数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 18-20

結晶格子上の排他過程に対する流体力学的極限

田中亮吉
京都大学
Ryokichi Tanaka[1]
Department of Mathematics, Kyoto Univeisity

1 序

結晶格子とは, 有限グラフの被覆グラフであり, その被覆変換群が有限階数の自由アーベル群である無限グラフのことである. 例として, $\mathbb{Z}^d$ の標準的な格子 $(d\geq 1)$, 三角格子, 六角格子, 籠目格子と呼ばれているものがある. ここでの目的は, こうしたグラフの上で, 相互作用をする粒子系を考え, そのスケール極限を考察することである. 具体的には, 排他的な相互作用を持つミクロな離散モデルを考え, そのスケール極限として現れる系のマクロな挙動 (粒子の密度の時間発展) が, ある準線形偏微分方程式によって支配されることを見る. こうした問題は, 流体力学的極限の問題と呼ばれ, 種々のモデルに対して多くの研究がある. (例えば, [KOV]). ここでの問題意識の一つは, 下の空間がミクロに何かある幾何構造を持っていたときに, それが系のマクロな挙動にどのように影響を与えるか, ということである. 現段階で扱うのは結晶格子であり, この問題は, $\mathbb{Z}^d$ の場合の研究の拡張として得られるものである.

2 結晶格子の標準実現

$X=(V,E)$ を連結な有向グラフとする. また, ある辺 $e\in E$ について, その向きも入れ替えた辺 $\bar{e}\in E$ も E に入っているとする. ある $\mathbb{Z}^d(d\geq 1)$ が X に自由に作用しているとし, その商グラフ $X_0=(V_0,E_0)$ は有限グラフであるとする. このとき, X を結晶格子と呼ぶことにする.

結晶格子は "物理的" には, $\mathbb{R}^d$ の中で周期的に実現されていて, それが "平衡状態" にあると考えられる. 数学的には, X から $\mathbb{R}^d$ への $\mathbb{Z}^d$-同変な調和写像により埋め込まれていると考える. こうした結晶格子の調和写像による埋め込みの中で "標準的" なものを与えるのが, 小谷-砂田による標準実現である.([KS]). この標準実現 $\Phi: X\to\mathbb{R}^d$ は, 次の様にして与えられる. まず有限グラフの平坦トーラスへの埋め込み $\Phi_0: X_0\to\mathbb{T}^d$ として, $\Phi_{0*}:\pi_1(X_0)\to\mathbb{Z}^d$ が全射であるものを考える. この写像についてエネルギー汎関数の離散類似を考え, そのホモトピー類の中で最小値を与える写像を取る. (そのような写像は存在する. またこれは, 各頂点の配置が離散の意味で調和であるという条件を与える). この離散版エネルギー汎関数は平坦トーラスの平坦計量に依存するが, トーラスの体積を一定

[1] e-mail: rtanaka[AT]math.kyoto-u.ac.jp

に保ったまま平坦計量をも動かすことを許した上で，ホモトピー類の中でエネルギー最小となる写像を取る．この持ち上げとして標準実現 Φ は定義される．(標準実現 Φ は存在してユークリッド運動変換を除いて一意的に定まる)．また，標準実現 Φ は離散版 Albanese 写像の持ち上げとして構成できるものである．

この標準実現は結晶格子の上の組み合わせ論的ラプラシアンの収束に関して良い性質を持っている．また，標準実現と結晶格子上のランダム・ウォークの中心極限定理との関係が調べられている．

以下，標準実現 $\Phi : X \to \mathbb{R}^d$ を一つ固定して話を進める．

今，正の整数 N を取ると，$\mathbb{Z}^d$ の部分群 $N\mathbb{Z}^d$ も X に作用する．その商グラフを $N\mathbb{Z}^d\backslash X = X_N = (V_N, V_N)$ とおく．X_N は有限グラフである．また，$|V_N| = |V_0|N^d \to \infty, N \to \infty$ である．この有限グラフが適当なスケール極限を取ることで平坦トーラスに収束することを見る．

標準実現のスケールを取ったもの $(1/N)\Phi : X \to \mathbb{R}^d$ を考える．これは定義域の $N\mathbb{Z}^d$ の作用と値域の $\mathbb{Z}^d$ の格子群としての作用 ($\mathbb{Z}^d$ の標準的な作用とは限らない) で割ることにより，写像 $\Phi_N : X_N \to \mathbb{T}^d$ を誘導する．($\mathbb{T}^d$ は標準実現を定義したときに選んだ平坦計量が入っている)．このとき，この写像による像 $\Phi_N(X_N)$ は $\mathbb{T}^d$ に $N \to \infty$ で "収束する"．(これは厳密には Gromov-Hausdorff 位相により正当化されるが，今はこのことは用いない)．

3 モデル

有限グラフ X_N の上で対称単純排他過程，弱非対称排他過程を考える．

配置空間として $Z_N := \{0,1\}^{V_N}$ と定義する．また，一つの配置を $\eta \in Z_N$, $\eta = \{\eta_x\}_{x\in V_N}$ と表すことにする．配置空間に (1/2)-Bernoulli 測度の積測度 $\nu_N := \prod_{V_N} \nu_{1/2}$ を導入する．ここで対称単純排他過程の生成作用素 $L_N : L^2(Z_N, \nu_N) \to L^2(Z_N, \nu_N)$ は以下で定義されるものである:

$$L_N F(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{e\in E_N} (1-\eta_{oe})\eta_{te}\{F(\eta^e) - F(\eta)\},\ \ F \in L^2(Z_N, \nu_N).$$

ここで oe, te はそれぞれ辺 e の始点，終点を与える頂点であり，η^e は配置 η の oe と te での状態を入れ替えて得られる配置である．また，弱非対称排他過程は対称単純排他過程の摂動として与えられる．具体的には，トーラス上の "外場" (drift) として $H \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ を取る．ここで弱非対称排他過程の生成作用素 $L_N^H : L^2(Z_N, \nu_N) \to L^2(Z_N, \nu_N)$ は以下で定義されるものである:

$$L_N^H F(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{e\in E_N} (1-\eta_{oe})\eta_{te} \exp[H(\Phi_N(te)) - H(\Phi_N(oe))]\{F(\eta^e) - F(\eta)\}.$$

関数 H が定数関数のとき，特別な場合として対称単純排他過程が与えられることがわかる．この生成作用素 L_N^H により生成される連続時間マルコフ連鎖 $\eta(t) = \{\eta_x(t)\}_{x\in V_N}$ を考える．粒子の密度を次のように定義する:

$$\xi_N(t) := \frac{1}{|V_N|} \sum_{x\in V_N} \eta_x(N^2 t)\delta_{\Phi_N(x)}(d\mu).$$

ここで, μ は $\mathbb{T}^d$ 上の Lebesgue 測度であり, $\delta_{\cdot}$ は Dirac 測度である. また, 連続時間マルコフ連鎖は N^2 により時間スケールを取っている.

このとき, 次が成り立つ:

定理 1. 可測関数 $\rho_0 : \mathbb{T}^d \to [0,1]$ を一つ固定する. $\xi_N(0) \to \rho_0 d\mu$, $N \to \infty$ in prob. のとき, 各時間 $t \geq 0$ において, $\xi_N(t) \to \rho_t d\mu$, $N \to \infty$ in prob. であり, ρ_t は次の準線形偏微分方程式の一意の弱解である:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{2|V_0|}\Delta\rho - \frac{1}{2|V_0|}\sum_{e \in E_0} \nabla_{\mathbf{v}(e)} \left(\rho(1-\rho)\nabla_{\mathbf{v}(e)} H\right), \qquad \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot).$$

ここで, $\mathbf{v}(e) := \Phi(te) - \Phi(oe)$ for $e \in E_0$.

測度の収束は弱収束である. この定理の証明は局所エルゴート定理を定式化し証明することで得られる. 結晶格子の場合の局所エルゴート定理の定式化とその証明の詳細については [T] を参照されたい.

4 謝辞

本原稿は研究集会「幾何学的力学系の新展開」における講演の内容をまとめたものである. 講演の機会をくだり, 有益な助言をくださった, 研究代表者である岩井敏洋先生と千葉逸人さんに感謝いたします。

参考文献

[KOV] Kipnis, C., Olla, S., Varadhan, S. R. S.: Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLII, 115-137 (1989)

[KS] Kotani, M., Sunada, T.: Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps. Trans. Amer. Math. Soc. 353, 1-20 (2001)

[T] Tanaka, R.: Hydrodynamic limit for weakly asymmetric exclusion processes in crystal lattices. arXiv:1105.6220v1