Title	ラグランジュ交叉とleaf-wise交叉について (部分多様体の微分幾何学的研究)
Author(s)	植木, 聡之
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1775: 108-112
Issue Date	2012-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/171737
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1775巻 2012年 108-112

ラグランジュ交叉と leaf-wise 交叉について

東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程一年
植木　聡之

ラグランジュ交叉とは，シンプレクティック多様体における二つのラグランジュ部分多様体の交叉のことである．A. Weinstein は古典的なハミルトン力学系に関する研究の中で最も重要な問題の一つである周期解の存在の問題について，その周期解をラグランジュ交叉と対応付けることにより，この問題をラグランジュ交叉の存在を調べることに帰着した．ここでは，まず Weinstein によるラグランジュ交叉理論の概要を述べる．

一方，leaf-wise 交叉はラグランジュ交叉のある一般化として J. Moser によって導入された概念である．ここでは，Weinstein の理論を用いることにより，この leaf-wise 交叉に関しても同様の結果が得られることを述べる．

1　定義

定義 1. P を C^∞ 多様体とする．P 上の二次微分形式 Ω が**シンプレクティック構造**であるとは，次の条件を満たすことをいう．

(1) $d\Omega = 0$.
(2) Ω は非退化である．すなわち，各点 $p \in P$ において $\Omega^n \neq 0$ である．

このとき，(P, Ω) を**シンプレクティック多様体**とよぶ．

非退化性よりシンプレクティック多様体は偶数次元となる．以下，シンプレクティック多様体 (P, Ω) の次元を $2n$ とする．

定義 2. P の微分同相写像 ψ に対して，$\psi^*\Omega = \Omega$ が成り立つとき，ψ を**シンプレクティック同型写像**と呼び，その全体を $\mathrm{Symp}(P)$ で表す：

$$\mathrm{Symp}(P) := \{\psi : P \text{ の微分同相写像} \mid \psi^*\Omega = \Omega\}$$

P の部分多様体 M について，各 $p \in M$ に対して

$$(T_pM)^\Omega := \{v \in T_pP \mid \Omega(v, w) = 0 \ ({}^\forall w \in T_pM)\}$$

とおく．Ω の非退化性より，$\dim T_pM + \dim(T_pM)^\Omega = \dim P$ が成り立つ．

定義 3. M を P の部分多様体とする.

(1) 各 $p \in M$ に対し $(T_pM)^\Omega = T_pM$ が成り立つとき, M を**ラグランジュ部分多様体**という.

(2) 各 $p \in M$ に対し $(T_pM)^\Omega \subset T_pM$ が成り立つとき, M を **coisotropic 部分多様体**という.

ラグランジュ部分多様体の全体を $\mathcal{L}(P,\Omega)$ で表しておく. 次のようにして $\mathcal{L}(P,\Omega)$ に位相を定める. M を, $\dim M = (1/2)\dim P$ なる多様体とする. 閉集合 $A \subset M$ 及び, C^1 位相に関する開集合 $\mathcal{A} \subset C^\infty(A,P)$ に対し,

$$\mathcal{N}_{A,\mathcal{A}} := \left\{ L \in \mathcal{L}(P,\Omega) \;\middle|\; f(A) \subset L \text{ となる } f \in \mathcal{A} \text{ が存在する} \right\}$$

とおく. $\{\mathcal{N}_{A,\mathcal{A}}\}_{A,\mathcal{A}}$ が生成する $\mathcal{L}(P,\Omega)$ 上の位相を, **C^1 位相**と呼ぶ.

Weinstein の定理を述べるために, もう一つ言葉を定義しておく. 次の定義においては, P はシンプレクティック多様体でなくてもよい.

定義 4. C^∞ 多様体 P の部分多様体 M と N について, $\Sigma := M \cap N$ が P の部分多様体となり, かつ各 $p \in \Sigma$ に対し

$$T_p\Sigma = T_pM \cap T_pN$$

が成り立つとき, M と N は**クリーンに交わる**という.

例 1. (1) $M = N$ のとき, M と $N = M$ はクリーンに交わる.

(2) P において M と N が横断的に交わるならば, M と N はクリーンに交わる.

(3) P をベクトル空間, M と N を P の任意の部分ベクトル空間とすると, M と N はクリーンに交わる.

(4) $P = \mathbb{R}^3$ とし, $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$, $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ とすると, M と N はクリーンに交わらない.

2 Weinstein のラグランジュ交叉理論

任意の多様体の余接束は自然にシンプレクティック多様体となる. まず, 余接束におけるラグランジュ交叉について考える.

例 2. 多様体 M 上の余接束 T^*M において, M 上の一次閉微分形式 ϕ に対して $L = \phi(M)$ は T^*M のラグランジュ部分多様体となる. このような二つのラグランジュ部分多様体 $L_1 = \phi_1(M)$, $L_2 = \phi_2(M)$ に対し, M 上の一次閉微分形式 Γ および埋め込み

$G : M \to T^*M$ を，

$$\Gamma := \phi_2 - \phi_1$$
$$G := \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$$

によって定めると，$\Gamma(p) = 0$ ならば $G(p) \in L_1 \cap L_2$ が成り立つ．

Weinstein はこの例に基づき，次の定理を証明した．

定理 1 (Weinstein [5])**.** (P, Ω) をシンプレクティック多様体とし，L_1, L_2 をそのラグランジュ部分多様体でクリーンに交わるとする．$\Sigma = L_1 \cap L_2$ とおく．このとき，(L_1, L_2) のある C^1 近傍 $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ が存在し，各 $(L_1', L_2') \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ に対して，

$$\Gamma \in Z^1(\Sigma) : \Sigma\text{上の一次閉微分形式}$$
$$G : \Sigma \to P : \text{埋め込み}$$

が存在して，$\Gamma(p) = 0$ ならば $G(p) \in L_1' \cap L_2'$ が成り立つ．

定理 1 により，ラグランジュ交叉は一次閉微分形式の零点と対応する．したがってラグランジュ交叉の個数を調べるためには，一次閉微分形式の零点の個数を調べればよいことがわかる．次に一次閉微分形式の零点の評価を考える．

定義 5. M を位相空間とする．M を可縮な開集合で覆うために必要な開集合の最小数を，**Lusternik-Schnirelmann カテゴリー** (LS カテゴリー) と呼び，$\mathbf{cat}(M)$ で表す．M が有限個の可縮な開集合で被覆できないとき，$\mathrm{cat}(M) = +\infty$ と定義する．

この LS カテゴリーに関して次の定理が知られている．

定理 2 (Lusternik, Schnirelmann [1])**.** M をコンパクトな多様体とし，$f \in C^\infty(M)$ とする．このとき，f の臨界点は少なくとも $\mathrm{cat}(M)$ 個存在する．

この定理により直ちに次のことがわかる．

系 3 (Weinstein [5])**.** (P, Ω) をシンプレクティック多様体とし，L_1, L_2 をそのラグランジュ部分多様体でクリーンに交わるとする．$\Sigma = L_1 \cap L_2$ とおく．さらに，Σ がコンパクトで $H^1_{DR}(\Sigma) = 0$ と仮定する．このとき，(L_1, L_2) のある C^1 近傍 $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ が存在し，各 $(L_1', L_2') \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ に対して，$L_1' \cap L_2'$ は少なくとも $\mathrm{cat}(\Sigma)$ 個の点を持つ．

3 leaf-wise 交叉

J. Moser は，ラグランジュ交叉の概念を coisotropic 部分多様体の leaf-wise 交叉の概念に拡張した．定理 1 を用いると，leaf-wise 交叉についても同様の結果が成り立つので，このことについて紹介する．

補題 4. M を P の coisotropic 部分多様体とする．このとき $(TM)^{\Omega} \subset TM$ は M 上の完全積分可能な分布である．

この補題により coisotropic 部分多様体上には自然に葉層構造が定まる．そこで，$p \in M$ を通る葉を L_p とおく．

定義 6. M を P の coisotropic 部分多様体とし，$\psi \in \mathrm{Symp}(P)$ とする．$p \in M$ が ψ の **leaf-wise 交叉**であるとは，$\psi(p) \in L_p$ が成り立つことをいう．leaf-wise 交叉の全体を $\mathrm{LWI}_M(\psi)$ で表しておく：

$$\mathrm{LWI}_M(\psi) := \{p \in M \mid \psi(p) \in L_p\}$$

例 3. (1) $M = P$ とすると，$(T_pM)^{\Omega} = \{0\}$，$L_p = \{p\}$ である．よって，

$$\begin{aligned} p \in \mathrm{LWI}_M(\psi) &\Leftrightarrow \psi(p) = p \\ &\Leftrightarrow p \in \mathrm{Fix}(\psi). \end{aligned}$$

すなわち，ψ の leaf-wise 交叉は ψ の固定点である．

(2) $M \subset P$ を連結なラグランジュ部分多様体とすると，$(T_pM)^{\Omega} = T_pM$，$L_p = M$ である．よって，

$$\begin{aligned} p \in \mathrm{LWI}_M(\psi) &\Leftrightarrow \psi(p) \in M \\ &\Leftrightarrow p \in M \cap \psi^{-1}(M). \end{aligned}$$

すなわち，ψ の leaf-wise 交叉は二つのラグランジュ部分多様体 M と $\psi^{-1}(M)$ のラグランジュ交叉を与える．

Moser は leaf-wise 交叉の存在に関して次の定理を証明した．

定理 5 (Moser [3])**.** (P, Ω) を単連結なシンプレクティック多様体とし，Ω は完全形式であると仮定する．また，$M \subset P$ をコンパクトな coisotropic 部分多様体とする．このとき，P の恒等写像 $\mathrm{id}_P : P \to P$ のある C^1 近傍上の $\psi \in \mathrm{Symp}(P)$ は leaf-wise 交叉を少なくとも二個持つ．

一方で，Weinstein による定理 1 を用いる事により次の定理が示される．

定理 6 (主定理). (P,Ω) をシンプレクティック多様体とする．また，$M \subset P$ を coisotropic 部分多様体とする．このとき，$\mathrm{id}_P : P \to P$ のある C^1 近傍上の $\psi \in \mathrm{Symp}(P)$ に対して，

$$\Gamma \in Z^1(M) : M \text{ 上の一次閉微分形式}$$
$$G : M \to P \times P : \text{埋め込み}$$

が存在して，$\Gamma(p) = 0$ ならば $pr_1 \circ G(p) \in \mathrm{LWI}_M(\psi)$ が成り立つ．ここで $pr_1 : P \times P \to P$ は第一成分への射影である．さらに，Σ がコンパクトで $H^1_{DR}(M) = 0$ ならば，ψ は leaf-wise 交叉を少なくとも $\mathrm{cat}(M)$ 個持つ．

定理 6 において，P が単連結であると仮定すると Γ が完全形式となることが分かる．これは，Weinstein による Γ の構成に注意すると，この $\Gamma \in Z^1(M)$ はある $\tilde{\Gamma} \in Z^1(P)$ 及び，ある写像 $F : M \to P$ を用いて $\Gamma = F^*\tilde{\Gamma}$ と書けるためである．そこで $\Gamma = df$ と表しておく．さらに M のコンパクト性を仮定すれば f の臨界点，すなわち Γ の零点は少なくとも二個（または $\mathrm{cat}(M)$ 個）存在するので，ψ は leaf-wise 交叉を少なくとも二個（または $\mathrm{cat}(M)$ 個）持つ．以上により，定理 6 から Moser による定理 5 が導かれる．

参考文献

[1] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[2] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, second edition, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[3] J. Moser, *A fixed point theorem in symplectic geometry*, Acta. Math. 141 (1978), 17–34

[4] J. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Ann. Math. Studies 54, Princeton Univ. Press, 1963.

[5] A. Weinstein, *Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems*, Ann. Math. 98 (1973), 377–410.