数理解析研究所講究録
第1777巻2012年88-102

On the cokernel of the Johnson homomorphism of the mapping class group of a surface

(榎本直也氏（京都大学大学院理学研究科）との共同研究

東京理科大学理学部第二部数学科　佐藤 隆夫 (Satoh, Takao)
Department of Mathematics, Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

Abstract

種数が $g\geq 2$ で，境界成分の個数が1であるような向きづけられたコンパクトな曲面を $\Sigma_{g,1}$ とし，その写像類群を $\mathcal{M}_{g,1}$ とする．筆者は榎本直也氏との共同研究により，$\mathcal{M}_{g,1}$ の有理 Johnson 準同型写像 $\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}}$ の余核に関する表現論的な研究を行い，次数 $k\geq 3$ が $k\equiv 1 \pmod 4$ を満たす場合に，$\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}}$ の余核に $[1]_{Sp}^{k}$ なる Sp-既約表現が現れるという結果を得た．本報告書は，この研究に関する概要を紹介するものである．

Contents

1 自由群の自己同型群とJohnson準同型写像

以下，特に断らない限り曲面といえば，種数が $g \geq 2$ で，境界成分の個数が1であるような向きづけられたコンパクトな曲面 $\Sigma_{g,1}$ を意味するものとする．

1980年代にDennis Johnsonによって端を発した，曲面の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ のJohnson準同型の研究は，森田茂之 [19] やRichard Hain [9] らをはじめとした多くの研究者によって受け継がれ，四半世紀を経て急速な進展を遂げている．近年のJohnson準同型の研究は，組み合わせ群論や位相幾何学のみならず，群のコホモロジー論や群の表現論などとも結び付き，愈々その複雑さを増す一方で，その構造が持つ本来の豊かさが，徐々にかつ着実に明らかになってきている．

抑々，Johnson準同型とは，Johnson filtrationとよばれる，曲面の写像類群の正規部分群による降下列の，各次数商を研究する際に用いられる1つの道具なのであるが，群論的な意味合いでJohnson filtrationなる概念を最初に導入したのはJohnsonではなく，1960年代にAndreadakis [1] が自由群の自己同型群に対して行った研究が嚆矢とされている．Andreadakisによる研究を念頭に置くとき，曲面の写像類群のJohnson filtrationやJohnson準同型は，自由群の自己同型群のそれらの写像類群への制限とみなすことができる．

本報告書では，筆者がこれまでに行ってきた自由群の自己同型群のJohnson準同型に関する研究を踏襲する形で議論を進める関係上，自由群の自己同型群に関する先行結果をまず最初に纏めておく．

記号について

本稿では群 G と G の元 x, y に対して，x と y の交換子積を $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ と表す．また，群 G の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,G$ の，群 G への作用は右作用とし，$\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$ の $x \in G$ への作用を x^{σ} と表す．$\mathbb{Z}$ 加群 A に対して，係数環を有理数体 $\mathbb{Q}$ に拡大した $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $A_{\mathbb{Q}}$, $A^{\mathbb{Q}}$ などと添え字をつけて表し，同様に $\mathbb{Z}$ 加群の間の線形写像 $f : A \to B$ を $\mathbb{Q}$ 上で考えたもの $f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ を $f_{\mathbb{Q}}$, $f^{\mathbb{Q}}$ などと表す．

1.1 H が生成する自由リー代数

$n \geq 2$ に対して，F_n を $x_1, \ldots, x_n$ が生成する階数 n の自由群とし，F_n のアーベル化を $H = H_1(F_n, \mathbb{Z})$ とおく．以下，F_n の基底 $x_1, \ldots, x_n$ 及び，これらが誘導する H の自由アーベル群としての基底を固定し，標準的に $\mathrm{Aut}(H) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ とみなす．各 $k \geq 1$ に対して F_n の降中心列 $\Gamma_n(k)$ を

$$\Gamma_n(1) := F_n, \quad \Gamma_n(k) := [\Gamma_n(k-1), F_n], \quad (k \geq 2)$$

により帰納的に定義する．これらの各次数商を $\mathcal{L}_n(k) := \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ とおき，その次数和を $\mathcal{L}_n := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_n(k)$ とおく．$\mathcal{L}_n$ には F_n の交換子積から誘導される次数つきリー代数としての括弧積が自然に定義され，$\mathcal{L}_n$ は次数つきリー代数として，H が生成する自由リー代数と同型であることが知られている．

元来，$\mathcal{L}_n$ の構造については，1930年代頃からMagnus, Witt, 及びHallらによって先駆的に研究されはじめ，各斉次成分 $\mathcal{L}_n(k)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$-同変な自由アーベル群であり，その階数や基底も具体的に明示されている．(例えば [16], [27] などを参照.)

1.2 IA-自己同型群

自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,F_n$ は H に自然に作用し，従って，準同型写像

$$\rho : \mathrm{Aut}\,F_n \to \mathrm{Aut}(H) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

を誘導する．Nielsen [24] により $\mathrm{Aut}\,F_n$ は有限表示群であることが知られているが，その生成元の像を調べることで ρ が全射となることが分かる．いま，ρ の核を IA_n と書いて自由群の **IA-自己同型群**と呼ぶ．

Nielsen [23] により IA_2 は F_2 の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\,F_2$ に一致することが知られているが，一般に IA_n は $\mathrm{Inn}\,F_n$ よりはるかに大きい．実際，互いに相異なる添え字 $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$K_{ij} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_j^{-1} x_i x_j, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}, \quad K_{ijk} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_j x_k x_j{}^{-1} x_k{}^{-1}, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}$$

なる自己同型が定まるが，Magnus [16] により，IA_n はこれら有限個の元で生成されることが知られている．さらに，Cohen-Pakianathan [4, 5]，Farb [8]，及び河澄響矢 [12] の最近の独立した仕事により，IA_n のアーベル化の構造も完全に決定されており，

$$H_1(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z}) \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$$

となることが知られている．ここで，$H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z})$ である．一方，$n \geq 3$ に対して IA_n の群の表示はまだ未解明であり，特に $n = 3$ の場合は Krstić-McCool [15] によって有限表示不可能であることが知られている．さらに，$n \geq 4$ の場合は有限表示可能かどうかさえも解っておらず，IA_n は組み合わせ群論的にも非常に複雑な群である．

1.3 Andreadakis-Johnson filtration

各 $k \geq 0$ に対して $\mathrm{Aut}\,F_n$ の，F_n の冪零商 $F_n/\Gamma_n(k+1)$ への自然な作用は準同型写像

$$\mathrm{Aut}\,F_n \to \mathrm{Aut}(F_n/\Gamma_n(k+1))$$

を誘導するが，この核を $\mathcal{A}_n(k)$ とおく．すると，これらは $\mathrm{Aut}\,F_n$ に正規部分群の降下列

$$\mathrm{Aut}\,F_n = \mathcal{A}_n(0) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \cdots$$

を定める．特に $\mathcal{A}_n(1) = \mathrm{IA}_n$ である．この降下列を $\mathrm{Aut}\,F_n$ の **Andreadakis-Johnson filtration** と呼ぶ．Andreadakis [1] により以下の基本的な結果が知られている．

定理 1.1 (Andreadakis, [1]).

(1) 各 $k, l \geq 1$，及び，$\sigma \in \mathcal{A}_n(k)$, $x \in \Gamma_n(l)$ に対して，$x^{-1}x^{\sigma} \in \Gamma_n(k+l)$.

(2) 各 $k, l \geq 1$ に対して，$[\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(l)] \subset \mathcal{A}_n(k+l)$.

(3) $\displaystyle\bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_n(k) = 1$.

(4) 各 $k \geq 1$ に対して，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ は有限生成自由アーベル群.

Andreadakis は [1] において，任意の $k \geq 1$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_2)$ 及び，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_3)$ を計算している．一方，Pettet [26] の最近の仕事により各 $n \geq 3$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{3}n^2(n^2-4)+\frac{1}{2}n(n-1)$ であることが知られている．また，筆者の先行研究 [28] により，$n \geq 3$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^3(\mathcal{A}_n)$ が計算されているが，一般に，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ の階数を決定する問題は極めて難しい.

1.4 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\, F_n/\mathrm{IA}_n$ の作用

この節では，各 $\mathcal{L}_n(k)$, 及び $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ が自然に $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群とみなせることを示す.

各 $k \geq 1$ に対して，$\Gamma_n(k)$ は F_n の特性部分群であるから，$\mathrm{Aut}\, G$ は自然に $\Gamma_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\, G$ は各次数商 $\mathcal{L}_n(k) = \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ にも作用する．定理 1.1 の (1) より, $\mathrm{Aut}\, F_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ へ作用の，IA_n への制限は自明であることが分かる．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\, F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ への作用が定義される.

一方, 各 $\mathcal{A}_n(k)$ は $\mathrm{Aut}\, F_n$ の正規部分群であるから, $\mathrm{Aut}\, F_n$ は共役により，$\mathcal{A}_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\, F_n$ は Andreadakis-Johnson filtration の各次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ にも作用している．すると，定理 1.1 の (2) より，$\mathrm{Aut}\, F_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用の，IA_n への制限は自明であることが分かる．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\, F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用が定義される.

以下，特に断らない限り，これらの $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の作用を固定する.

1.5 Johnson 準同型写像

各 $k \geq 1$ に対して準同型写像 $\mathcal{A}_n(k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$ を

$$\sigma \;\mapsto\; ([x] \mapsto [x^{-1}x^{\sigma}]), \quad x \in F_n$$

で定義する．ここで, [ ] は剰余類を表す記号である．すると, 定義より直ちに，この写像の核が $\mathcal{A}_n(k+1)$ であることが分かり，従って，単射準同型写像

$$\tau_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) \hookrightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が得られる．この τ_k を $\mathrm{Aut}\, F_n$ の第 k-**Johnson** 準同型写像という. 特に, τ_k は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変である. ゆえに，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群としての構造を研究する際に，以下は基本的かつ重要な問題となる.

問題 1.2. τ_k の像 $\mathrm{Im}(\tau_k)$，もしくは余核 $\mathrm{Coker}(\tau_k)$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群としての構造を決定せよ.

第 1-Johnson 準同型に関しては，Andreadakis [1] が $\mathrm{gr}^1(\mathcal{A}_n)$ の生成元の像を調べることで τ_1 が全射となることを示している．即ち，$n \geq 3$ に対して

$$\tau_1 : \mathrm{gr}^1(\mathcal{A}_n) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$$

は同型写像である．さらに，τ_1 が IA_n のアーベル化を与えていることも分かる.

一方，$k \geq 2$ に対しては τ_k は全射ではない．実際，筆者の先行研究 [28] により，

$$\mathrm{Coker}(\tau_2) \cong S^2 H, \quad \mathrm{Coker}(\tau_{3,\mathbf{Q}}) \cong S^3 H_{\mathbf{Q}} \oplus \Lambda^3 H_{\mathbf{Q}}$$

となることが知られている．また，森田茂之による Trace 写像を用いた最近の研究により，各 $k \geq 2$ に対して有理 Johnson 準同型写像 $\tau_{k,\mathbf{Q}}$ の余核には $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-既約表現として $H_{\mathbf{Q}} = H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}$ の k 次の対称テンソル $S^k H_{\mathbf{Q}}$ が現れることが知られている．各 $S^k H_{\mathbf{Q}}$ は，(Johnson 準同型の全射性に関する障害という意味で) 森田障害と呼ばれている．しかしながら，一般に，$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}})$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-構造を決定することは，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の階数を求める問題と同様に極めて難しい問題である．

1.6 IA_n の降中心列

この節では，IA-自己同型群の降中心列 $\mathcal{A}'_n(k)$:

$$\mathrm{IA}_n = \mathcal{A}'_n(1) \supset \mathcal{A}'_n(2) \supset \cdots$$

について考える．一般に，Andreadakis-Johnson filtration $\mathcal{A}_n(k)$ は中心列であるから，定義より直ちに，各 $k \geq 1$ に対して

$$\mathcal{A}'_n(k) \subset \mathcal{A}_n(k)$$

であることが分かる．Andredakis [1] によって，$n = 2$ の場合にこれらが一致すること，及び $\mathcal{A}'_3(3) = \mathcal{A}_3(3)$ であることが知られており，彼によって両者は一致するのではないかという予想が立てられている．現在，Bachmuth [3] によって，$\mathcal{A}'_n(2) = \mathcal{A}_n(2),\ k \geq 1$ であること，及び，Pettet [26] によって，$\mathcal{A}'_n(3)$ は $\mathcal{A}_n(3)$ において有限指数であることが知られているが，それら以外についてこの両者の差について言及している結果は得られていない．

さて，各 $k \geq 1$ に対して，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) := \mathcal{A}'_n(k)/\mathcal{A}'_n(k+1)$ を考える．すると，Johnson 準同型と同様にして準同型写像

$$\tau'_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \to H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が定義される．すると，一般に，τ'_k は τ_k を経由するので，

$$\mathrm{Im}(\tau'_k) \subset \mathrm{Im}(\tau_k)$$

となることが分かる．ここで，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ の表現論を考えることで，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として

$$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}}) \subset \mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbf{Q}})$$

とみなすことができる．即ち，$\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbf{Q}})$ を研究することで $\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}})$ を表現論的に上から評価することができる．以下，(用語の乱用により) τ'_k についても，$\mathrm{Aut}\, F_n$ の第 **k-Johnson 準同型写像**と呼ぶことにする．

このような観点の下，筆者はこれまでに $\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbf{Q}})$ についての研究を重点的に行い，以下のような結果を得た．

定理 1.3 (佐藤, [30]). $k \geq 2$, 及び $n \geq k+2$ に対して, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として

$$\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}) \cong \mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$$

が成り立つ.

ここで, $\mathcal{C}_n(k)$ は, 位数 k の巡回群 Cyc_k の $H^{\otimes k}$ への成分の置換作用による剰余加群であり, 具体的には,

$$\mathcal{C}_n(k) \cong H^{\otimes k}/\langle a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k - a_2 \otimes a_3 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes a_1 \,|\, a_i \in H\rangle$$

と記述される.

これによって, [30] において, 安定的な場合 (Johnson 準同型の次数 k に対して, 自由群の階数 n が十分大きい場合) の $\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ の余核が決定できたことになる. この結果を写像類群の **Johnson** 準同型の研究に応用させたいというのが本研究の主な目的である.

1.7 縮約写像と Trace map

この節では, 有理 Johnson 準同型 $\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ の安定余核に $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ が現れることを検出する写像について復習する.

Poincaré-Birkoff-Witt の定理により, H が生成する自由リー代数 $\mathcal{L}_n$ はその包絡代数 (H が生成するテンソル代数)

$$T(H) := H \oplus H^{\otimes 2} \oplus H^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

に自然に埋め込める. この埋め込みの次数 k 部分を $\iota_k : \mathcal{L}_n(k) \to H^{\otimes k}$ とおく. すると, Johnson 準同型の値域からの自然な写像

$$\mathrm{id}_{H^*} \otimes \iota_{k+1} : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)}$$

が得られる.

次に, 各 $k \geq 1$ に対して, $H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)}$ における第1成分の縮約写像を $\varphi^k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)} \to H^{\otimes k}$ とおく. 即ち, φ^k は

$$x_i^* \otimes x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_{k+1}} \mapsto x_i^*(x_{j_1}) \cdot x_{j_2} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes x_{j_{k+1}}$$

で定義される写像である. いま, この両者を合成することにより, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変な準同型写像

$$\Phi^k = \varphi^k \circ (id_{H^*} \otimes \iota_{k+1}) : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^{k+1}(\mathcal{L}_n) \to H^{\otimes k}.$$

が得られる. 用語の乱用により, この Φ^k も縮約写像と呼ぶことにする.

さて, この縮約写像 Φ^k に, 自然な全射 $H^{\otimes k} \to \mathcal{C}_n(k)$ を合成することにより, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変な準同型写像

$$\mathrm{Tr}_k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to \mathcal{C}_n(k)$$

が得られる. これを単に, **Trace map** と呼ぶことにする. 論文 [30] において, $k \geq 2$, 及び $n \geq k+2$ のとき,

(1) Tr_k は全射である.

(2) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{k,\mathbb{Q}}) = \mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$

となることを示した. これによって, 定理 1.3 が得られる.

1.8 $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解

筆者は榎本直也氏と共同で $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解についての研究を行い，組み合わせ論的な記述を与えることができた．具体的には以下の定理を得た．

定理 1.4 (榎本-佐藤, [6]). $n \geq k+2$ のとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ における，最高ウェイト λ の *GL*-既約表現 $L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}$ の重複度 $[\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k) : L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}]$ は，分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_k$-既約表現 S^{λ} を Cyc_k に制限して得られる表現における，Cyc_k の自明表現 $\mathbf{triv}_k$ の重複度 $[\mathrm{Res}_{\mathrm{Cyc}_k}^{\mathfrak{S}_k} : \mathbf{triv}_k]$ に一致する．

この定理を用いることで，次数 k を 1 つ取って固定するとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解を具体的に計算できる．$1 \leq k \leq 7$ のとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解は以下の表で与えられる．

k	$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k) = \mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}), \quad n \geq k+2$	
1	0	Andreadakis [1]
2	(2)	Pettet [26]
3	$(3) \oplus (1^3)$	Satoh [28]
4	$(4) \oplus (2,2) \oplus (2,1^2)$	Satoh [29]
5	$(5) \oplus (3,2) \oplus 2(3,1^2) \oplus (2^2,1) \oplus (1^5)$	
6	$(6) \oplus 2(4,2) \oplus 2(4,1^2) \oplus (3^2) \oplus 2(3,2,1) \oplus (3,1^3) \oplus 2(2^3)$ $\oplus (2^2,1^2) \oplus (2,1^4)$	
7	$(7) \oplus 2(5,2) \oplus 3(5,1^2) \oplus 2(4,3) \oplus 5(4,2,1) \oplus 2(4,1^3) \oplus 3(3^2,1)$ $\oplus 3(3,2^2) \oplus 5(3,2,1^2) \oplus 3(3,1^4) \oplus 2(2^3,1) \oplus 2(2^2,1^3) \oplus (1^7)$	

上の表において，(λ) は Young tableau λ に付随する，既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-多項式表現 $L^{(\lambda)}$ を表す．

注意 1.5. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ は，Cyc_k の $H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ への作用による固定点全体のなす部分加群に同型である．即ち，*Johnson* 余核 $\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ は，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として，*Kontsevich* による $a_n(k)$ に同型である．詳細は，*[13]* と *[14]* を参照されたい．

一方，上の結果を利用することで，Johnson 像 $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ の GL-既約分解についての情報も得られる．特に，$1 \leq k \leq 7$ のときは次のようになる．

k	polynomial part of $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$	non-polynomial part of $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$
1	(1)	$(1,1)$
2	(1^2)	$(2,1)$
3	$2(2,1)$	$(3,1)\oplus(2,1^2)$
4	$3(3,1)\oplus(2^2)\oplus 2(2,1^2)\oplus(1^4)$	$(4,1)\oplus(3,2)\oplus(3,1^2)$ $\oplus(2^2,1)\oplus(2,1^3)$
5	$4(4,1)\oplus 4(3,2)\oplus 4(3,1^2)$ $\oplus 4(2^2,1)\oplus 4(2,1^3)$	$(5,1)\oplus(4,2)\oplus 2(4,1^2)\oplus(3^2)$ $3(3,2,1)\oplus(3,1^3)\oplus 2(2^2,1^2)\oplus(2,1^4)$
6	$5(5,1)\oplus 7(4,2)\oplus 8(4,1^2)\oplus 4(3^2)$ $\oplus 14(3,2,1)\oplus 9(3,1^3)\oplus 3(2^3)$ $\oplus 8(2^2,1^2)\oplus 4(2,1^4)\oplus(1^6)$	$(6,1)\oplus 2(5,2)\oplus 2(5,1^2)\oplus 2(4,3)$ $\oplus 5(4,2,1)\oplus 3(4,1^3)\oplus 3(3^2,1)$ $\oplus 3(3,2^2)\oplus 5(3,2,1^2)\oplus 2(3,1^4)$ $\oplus 2(2^3,1)\oplus 2(2^2,1^3)\oplus(2,1^5)$
7	$6(6,1)\oplus 12(5,2)\oplus 12(5,1^2)\oplus 12(4,3)$ $\oplus 30(4,2,1)\oplus 18(4,1^3)\oplus 18(3^2,1)$ $\oplus 18(3,2^3)\oplus 30(3,2,1^2)\oplus 12(3,1^4)$ $\oplus 12(2^3,1)\oplus 12(2^2,1^3)\oplus 6(2,1^5)$	$(7,1)\oplus 2(6,2)\oplus 3(6,1^2)\oplus 4(5,3)$ $\oplus 8(5,2,1)\oplus 4(5,1^3)\oplus(4^2)\oplus 9(4,3,1)$ $\oplus 6(4,2^2)\oplus 12(4,2,1^2)\oplus 4(4,1^4)\oplus 6(3^2,2)$ $\oplus 9(3,2^2,1)\oplus 8(3,2,1^3)\oplus 3(3,1^5)\oplus(2^4)$ $\oplus 4(2^3,1^2)\oplus 2(2^2,1^4)\oplus(2,1^6)$

ここで，上の表において，polynomial part における (λ) は Young tableau λ に付随する既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-多項式表現 $L^{(\lambda)}$ であり，non-polynomial part における (μ) は，既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-非多項式表現 $L^{\{\mu;(1)\}}$ を表す．

さらに，[6] において我々は，$C_n^{\mathbb{Q}}(k)$ に現れる $H_{\mathbb{Q}}$ の対称テンソル，及び交代テンソルの重複度がどのようになるかを考察し，以下のような結果を得た．

定理 1.6 (榎本-佐藤, [6]). $k\geq 2$ 及び，$n\geq k+2$ に対して，

(1) $[\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}) : S^k H_{\mathbb{Q}}]=1$.

(2) k が奇数であれば，$[\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}) : \Lambda^k H_{\mathbb{Q}}]=1$.

これによって，Johnson 余核に現れる森田障害や，我々の先行研究で得られている障害 $\Lambda^k H_{\mathbb{Q}}$ の重複度が丁度 1 であることがわかる．

2 曲面の写像類群と Johnson 準同型写像

2.1 Dehn-Nielsen 埋め込み

一般に，与えられた（未知の）群の構造を調べようとするとき，その群が作用するような幾何学的対象を用意して，作用の様子を考察することは極めて自然なことであり，云わば常套手段である．このことは曲面の写像類群とて例外ではない．

写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ は定義より，曲面 $\Sigma_{g,1}$，従ってその基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1}) \cong F_{2g}$ に自然に作用する．ここで，$\Sigma_{g,1}$ の基点は境界上に取るものとし，標準的な同型 $\pi_1(\Sigma_{g,1}) \cong F_{2g}$ を1つ固定する．詳細は [7] を参照されたい．すると，この作用によって群準同型写像

$$\varphi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}\, F_{2g}$$

が得られる．Dehn-Nielsen の古典的な結果により，この φ は単射であることが知られている．より正確には以下のことが成り立つ．

定理 2.1 (Dehn and Nielsen). 各 $g \geq 1$ に対して，

$$\varphi(\mathcal{M}_{g,1}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\, F_{2g} \mid \zeta^{\sigma} = \zeta\} \subset \mathrm{Aut}\, F_{2g}$$

となる．ここで，$\zeta = [x_1, x_{2g}][x_2, x_{2g-1}] \cdots [x_g, x_{g+1}] \in F_{2g}$ である．即ち，幾何学的には，ζ は曲面の境界に平行な単純閉曲線のホモトピー類を表す語である．

この定理によって，写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_{2g}$ の部分群とみなすことができる．このような状況の下，$\mathcal{M}_{g,1}$ と IA_{2g} の共通部分

$$\mathcal{I}_{g,1} := \mathcal{M}_{g,1} \cap \mathrm{IA}_{2g}$$

を考える．$\mathcal{I}_{g,1}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ の **Torelli** 群と呼ばれる．即ち，$\mathcal{I}_{g,1}$ は，基本群のアーベル化 $\pi_1(\Sigma_{g,1})^{\mathrm{ab}} = H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$ に自明に作用するような写像類たちのなす部分群のことである．よく知られているように，自然な写像 $\rho : \mathrm{Aut}\, F_{2g} \to \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z})$ による写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の像はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ であり，以下の可換図式（2つの群の拡大を含む）が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{IA} \arrow[r] & \mathrm{Aut}\, F_{2g} \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{I}_{g,1} \arrow[r] \arrow[u, "\varphi|_{\mathcal{I}_{g,1}}"] & \mathcal{M}_{g,1} \arrow[r, "\rho|_{\mathcal{M}_{g,1}}"] \arrow[u, "\varphi"] & \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & 1
\end{tikzcd}$$

さて，自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_{2g}$ の Andreadakis-Johnson filtration と写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の共通部分

$$\mathcal{M}_{g,1}(k) := \mathcal{M}_{g,1} \cap \mathcal{A}_{2g}(k)$$

を考えることにより，Torelli 群の中心的降下列

$$\mathcal{I}_{g,1} = \mathcal{M}_{g,1}(1) \supset \mathcal{M}_{g,1}(2) \supset \cdots$$

が得られる．これを写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の **Johnson filtration** と呼ぶ．

Andreadakis-Johnson filtration のときと同様に，各次数商を

$$\mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1}) := \mathcal{M}_{g,1}(k)/\mathcal{M}_{g,1}(k+1)$$

とおく．すると，各 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1})$ は自然に $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) = \mathcal{M}_{g,1}/\mathcal{I}_{g,1}$-加群の構造を持つことがわかる．自由群の自己同型群の Johnson 準同型の写像類群への制限を考えることにより，$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$-同変な単射準同型写像

$$\tau_k^{\mathcal{M}} : \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_{2g}(k+1)) = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$$

が得られる．これを写像類群の第 k-**Johnson** 準同型写像という．一般に，曲面の Poincaré 双対性を考えることにより，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-加群としての自然な同型 $H^* \cong H$ が得られる．このような状況の下，写像類群の Johnson 準同型の値域 $H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$ を自然に，$H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$ と同一視して考えることにする．目下の課題は，各 Johnson 準同型 $\tau_k^{\mathcal{M}}$ の像，及び余核の $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-加群としての構造を明らかにすることである．現在，$1 \leq k \leq 4$ に対しての $\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$ の $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-既約分解は次のようになることが知られている．

k	$\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$	
1	$[1^3] \oplus [1]$	Johnson [10]
2	$[2^2] \oplus [1^2] \oplus [0]$	Morita [18], Hain [9]
3	$[3,1^2] \oplus [2,1]$	Asada-Nakamura [2], Hain [9]
4	$[4,2] \oplus [3,1^3] \oplus [2^3] \oplus 2[3,1] \oplus [2,1^2] \oplus 2[2]$	Morita [20]

2.2 $\mathcal{I}_{g,1}$ の降中心列

IA-自己同型群のときと同様にして，Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ の降中心列

$$\mathcal{I}_{g,1} = \mathcal{M}'_{g,1}(1) \subset \mathcal{M}'_{g,1}(2) \subset \cdots$$

を考える．すると，Johnson filtration は中心列であるから，各 $k \geq 1$ に対して $\mathcal{M}'_{g,1}(k) \subset \mathcal{M}_{g,1}(k)$ であることが分かるが，一般にこれらは一致しない．実際，Johnson による $\mathcal{I}_{g,1}$ のアーベル化を決定した仕事からも分かるように，

$$\mathcal{M}'_{g,1}(2) \neq \mathcal{M}_{g,1}(2)$$

である．

さて，各 $k \geq 1$ に対して，$\mathcal{I}_{g,1}$ の降中心列の次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{M}'_{g,1}) := \mathcal{M}'_{g,1}(k)/\mathcal{M}'_{g,1}(k+1)$ を考える．自然な包含写像 $\mathcal{M}'_{g,1}(k) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,1}(k)$ は準同型写像

$$\eta_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}'_{g,1}) \to \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1})$$

を誘導するが，これは同型写像からどれだけ離れているだろうか．今のところ，これについて正確に記述している文献は見当たらないが，Hain [9] による，以下の強力な定理が知られている．

定理 2.2 (Hain, [9]). 各 $k \geq 1$ に対して，$\eta_{k,\mathbb{Q}} : \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}'_{g,1}) \to \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ は全射である．

厳密にいえば，Hain が示したことは，写像類群の Johnson filtration の次数和

$$\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1}) := \bigoplus_{k \geq 1} \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$$

がリー代数として，次数 1 部分 $\mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ で生成されることである．これに，$\mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}'_{g,1}) \cong \mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ なる事実を組み合わせると上記の結果が得られる．

いま，
$$\tau_k'^{\mathcal{M}} := \tau_k^{\mathcal{M}} \circ \eta_k : \mathrm{gr}^k_{\mathbf{Q}}(\mathcal{M}'_{g,1}) \to H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$$
なる準同型写像を考える．用語の乱用により，$\tau_k'^{\mathcal{M}}$ についても写像類群の **Johnson** 準同型写像と呼ぶことにする．上の Hain の結果により，各 $k \geq 1$ に対して，
$$\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}'^{\mathcal{M}}) = \mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}})$$
であることが分かる．この事実は，定理 1.3 の写像類群への応用を考える上で非常に重要である．

2.3 Johnson 像と $\mathfrak{h}_{g,1}(k)$

森田茂之氏は，写像類群の Johnson 準同型の一連の研究の中で，Johnson 準同型の像が値域よりも真に小さい部分加群に含まれることを示した．この小節ではこのことについて復習する．

自然な括弧積写像 $H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1) \to \mathcal{L}_{2g}(k+2)$;
$$X \otimes Y \mapsto [X, Y]$$
の核を $\mathfrak{h}_{g,1}(k)$ とおく．写像類群の Johnson 像に関する，より鋭い評価を明示的に与えているという点で以下の定理は意義深いものである．

定理 2.3 (森田, [19]). 各 $k \geq 2$ に対して，
$$\mathrm{Im}(\tau_k^{\mathcal{M}}) \subset \mathfrak{h}_{g,1}(k)$$
が成り立つ．

上述の Hain の結果と合わせると，
$$\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}'^{\mathcal{M}}) = \mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}}) \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k)$$
が成り立つことが分かる．従って，Johnson 像 $\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}})$ が $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k)$ からどれだけずれているかを調べることが重要になってくる．以下，有理 Johnson 準同型 $\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}}$ の余核といえば，
$$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}}) := \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k)/\mathrm{Im}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}})$$
を意味するもとする．

これまでに，$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}})$ が完全に決定されているのは，$k \leq 4$ のときのみであり，以下のようになっている．

k	$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}})$	
1	0	Johnson [10]
2	0	Morita [18], Hain [9]
3	$[3]$	Asada-Nakamura [2], Hain [9]
4	$[2,1^2] \oplus [2]$	Morita [20]

これ以外について，一般的な次数に関して得られている結果は，以下に示す森田障害のみである．

定理 2.4 (森田, [19] (-中村博昭)). $k \geq 3$ を奇数とするとき，Sp-既約表現 $[k]$ の $\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$ における重複度は 1 である．

正確には，森田氏は Trace 写像を用いた研究により，$k \geq 3$ が奇数のとき，$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$ に $[k]$ 少なくとも 1 つ現れることを示し，中村氏が重複度が 1 であることを示した．

さて，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ についてであるが，その定義により，自由リー代数の GL-既約分解則と Pieri の公式，及び，GL 既約表現の Sp-分解則を用いれば，理論上，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ の Sp-既約分解を与えることは可能ではある．しかしながら，一般に，各既約成分の重複度に関する明示的な公式を与えることは甚だ難しい．一方，中村-角皆 [22] は，計算機を用いた計算により，$1 \leq k \leq 14$ に対して，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ の Sp-既約分解の表を与えている．筆者は，2004 年の秋に，中村氏の御厚意によりその表を提供して頂き，閲覧させて頂く機会に恵まれた．その表によると，$k = 5, 6, 9, 10, 13, 14$ に対して，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ の Sp-既約分解に $[1^k]$ が重複度 1 で現れていることが分かる．

元々，中村氏は 1996 年に森田氏へ宛てた私信の中で，$k \equiv 1 \pmod 4$, $k \geq 5$ の場合に有理 Johnson 余核 $\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$ に $[1^k]$ が重複度 1 で現れるだろうという予想を述べており，筆者にもその可能性について 2004 年の秋に言及して頂いた．本稿は，この予想に関する肯定的解決を報告するものである．

3 主定理

以下が本稿の主定理である．

定理 3.1 (榎本-佐藤, [7]). $k \geq 5$, $k \equiv 1 \pmod 4$ なる k に対して，Sp-既約表現 $[1^k]$ の $\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})$ における重複度は 1 である．

この定理の証明は以下の 2 つのことを示すことで完結する．

(1) $[1^k]$ の $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ における重複度が丁度 1 であること．

(2) $k \geq 5$, $k \equiv 1 \pmod 4$ のとき，$[1^k]$ は Johnson 像に含まれない．

(1) についてはの自由リー代数の GL-既約分解を組合せ論的に記述する公式，及び (GL, Sp)-表現分岐則を用いて証明できる．(2) は $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ における $[1^k]$ の極大ベクトルを具体的に構成し，それが合成準同型写像

$$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k) \hookrightarrow H_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1) \xrightarrow{\cong} H_{\mathbb{Q}}^{*} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_k^{\mathbb{Q}}} \mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$$

で消えないことを直接証明する．ここで，2 つめの同型写像は Poincaré 双対性による同型写像である．

定理 1.3 と定理 2.2 により，写像類群の Johnson 像は，上の合成写像により消えることが分かるので上記の 2 つの結果から主定理の主張が得られる．

4 謝辞

本文中にも述べたように，筆者の元指導教官である中村博昭先生には，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k)$ の Sp-既約分解表を快く提供して頂き，それが本研究を行う 1 つのきっかけとなったのは紛れもない事実である．ここにお礼を申し上げる．また，本研究を遂行するにあたり，森田茂之先生，逆井卓也氏には，休日であるにもかかわらずセミナーを行って頂き，写像類群の Johnson 準同型に関して数々の有益なご助言を頂くことができた．これについても是非感謝の意を表したい．

筆者が 2004 年の夏に，Trace 写像についての研究を行い，$\tau_{k,\mathbf{Q}}'$ の余核に $\Lambda^k H_{\mathbf{Q}}$ という新しい障害が現れることを示してから既に 7 年が経過している．当時，Johnson 余核の研究に GL 表現論を積極的に導入すれば，もう少し踏み込んだ，深い結果が得られるのではないかという淡い期待を抱きつつも，表現論に関する知識の乏しい筆者の怠慢によりこの問題は放置状態となっていた．偶々，京都大学で特定助教（グローバル COE）として同僚となった榎本直也氏にこの話を持ちかけたところ，貴重なご自身の研究の時間を割いてまで熱心に取り組んで頂き，自由群の自己同型群のみならず，曲面の写像類群への応用にまで及ぶ結果を出せたことは非常に嬉しく思っている．筆者が長年悩まされ続けてきた得体の知れない加群を，次々と縦横無尽に既約分解しその構造を明らかにしていく姿は実に鮮やかであり清々しかった．この場を借りて榎本直也氏に心から謝意を表する次第である．

References

[1] S. Andreadakis; On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.

[2] M. Asada and H. Nakamura; On graded quotient modules of mapping class groups of surfaces, Israel J. Math. 90 (1995), 93-113.

[3] S. Bachmuth; Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 1-17.

[4] F. Cohen and J. Pakianathan; On Automorphism Groups of Free Groups, and Their Nilpotent Quotients, preprint.

[5] F. Cohen and J. Pakianathan; On subgroups of the automorphism group of a free group and associated graded Lie algebras, preprint.

[6] N. Enomoto and T. Satoh; On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, preprint.

[7] Naoya Enomoto and Takao Satoh; New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, preprint.

[8] B. Farb; Automorphisms of F_n which act trivially on homology, in preparation.

[9] R. Hain; Infinitesimal presentations of the Torelli group, Journal of the American Mathematical Society 10 (1997), 597-651.

[10] D. Johnson; An abelian quotient of the mapping class group, Math. Ann. 249 (1980), 225-242.

[11] M. Kassabov; On the automorphism tower of free nilpotent groups, thesis, Yale University (2003).

[12] N. Kawazumi; Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, The University of Tokyo. UTMS 2005-18 (2005), `http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.GT/0505497`.

[13] M. Kontsevich; Formal (non)commutative symplectic geometry, The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1993) 173-187.

[14] M. Kontsevich; Feynman diagrams and low-dimensional topology, First European Congress of Mathematics, Vol. II, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, (1994), 97-121.

[15] S. Krstić, J. McCool; The non-finite presentability in $IA(F_3)$ and $GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, Invent. Math. 129 (1997), 595-606.

[16] W. Magnus; Über n-dimensinale Gittertransformationen, Acta Math. 64 (1935), 353-367.

[17] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar; Combinatorial group theory, Interscience Publ., New York (1966).

[18] S. Morita; Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I, Topology, 28 (1989), 305-323.

[19] S. Morita; Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Mathematical Journal 70 (1993), 699-726.

[20] S. Morita; Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect, Geometry and Topology Monographs Vol. 2 (1999), 349-406.

[21] S. Morita; Cohomological structure of the mapping classs group and beyond, preprint.

[22] H. Nakamura and H. Tsunogai; Atlas of pro-l mapping class groups and related topics, in preparation.

[23] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. 78 (1918), 385-397.

[24] J. Nielsen; Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. 91 (1924), 169-209.

[25] J. Nielsen; Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen Zweiseitigen Fläschen, Acta Math. 50 (1927), 189-358.

[26] A. Pettet; The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n, Algebraic and Geometric Topology 5 (2005) 725-740.

[27] C. Reutenauer; Free Lie Algebras, London Mathematical Societymonographs, new series, no. 7, Oxford University Press (1993).

[28] T. Satoh; New obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of the London Mathematical Society, (2) 74 (2006), 341-360.

[29] T. Satoh; On the fourth Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of Algebra, 323 (2010), 3182-3201.

[30] T. Satoh; On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, to appear.