{Z}$により、$h$-射影同値。

(3) $\phi_2=\phi\circ\phi_1$または$\phi_2\circ r=\phi\circ\phi_1$

ここで、$r:\mathbb{R}/l_{(1)}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/l_{(2)}\mathbb{Z}$ $(l_{(1)}=l_{(2)}=l)$は$r(t)=l/2-t$で与えられる。

つまり、3つ組$(\mathcal{C},\tilde{\mathcal{C}},\phi)$はmodulo h-射影同値でほぼ忠実なパラメタ付けを与えていることになる。

6 3つの例

例 1. もしgと$\tilde{g}$がM上のh-射影同値なKähler計量ならば、(M,g_A)と$(M,\tilde{g}_A)$の測地流は共に完全積分可能である。しかしながら：

- Hermite計量g_Aと$\tilde{g}_A$は一般にはもはやKähler計量ではない。
- g_Aと$\tilde{g}_A$のLevi-Civita接続はh-射影同値の変種を満たすに過ぎない。つまり、

$$\tilde{\nabla}_XY-\nabla_XY=\phi(X)Y+\phi(Y)X+\phi(Q^{-1}X)QY+\phi(Q^{-1}Y)QX,$$

  QはMのある非退化な$(1,1)$型テンソル場である。

定理 (K.-Topalov [2])　g と $\tilde{g}$ を複素多様体 M ($\dim_{\mathbb{C}} M = n$) 上の２つの Hermitian 計量とする。それらがある非退化な $(1,1)$ 型テンソル場 Q に対して h-射影同値の変種を満たし、また、先に述べた非退化性条件をある開集合 U 上で満たしているとすると、

(1) $(M, g; \mathcal{F})$ は U 上で Hermite-Liouville 多様体である。($\mathcal{F}$ は前と同様に定義される。)

(2) (U, g) の無限小同型からなる n 次元可換リー環 $\mathcal{Y}$ があって、$\mathcal{Y}$ と $\mathcal{F}$ の各元は U 上ポアソン積で可換である。特に (M, g) の測地流は U 上で完全積分可能である。

定理　構成された H-L 多様体が h-射影同値の変種に現れる H-L 多様体に同型であるのは、対応する３つ組が

$$(\psi^*\mathcal{C}, \mathcal{C}, \psi)$$

の形をしている場合に限る。ここで、$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [h(t) - c_1], \ldots, [h(t) - c_{n-1}])$ は勝手な special kind の core であり、$l' > 0$ は任意で、$\psi : \mathbb{R}/l'\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ は $\psi(0) = 0, \psi(-t) = -\psi(t)$ を満たす任意の微分同相であり、

$$\psi^*\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l'\mathbb{Z}; [\psi^*h(t) - c_1], \ldots, [\psi^*h(t) - c_{n-1}]).$$

である。

より詳しくいうと、h-射影同値 $\phi : \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$ に対して、$\tilde{l}' > 0$ と微分同相 $\tilde{\psi} : \mathbb{R}/\tilde{l}'\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$ および $\phi' : \mathbb{R}/l'\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\tilde{l}'\mathbb{Z}$ があって、次の図式を可換にしていて、

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}/l\mathbb{Z}\ (\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}\ (\tilde{\mathcal{C}}) \\
{\scriptstyle\psi}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\tilde{\psi}} \\
\mathbb{R}/l'\mathbb{Z}\ (\psi^*\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi'} & \mathbb{R}/\tilde{l}'\mathbb{Z}\ (\tilde{\psi}^*\tilde{\mathcal{C}})
\end{array}$$

(ϕ', ϕ) が h-射影同値の変種を導いている。

例 2. $(M, g; \mathcal{H})$ を rank one の K-L 多様体とし、対応する core を

$$\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [h(t) - c_1], \ldots, [h(t) - c_{n-1}])$$

とする。$H_1, \ldots, H_n = 2E$ を $\mathcal{H}$ の適当な基底とする。このとき、

$$2E' = 2E + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i H_i \qquad (|\epsilon_i| \text{ 十分小})$$

は依然として各ファイバー上正定値であり、対応するリーマン計量 g' は H-L 多様体 $(M, g'; \mathcal{H})$ を定義する。それに対応する３つ組は $(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}, \mathrm{Identity})$ の形をしている。ただし、$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1(t)], \ldots, [f_n$ は

$$f_i(t) = \frac{h(t) - c_i}{1 + \epsilon_i(h(t) - c_i)}, \quad (1 \leq \imath \leq n-1)$$

で与えられる。

例 3. E_0 を

$$E_0: \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{|z_i|^2}{a_i} = 1 \qquad (a_0 > \cdots > a_n > 0)$$

で定義される $\mathbb{C}^{n+1}$ 内のエルミート型楕円体で、

$$\rho : E_0 \ (\subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \ \to \mathbb{CP}^n$$

を自然な $U(1)$ 束とする。 ρ は自然に $\mathbb{CP}^n$ 上の Hermite 計量を導き、それにより $\mathbb{CP}^n$ は H-L 多様体となる。対応する 3 つ組 $(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}, \phi)$ は：

- $\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}; [\cos^2 t - c_1], \dots, [\cos^2 t - c_{n-1}])$、つまり、Fubini-Study 計量を持つ $\mathbb{CP}^n$ の core である。ただし、$c_i = \dfrac{a_i - a_n}{a_0 - a_n}$ $(1 \le i \le n-1)$ 。
- $\phi : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \quad (t \mapsto s)$ は
$$\phi(0) = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_0 \cos^2 s + a_n \sin^2 s}},$$
で与えられ、l は楕円 $x_0^2/a_0 + x_n^2/a_n = 1$ の長さの半分である。
- $\mathcal{C} = \phi^* \tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [\cos^2 s(t) - c_1], \dots, [\cos^2 s(t) - c_{n-1}])$ 。これは（実）楕円体
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^{n+1}$$
の core と同じである。
- 従って、この 3 つ組は $(\phi^* \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}}, \phi)$ の形をしており、h-射影同値の変種に現れる H-L 多様体のそれに等しいが、この場合に付随する K-L 多様体間の h-射影同値を与える写像は、Fubini-Study 計量を持つ $\mathbb{CP}^n$ 間の、等長的でない複素射影変換である。

参考文献

[1] M. Igarashi, K.Kiyohara, *On Hermite-Liouville manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010), 895–933

[2] K. Kiyohara, P. Topalov, *On Liouville integrability of h-projectively equivalent Kähler metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 231–242.

[3] K. Kiyohara, *Two classes of riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable*, Mem. Amer. Math. Soc., **130** (1997), no. 619.

[4] V. Matveev and P. Topalov, *Trajectory equivalence and corresponding integrals*, Regular and Chaotic Dynamics **3**, 1998, 30-45.

[5] P. Topalov, *Geodesic compatibility and integrability of geodesic flows*, J. Math. Phys., **44** (2003), no. 2, 913-929.