Title	ユークリッド空間の完備極小部分多様体の構成について (部分多様体の微分幾何学的研究)
Author(s)	岡安, 隆
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1775: 113-120
Issue Date	2012-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/171736
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1775 巻 2012 年 113-120

ユークリッド空間の完備極小部分多様体の構成について

茨城大学教育学部 岡安隆 (Takashi Okayasu)
Faculty of Education,
Ibaraki University

1998 年の春の学会で次のような Bernstein 型の定理を発表した.

定理 $u:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ のグラフ $M^n=\{(x,u(x))|x\in\mathbf{R}^n\}$ が $\mathbf{R}^{n+p}$ の極小部分多様体であって，その法曲率が平坦であるとする．もし

$$\sqrt{g(x)}=o\Big((|x|^2+|u(x)|^2)^r\Big)\quad \text{for some } 0\le r<\tfrac{1}{2}$$

$$(\ g=\det(g_{ij}),\ g_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^j})$$

ならば，u は一次関数となる.

Bombieri 達 [2] が Bernstien 予想の反例を構成したように，この定理を面白いものにするためには，法曲率が平坦な完備極小部分多様体で，超曲面の直積以外のものを構成する必要がある．そのために 2000 年に equivariant geometry の手法を使い，cohomogeneity=2 の群で不変な実例を作った．しかし，その時点では，個々の群について平均曲率=0 を表す微分方程式の解が特異点をもたないことを証明するために，別々に処理する必要があった.

この小論で紹介する第一の結果は，上記で述べた微分方程式について大域的な解が存在することが簡単なアイデアで証明することができるという結果である．また，この手法を用いると， Bombieri 達 [2]，Alencar 達 [1] が証明している，$O(m)\times O(n)$ で不変な完備極小超曲面の存在を容易に証明することができ，さらにその他の cohomogeneity=2 の群についても完備極小超曲面が存在することを容易に示すことができる．これが第二の結果である.

主定理 5 次元以上のユークリッド空間に，余次元 2 (または 1) の, 法曲率が平坦な完備極小部分多様体を沢山構成することができる．それらは，次のような多様体に微分同相であり，また，各多様体に微分同相で相似でないものが無限個作れる.

$$S^p\times S^q\times\mathbf{R},\quad \frac{SO(2)\times SO(n)}{\mathbf{Z}_2\times SO(n-2)}\times\mathbf{R},\quad \frac{SU(3)}{T^2}\times\mathbf{R}$$

$$\frac{G_2}{T^2}\times\mathbf{R},\quad \frac{F_4}{Spin(8)}\times\mathbf{R},\quad \ldots\qquad (13\text{ 種類})$$

構成には，Hsiang と Lawson により発明された equivariant differential geometry の手法を用いる ([4])．つまり，直交群の部分群の作用で不変な部分多様体を考えることにより，平均曲率 $=0$ の方程式を常微分方程式に帰着させて解く．

1 準備

$(G,\ \Phi,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を余次元 2 の主軌道をもつ直交変換群とする．それらは Hsiang と Lawson により完全に分類されていて，階数 2 の対称空間のイソトロピー表現と一致することがわかっている ([4])．ここでは [5] にしたがって基本的な事実を述べる．

(i) $(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ のある主イソトロピー部分群 H の固定点集合となる 2 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ が存在し，各 G 軌道と直交する．

(ii) Weyl 群 $W=N(H,\ G)/H$ が $\mathbf{R}^2$ に鏡映変換で生成される群として作用し，$\mathbf{R}^{n+1}/G\simeq\mathbf{R}^2/W$ となる．したがって，軌道空間 $\mathbf{R}^{n+1}/G$ は $(W,\ \mathbf{R}^2)$ の Weyl chamber と同一視でき，軌道空間の計量は平坦となる．実際，軌道空間は角度 π/d, $d=1,2,3,4$ or 6 の線形錘となる．

補題 1 （Hsiang の平均曲率公式 [5]）
G を，Riemann 多様体 N の等長変換群 $I(N)$ の閉部分群とする．
M を N の G 不変部分多様体であって，N と同じ主軌道型をもつとする．x を主軌道 $\xi\in M/G$ 上の点とし，ν_x を 点 $x\in M$ での $M\subset N$ への任意の単位法ベクトル，ν_ξ を ξ でのその像とする（図 1 参照）．すると

$$H(\nu_x)=H'(\nu_\xi)-\frac{1}{2}\frac{d}{d\nu_\xi}\log f(\xi)$$

が成り立つ．ここで $H(\nu_x)$ は M の ν_x 方向の平均曲率，$H'(\nu_\xi)$ は M/G の ν_ξ 方向の平均曲率であり，$f(\xi)=$[軌道 ξ の体積]^2 で，$\frac{d}{d\nu_\xi}$ は方向微分である．

例 1 $(O(p+1)\times O(q+1)\times\{\mathrm{id}\},\ \mathbf{R}^{p+1}\times\mathbf{R}^{q+1}\times\mathbf{R})$
$\gamma(t)=(x(t),\ y(t),\ t)$ を ${\mathbf{R}_+}^2\times\mathbf{R}$ の中の曲線とし，$M_\gamma^{p+q+1}=\bigcup_t S^p(x(t))\times S^q(y(t))\times\{t\}\subset\mathbf{R}^{p+q+3}$ を γ から生成される $O(p+1)\times O(q+1)\times\{\mathrm{id}\}$ 不変部分多様体とする．$\xi_1=(1,\ 0,\ -\dot{x}(t))$, $\xi_2=(0,\ 1,\ -\dot{y}(t))$ は $\gamma\subset{\mathbf{R}_+}^2\times\mathbf{R}$ の法ベクトルとなる．

したがって，Hsiang の平均曲率公式から M_γ が極小部分多様体である条件 $H=0$ は次の連立方程式と同値になることが分かる．

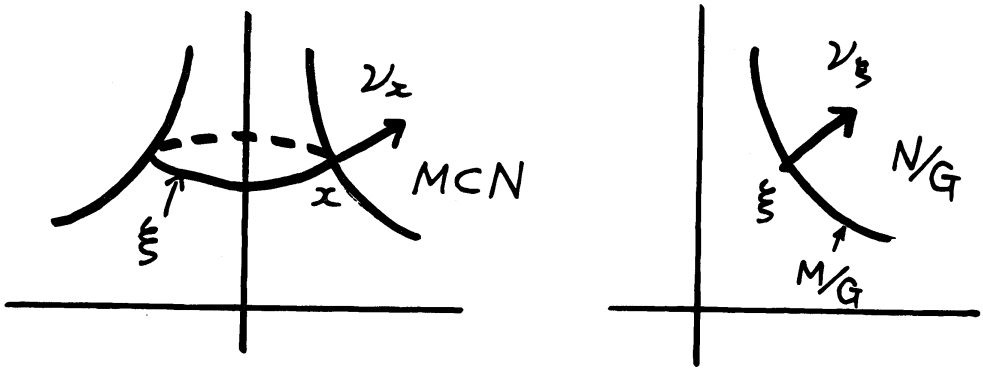


図 1: G 不変部分多様体

$$
\begin{aligned}
< \ddot{\gamma}/|\dot{\gamma}|^2,\ \xi_1 > -(\partial_x - \dot{x}\partial_t)\log(x^p y^q) &= 0 \\
< \ddot{\gamma}/|\dot{\gamma}|^2,\ \xi_2 > -(\partial_y - \dot{y}\partial_t)\log(x^p y^q) &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\ddot{x}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{p}{x} \\[2ex]
\dfrac{\ddot{y}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{q}{y}
\end{cases}
\tag{1}
$$

2 変分問題と保存量

補題 2 $x(t),\ y(t)$ が独立に動くとき

$$I[x(t),\ y(t)] = \int_a^b F(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})dt$$

の変分問題の解は，次の保存量を持つ

$$F(x,\ y) - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}} = \text{定数}$$

ここで，$F_{\dot{x}}$ は F を第三成分で微分することを表す.

例 2 例 1 を一般化した部分多様体を作ろう．$(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を cohomogeneity 2 の直交表現とし，G/W をその軌道空間 $\subset \mathbf{R}^2$ とする．$v(x,\ y)$ を (x, y) を通る G 軌道の体積とする.

$(G \times \{\mathrm{id}\},\ \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R})$ を考え，母線

$$\gamma(t) = (x(t),\ y(t),\ t) \subset G/W \times \mathbf{R}$$

をとり，γ から作られる G 不変部分多様体 M_γ^n を考える．M_γ の体積は次の関数を積分して得られる．

$$F(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) = v(x,\ y)\sqrt{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}$$

さらに M_γ が極小部分多様体になるのは，$x(t)$, $y(t)$ が $I[x(t),\ y(t)] = \int_a^b F(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})dt$ の変分問題の解になるときであることもすぐ分かる．したがって M_γ が極小部分多様体であるとき

$$\begin{aligned} F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}} &= v(x,y)\sqrt{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} \\ &\quad -\frac{v(x,y)(\dot{x})^2}{\sqrt{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}} - \frac{v(x,y)(\dot{y})^2}{\sqrt{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}} \\ &= \frac{v(x,y)}{\sqrt{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}} = \text{定数} \end{aligned}$$

となる．

以上のことをまとめると次の定理を得る．

定理 1　$(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を cohomogeneity 2 の直交表現とし，G/W をその軌道空間 $\subset \mathbf{R}^2$ とする．$v(x,\ y)$ を (x,y) を通る G 軌道の体積とする．

$(G \times \{\mathrm{id}\},\ \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R})$ を考え，母線

$$\gamma(t) = (x(t),\ y(t),\ t) \subset G/W \times \mathbf{R}$$

をとるとき，γ から作られる G 不変部分多様体 M_γ^n が $\mathbf{R}^{n+2}$ の極小部分多様体であることの必要十分条件は

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{v_x}{v}, \\[2ex] \dfrac{\ddot{y}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{v_y}{v} \end{cases} \tag{2}$$

となる．さらにこの微分方程式は保存量

$$\frac{v(x,\ y)^2}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = C\ (\text{定数})$$

をもつ．

したがって $v(x(0),\ y(0))^2/\{1+\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2\}=C=1$ を仮定すると方程式 (2) は次の方程式と同値になる.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= vv_x, \\ \ddot{y} &= vv_y. \end{cases} \tag{3}$$

注意　方程式 (3) の保存量は $v(x,\ y)^2-\{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2\}=C$ である.

3　解の爆発

次の定理が我々の微分方程式の解が有限時間で爆発することを保証してくれる.

定理 2　(Chen-Tsai [3])
$f,\ g$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^1 級関数とし, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$ を満たしているとする.

$$\begin{cases} \ddot{x}=f(x,\ y), \\ \ddot{y}=g(x,\ y), \\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=x_1, \\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=y_1 \end{cases} \tag{4}$$

を考える. $E(t)=\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2-2M(x,y)$ と置く. ただし

$$M(x,\ y)=\int_0^x f(s,y)ds+\int_0^y g(0,s)ds$$

である. すると $E(x(t),y(t))=$ 一定 であることが分かる.

さらに次の不等式が成り立つ定数 $r>0$ が存在すると仮定する.

$$xf(x,\ y)+yg(x,\ y)\geq 2(2r+1)M(x,\ y).$$

このとき, $E(x(0),\ y(0))\leq 0$ ならば, (4) の解は有限時間で爆発する.

例 3　定理 1 の状況では, $v(x,\ y)$ は k 次の同次多項式となる ($k\geq 2$). 各表現について $v(x,\ y)$ がどう表せるかについては [4] を参照のこと.
$v(x(0),\ y(0))^2/\{1+\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2\}=1$ を仮定していることを考慮すると

$$f(x,\ y)=vv_x,\quad g(x,\ y)=vv_y,$$

$$M(x,\ y)=\frac{1}{2}v(x,\ y)^2,$$

$$xf+yg=\frac{1}{2}(v^2)_x x+\frac{1}{2}(v^2)_y y=2kM(x,\ y),$$

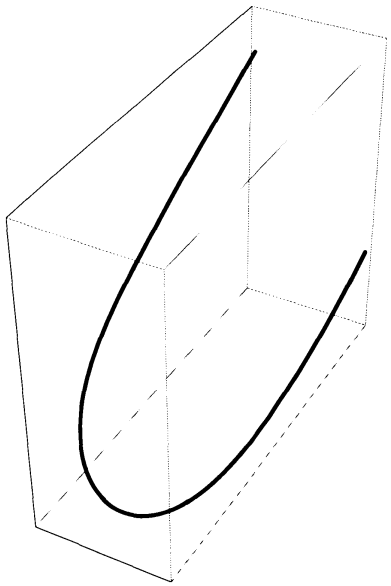
$$E(x(0),\ y(0)) = \dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 - v(x(0),\ y(0))^2 = -1 < 0$$

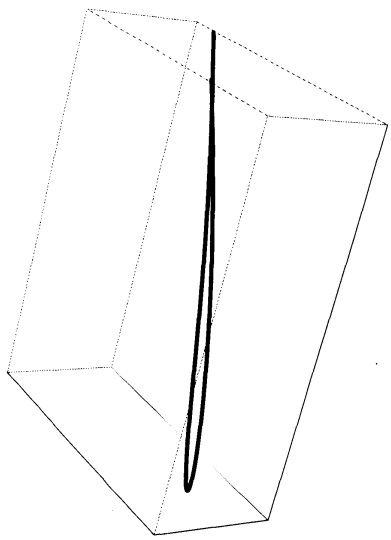
となることが分かり，任意の初期値に対して解は爆発することが結論できる．

以上により次の定理が証明できた．

定理 3　定理 1 の仮定のもと，$v(x(0),\ y(0))^2/\{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2\} = 1$ を仮定すると，(2) の解は有限時間で爆発する．つまり M_γ は完備な極小部分多様体になる．

例 4　例 1 で $p = q = 2$ の場合の解曲線の概形を挙げる．





4　極小超曲面の構成

つぎに Bombieri 達 [2]，Alencar 達 [1] の扱った $O(m) \times O(n)$-不変極小超曲面について考える．方程式 (1) を参考に次の方程式を考える．

$$\begin{cases} \ddot{x} = p\dfrac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{x} \\[2ex] \ddot{y} = q\dfrac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{y} \end{cases} \tag{5}$$

この方程式の解 $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))$ から超曲面 $M_\gamma^{p+q+1} \subset \mathbf{R}^{p+q+2}$

$$\bigcup_t S^p(x(t)) \times S^q(y(t))$$

を作ると，これは $O(p+1)\times O(q+1)$-不変極小超曲面になることがわかる．それは次の $H=0$ を表す方程式を満たすことからわかる．

$$\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\ddot{y}}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}=q\frac{\dot{x}}{y}-p\frac{\dot{y}}{x}. \tag{6}$$

さらに第一積分

$$\frac{x^{2p}y^{2q}}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}=C\ (\text{定数}) \tag{7}$$

をもち，初期条件 $x^{2p}(0)y^{2q}(0)/\{(\dot{x}(0))^2+(\dot{y}(0))^2\}\neq 0$ を満たす解は特異点を持たないことがわかり，方程式 (5) は方程式 (3) と同値になることもわかる．

Bombieri 達は Poincaré-Bendixon の方法を用いて解の存在を導いている．Alencar 達はその方法を使って，さらにいろいろなタイプの解曲線が存在することを示した．我々の場合は，無限に伸びる解曲線の存在を Chen-Tsai の定理を使うことにより容易に示すことができる．さらに，他の cohomogeneity=2 の表現についても新たに面倒な解析をすることなく完備極小部分多様体の存在がいえる点が新しい（その代わり，解曲線が自己交差を無限個もつかなどはわからない）．

定理 4　$(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を cohomogeneity 2 の直交表現とし，G/W をその軌道空間 $\subset\mathbf{R}^2$ とする．$v(x,\ y)$ を (x,y) を通る G 軌道の体積とする．

母線

$$\gamma(t)=(x(t),\ y(t))\subset G/W$$

が，

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}=\dfrac{v_x}{v}, \\[2ex] \dfrac{\ddot{y}}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}=\dfrac{v_y}{v} \end{cases} \tag{8}$$

を満たせば，γ から作られる G 不変部分多様体 $M^n_\gamma\subset\mathbf{R}^{n+1}$ は極小超曲面である．さらにこの微分方程式は保存量

$$\frac{v(x,\ y)^2}{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}=C\ (\text{定数})$$

をもつ．したがって $v(x(0),\ y(0))^2/\{\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2\}\neq 0$ を仮定すると，(8) の解は有限時間で爆発する．つまり M_γ は完備な極小超曲面になる．

注意 2

$$I[x(t),\ y(t)]=\int v(x,\ y)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

の変分問題の解を考えても，そのままでは保存量の式は $0=0$ になるだけである．余次元=2 の極小部分多様体の極限として得られる超曲面と考えて初めて第一積分をもつ微分方程式が得られる．

注意 3

双曲空間の極小超曲面については，木村真琴氏が $\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)$ 不変完備極小超曲面を構成した先行研究がある ([6])．我々の方法を双曲空間へ拡張することについては現在研究中である．

参考文献

[1] H. Alencar et al., $\mathrm{O}(m)\times\mathrm{O}(n)$-*invariant minimal hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{m+n}$, Ann. Global Anal. Geom. 27 (2005), no. 2, 179–199.

[2] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. 7 (1969), 243–268.

[3] Y. C.Chen and L. Y. Tsai, *Blow-up solutions of nonlinear differential equations*, Appl. Math. Comput. 169 (2005), no. 1, 366–387.

[4] W-Y. Hsiang and H.B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry 5 (1971), 1–38.

[5] B. Allen, M. do Carmo and W-Y. Hsiang, *On some fundamental equations of equivariant Riemannian geometry*, Tamkang J. Math., 40 (2009), 343–376.

[6] M. Kimura, $\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)$-*invariant minimal hypersurfaces in hyperbolic space*, Nihonkai Math. J. 4 (1993), no. 2, 233–238.