数理解析研究所講究録
第 1779 巻 2012 年 27-51

結晶粒界現象に関連する1次元 フェーズ・フィールドモデル

千葉大学教育学部　白川 健 (Shirakawa, Ken)
Faculty of Education, University, Japan

サレジオ工業高等専門学校 一般教育科　渡邉 紘 (Watanabe, Hiroshi)
Department of General Education, Salesian Polytechnic, Japan

神奈川大学工学部　山崎 教昭 (Yamazaki, Noriaki)
Faculty of Engineering, Kanagawa University, Japan

1 導入

本論文を通し, $0 < T < \infty$, $(0,T) \subset \mathbb{R}$ を有界な時間開区間とし, $\Omega := (-L, L) \subset \mathbb{R}$ を $\pm L \in \mathbb{R}$ を境界点とする1次元空間領域とする. また, 時間と空間の直積集合を $Q_T := (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ とおく.

本研究の主題は, 以下2つの放物型初期値・境界値問題から構成される偏微分方程式のシステム (S) である.

(S):

$$\begin{cases} \eta_t - \eta_{xx} + g(\eta) + \alpha'(\eta)|D\theta| = 0 \ \text{ in } Q_T, \\ \eta_x(t, \pm L) = 0, \ \ t \in (0,T), \\ \eta(0,x) = \eta_0(x), \ \ x \in \Omega; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(\eta)\theta_t - \left(\alpha(\eta) \dfrac{D\theta}{|D\theta|} \right)_x = 0 \ \text{ in } Q_T, \\ \alpha(\eta(t, \pm L)) \dfrac{D\theta}{|D\theta|}(t, \pm L) = 0, \ \ t \in (0,T), \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \ \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

このシステム (S) は, Kobayashi-Warren-Carter [19, 20] において提唱された結晶粒界の数学モデル (Kobayashi-Warren-Carter モデル) に基づいている. 本来の Kobayashi-Warren-Carter モデルでは空間領域は2次元領域とされており, その内部に分布する多結晶構造の時間的空間的変化の再現が主目的となっている. 従って, 空間領域を1次元領域とするシステム (S) は, Kobayashi-Warren-Carter モデルに単純化を施した, 一つのモデルケースとして考える事が出来る.

Kobayashi-Warren-Carter モデルでは, 空間領域内の物理的状況 (phase) は以下のベクトル値の分布関数によって再現される:

$$(t,x) \in Q_T \mapsto \eta(t,x)(\cos\theta(t,x), \sin\theta(t,x)).$$

その上で, ここでは上記の $\eta = \eta(t,x)$ と $\theta = \theta(t,x)$ の 2 つが未知関数とされ, η と θ のそれぞれは「結晶の配向度」と「結晶方向の平均偏角」を表す相関数とされる. 特に, 結晶配向度の η に関しては $0 \leq \eta \leq 1$ in Q_T をいう条件が課されており, $\eta = 1$ ならば結晶方向が完全に揃った状態 (完全配向状態) を表し, $\eta = 0$ ならば逆に全く不揃いの状態 (無配向状態) を表すとされる. 他でも, 数式 (1.1)-(1.2) 中の $\alpha = \alpha(\eta)$, $\alpha_0 = \alpha_0(\eta)$, $g = g(\eta)$ はすべて与えられた関数であり, $\eta_0 = \eta_0(x)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$ は与えられた初期値である. また, α' は関数 α の導関数を表す.

システム (S) は, 自由エネルギーと呼ばれる以下の汎関数に基づいて導出される:

$$[\eta, \theta] \mapsto \mathscr{F}(\eta, \theta) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\eta_x|^2\, dx + \int_\Omega \hat{g}(\eta)\, dx + \int_\Omega \alpha(\eta)|D\theta|. \tag{1.3}$$

ここに, 式 (1.3) 中の $\hat{g}$ は関数 g の原始関数である. 実際, 式 (1.1) と式 (1.2) のそれぞれには, 自由エネルギー $\mathscr{F}$ の η と θ それぞれに関する L^2-勾配流が対応するが, それらの数式表現はあくまで形式的なものであり, 数学的に厳密な意味づけに関してはこの後の第 2 節において変分学的手法に基づいて与えられる.

自由エネルギー $\mathscr{F}$ の特徴的な点は, その数式表現の中に未知関数 θ の重み付き全変動測度 $\alpha(\eta)|D\theta|$ が組み込まれており, 更にその重み $\alpha(\eta)$ がもう片方の未知関数 η に依存している点である. 全変動測度の項は物理的には結晶構造によくみられるファセット構造 (facet) の再現を目的に導入されたものであるが, その数学的な取り扱いは大変難しく, それ故にシステム (S) に対する数学的考察では, 通常の偏微分方程式としては「規格外」とでも言うべき以下 2 つの状況が現れる.

(状況 1) 期待出来る正則性の弱さ. 方程式 (1.2) は, いわゆる特異拡散方程式 (cf. [11, 12, 18]) であるため, 未知関数 θ の空間的変動については, "$\theta(t) \in BV(\Omega)$, a.e. t" という正則性しか期待できない. 従って方程式 (1.1) は測度 $|D\theta|$ を含む放物型方程式という事になるが, その際には測度 $|D\theta|$ の重みである $\alpha'(\eta)$ の連続性, ひいては未知関数 η の連続性も同時に要求される. 従って, システム (S) については, そもそも解をどのクラスで設定すればよいかという段階から, 難しい状況が発生する.

(状況 2) エネルギーの時間依存性. 式 (1.3) から, 方程式 (1.2) は, 時間依存するエネルギー $\theta \in L^2(\Omega) \mapsto \alpha(\eta(t))|D\theta|(\Omega)$ の勾配流という事になる. こうした時間依存する状況を扱うための数学理論として例えば [16, 23, 26] などがあるが, 前述の通り (S) の解からは通常より弱い正則性しか得られないため, 今回はこうした 既存の一般論に頼った考察はあまり期待できない.

この難しさを緩和するため, 論文 [19, 20] では十分小さな定数 $\nu > 0$ を用意し, その上で特異拡散にラプラシアンの項 $-\nu\theta_{xx}$ を追加したシステムを, 別個の数学モデルとして提案している. ここで各 $\nu > 0$ に対し, このラプラシアンによる緩和項の付いたシステム (緩和システム) を $(\mathrm{S})_\nu$ と表すと, システム $(\mathrm{S})_\nu$ に対する自由エネルギーは以下で設定される:

$$[\eta, \theta] \mapsto \mathscr{F}_\nu(\eta, \theta) := \mathscr{F}(\eta, \theta) + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\theta_x|^2\, dx. \tag{1.4}$$

従って, 本論文の主題であるシステム (S) は, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ において $\nu \searrow 0$ とする時の極限問題として捉え直す事も可能である.

緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ に関しては先で指摘された規格外な状況は現れないため, Kobayashi-Warren-Carter [19, 20] の数値計算例をはじめとして, Ito-Kenmochi-Yamazaki [13, 14, 15] や Kenmochi-Yamazaki [17] の数学理論による考察に至るまで, 現在までに様々な研究成果が報告されている.

この様な背景を踏まえた上で本論文では, 数学的厳密性を有しながらなおかつ前述の(状況 1)-(状況 2) で指摘された規格外な状況の取り扱いをも可能とする様な, オリジナルシステム (S) の解の定義を与える. 更に, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ に対する $\nu \searrow 0$ とする時の極限問題を考察する事によって, この定義法に基づく解の存在を実証する.

以下に本論文で展開される議論の概要を述べる. 本論文の主定理は, 次の第 2 節において示される. この主定理は本論文における結論部といってよいが, その核心には定義 2.1 で示される解の定義法も本質的に関わっている. 続く第 3 節では, 主定理の証明を大きく以下 2 つのパートに分けて考え, それぞれのパートにおける議論の道筋が示される.

(Part I) 近似極限の存在　緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ をシステム (S) の近似問題として捉え, 近似解の列 $\{[\eta_\nu, \theta_\nu] \,|\, \nu > 0\}$ の $\nu \searrow 0$ とする時の集積点 $[\eta, \theta]$ (近似極限) の存在を証明する.

(Part II) 近似極限のシステム (S) への適合性　近似極限 $[\eta, \theta]$ がシステム (S) の解となっている事 (適合性) を検証する.

この第 3 節では議論の鍵となる事実を「補題」としてまとめておき, 補題の証明については詳述しない. その上で, (Part I) と関わる補題については次の第 4 節で証明し, (Part II) と関わる補題については最後の第 5 節において証明を与える.

2　主定理の概要

はじめに, 本論文において用いられる記法について明記する.

一般的な記法. 一般の Banach 空間 X において, X のノルムを $|\cdot|_X$ と表す. また特に X が Hilbert 空間の場合は, X の内積を $(\cdot, \cdot)_X$ と表す.

記法の簡略化. 本論文を通し, 以下の様な記法の略記を行う.

$$C := C(\Omega),\ C_\mathrm{c} := C_\mathrm{c}(\Omega),\ C_0 := C_0(\Omega)\ (= \overline{C_\mathrm{c}(\Omega)}^{C(\overline{\Omega})}),$$

$$\begin{cases} C^m := C^m(\Omega),\ C^m_\mathrm{c} := C^m \cap C_\mathrm{c}, \\ L^p := L^p(\Omega),\ W^{m,p} := W^{m,p}(\Omega),\ W^{m,p}_0 := W^{m,p}_0(\Omega), \\ H^m := H^m(\Omega)\ (= W^{m,2}(\Omega)),\ H^m_0 := H^m_0(\Omega)\ (= W^{m,2}_0(\Omega)), \end{cases}$$

$$1 \le \forall p \le \infty,\ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

また, 空間 H^1 と $(H^1)^*$ の間の双対線形形式を $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ と表し, $F: H^1 \longrightarrow (H^1)^*$ を以下で与えられる双対作用素とする:

$$\langle Fw, v\rangle_* := (w,v)_{H^1} = (w,v)_{L^2} + (w_x, v_x)_{L^2}, \quad \forall v, \forall w \in H^1. \tag{2.1}$$

<u>測度論と関連する記法.</u> 任意の次元 $d \in \mathbb{N}$ に対し, d-次元 Lebesgue 測度を $\mathscr{L}^d$ と表す. また特に断らない場合, "a.e.", "dt", "dx" 等の記法に対しては, 1 次元 Lebesgue 測度 $\mathscr{L}^1$ を用いる. 他でも, 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ に対し, U 上の Radon 測度全体の空間を $\mathcal{M}(U)$ と表す. 一般に, 空間 $\mathcal{M}(U)$ は Banach 空間 $C_0(U)$ $(= \overline{C_c(U)}^{C(\overline{U})})$ の双対空間である事が知られる. 他でも, 本論文では先の略記法に倣って, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega)$ $(= \mathcal{M}(-L,L))$ とおく.

<u>BV-理論における記法.</u> (cf. [1, 6, 9, 10]) $d \in \mathbb{N}$ を任意の次元とし, $U \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とする. ここで, 関数 $v \in L^1(U)$ の超関数の意味での勾配 Dv が Ω 上の Radon 測度となるとき, 即ち $Dv \in \mathcal{M}(U)^d$ となるとき, 関数 v は U 上の有界変動関数と呼ばれる. 有界変動関数は簡単に BV-関数と呼ばれる事もある.

開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ 上の有界変動関数全体の空間を $BV(U)$ と表すが, 本論文では先の略記法に倣って, $BV := BV(\Omega)$ $(= BV(-L,L))$ とおく. 任意の $v \in BV(U)$ に対し, Radon 測度 Dv は v の変動測度 (variation measure) と呼ばれる. また各 $v \in BV(U)$ に対する Dv の全変動 $|Dv|$ は v の全変動測度 (total variation measure) と呼ばれ, 一般に以下の等式が成立する事がよく知られる:

$$|Dv|(U) = \sup\left\{ \int_U v \operatorname{div}\varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \in C_c^1(U), \quad |\varphi| \le 1 \text{ on } U \right\}.$$

空間 $BV(U)$ は以下のノルムを導入する事により一つの Banach 空間を作る:

$$|v|_{BV(U)} := |v|_{L^1(U)} + |Dv|(U), \ \forall v \in BV(U).$$

また, 開集合 U が Lipschitz 連続な境界を持つならば, 空間 $BV(U)$ は空間 $L^{d/(d-1)}(U)$ に連続的に埋め込まれ, 任意の $1 \le p < d/(d-1)$ に対して空間 $L^p(U)$ にコンパクトに埋め込まれる (cf. [1, Corollary 3.49], or [6, Thorems 10.1.3-10.1.4]). 従って特に $U = \Omega$ $(= (-L,L))$ である場合は, 空間 BV は空間 L^∞ に連続的に埋め込まれ, 任意の指数 $1 \le p < \infty$ に対して空間 L^p にコンパクトに埋め込まれる. 他でも $v \in BV$ ならば, すべての $-L \le r < \ell \le L$ に対して片側極限:

$$v(\ell - 0) = \lim_{x \nearrow \ell} v(x), \quad v(r+0) = \lim_{x \searrow r} v(x);$$

が存在する (cf, [1, Theorem 3.28]). 従って 1 変数の BV-関数 $v \in BV$ に対しては, いつでも $\mathbb{R}$ 上への自然な拡張 $v^{\mathrm{ex}} \in L^\infty(\mathbb{R})$ を以下の様に定義する事が出来る:

$$v^{\mathrm{ex}}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{if } x \in \Omega = (-L,L), \\ v(L-0), & \text{if } x \ge L, \\ v(-L+0), & \text{if } x \le -L, \end{cases} \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

このとき更に, 余面積公式 (cf. [1, Theorem 3.40], [6, Theorem 10.3.3], [9, Section 5.5], or [10, 1.23 Theorem]) を用いれば, 以下の関係式を容易に確認する事が出来る:

$$\int_\Omega |Dv| = \int_{\mathbb{R}} |Dv^{\mathrm{ex}}|, \quad \forall v \in BV.$$

独自の記法. 任意の正値関数 $\beta \in C(\mathbb{R})$ および任意の $w \in C(\overline{\Omega})$ に対し, 空間 L^2 上の汎関数 $\Phi_\beta(w; \cdot)$ を以下で定義する:

$$v \in L^2 \mapsto \Phi_\beta(w; v) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \beta(w)|Dv|, & \text{if } v \in BV, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易に確認出来る様に, この汎関数は L^2 上の適性下半連続凸関数となる. これを基に, 今後は凸関数 $\Phi_\beta(w; \cdot)$ の劣微分を $\partial\Phi_\beta(w; \cdot)$ と表す.

補足 2.1 (自由エネルギーの厳密な定義) 空間1次元の設定では, Sobolev 空間 H^1 は空間 $C(\overline{\Omega})$ にコンパクトに埋め込まれる. 従って, 先で用意した記法を用いれば, 式 (1.3) で大まかに設定した自由エネルギー $\mathscr{F}$ に対して, 以下の様な数学的に厳密な定義を与える事が出来る:

$$[w, v] \in L^2 \times L^2 \mapsto \mathscr{F}(w, v) := \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |w_x|^2\,dx + \int_\Omega \hat{g}(w)\,dx + \Phi_\alpha(w; v), \\ \qquad\qquad \text{if } [w, v] \in H^1 \times BV, \\ \infty, \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

次に, 本論文の主定理で仮定される条件について述べる. 主定理では以下 5 つの条件が仮定される.

(A1) 式 (1.1) 中の摂動項 $g = g(\eta)$ は $\mathbb{R}$ 上局所 Lipschitz 連続な関数で, 条件:

$$g \le 0 \text{ on } (-\infty, 0], \quad g \ge 0 \text{ on } [1, \infty);$$

を満たすと仮定する. 従って, 関数 g には非負値な原始関数 $\hat{g}$ が存在する事も仮定してよい.

(A2) 式 (1.2) 中の θ_t の重み関数 $\alpha_0 = \alpha_0(\eta)$ については, $\mathbb{R}$ 上局所 Lipschitz 連続な関数であると仮定する.

(A3) 式 (1.2) 中の特異拡散の重み $\alpha = \alpha(\eta)$ については, $\mathbb{R}$ 上の C^1-級の凸関数で, 条件 $\alpha'(0) = 0$ を満たすと仮定する.

(A4) 以下を満たす定数 $\delta_\alpha > 0$ の存在を仮定する:

$$\alpha_0(\tau) \ge \delta_\alpha, \quad \alpha(\tau) \ge \delta_\alpha, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

(A5) 初期値の組 $[\eta_0, \theta_0]$ は, 以下の集合 $D_0 \subset H^1 \times BV$ 範囲から選ぶ:

$$D_0 := \left\{ \, [w, v] \in H^1 \times BV \;\middle|\; 0 \le w \le 1 \text{ on } \overline{\Omega} \, \right\} \subset C(\overline{\Omega}) \times L^\infty.$$

補足 2.2 (具体的な設定例) 論文 [19, 20] を参考にすると, 上記の仮定を満足する様な g, α_0, α の設定として, 以下の様な具体例が考えられる:

$$g(\tau)=\tau-1,\ \ \hat{g}(\tau):=\frac{1}{2}(\tau-1)^2,\ \ \alpha_0(\tau)=\alpha(\tau)=\tau^2+\delta_\alpha,\ \ \forall\tau\in\mathbb{R}.$$

先で準備した記法および仮定に基づいた上で, 本論文ではシステム (S) の解を以下の様に定義する.

定義 2.1 (解の定義) 関数の組 $[\eta,\theta]\in L^2(0,T;L^2)\times L^2(0,T;L^2)$ が以下 3 つの条件を満足するとき, $[\eta,\theta]$ をシステム (S) の解という.

(S1) $\eta\in W^{1,2}(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;H^1)\subset C(\overline{Q_T})$, $0\le\eta\le 1$ on $\overline{Q_T}$;
$\theta\in W^{1,2}(0,T;L^2)$, $|D\theta(\,\cdot\,)|(\Omega)\in L^\infty(0,T)$, $\alpha'(\eta)|D\theta|\in L^2(0,T;(H^1)^*)$.

(S2) η は以下の $(H^1)^*$ 上での発展方程式の初期値問題の解となる:

$$\begin{cases}\eta_t(t)+F\eta(t)-\eta(t)+g(\eta(t))+\alpha'(\eta(t))|D\theta(t)|=0\ \text{ in } (H^1)^*,\ \ t\in(0,T),\\ \eta(0)=\eta_0\ \text{ in } (H^1)^*.\end{cases}\tag{2.3}$$

これは, η が以下の時間発展する変分不等式の初期値問題の解である事と同値である:

$$\begin{cases}(\eta_t(t)+g(\eta(t)),w)_{L^2}+(\eta_x(t),z_x)_{L^2}+\displaystyle\int_\Omega w\alpha'(\eta(t))|D\theta(t)|=0,\\ \qquad\qquad \forall w\in H^1,\ \text{a.e. } t\in(0,T),\\ \eta(0)=\eta_0\ \text{ in } L^2.\end{cases}$$

(S3) θ は以下の L^2 上での発展方程式の初期値問題の解となる:

$$\begin{cases}\alpha_0(\eta(t))\theta_t(t)+\partial\Phi_\alpha(\eta(t);\theta(t))\ni 0\ \text{ in } L^2,\ \ t\in(0,T),\\ \theta(0)=\theta_0\ \text{ in } L^2.\end{cases}\tag{2.4}$$

これは, θ が以下の時間発展する変分不等式の初期値問題の解である事と同値である:

$$\begin{cases}(\alpha_0(\eta(t))\theta_t(t),\theta(t)-z)_{L^2}+\Phi_\alpha(\eta(t);\theta(t))\le\Phi_\alpha(\eta(t);z),\\ \qquad\qquad \forall z\in BV,\ \text{a.e. } t\in(0,T),\\ \theta(0)=\theta_0\ \text{ in } L^2.\end{cases}$$

補足 2.3 (解の定義に関する幾つかの補足) 条件 (S1) にある $\eta\in C(\overline{Q_T})$ という正則性は Ω が 1 次元領域でなければ成立しない. しかしながら, この連続性こそが導入の (状況 1) で指摘された規格外な状況の扱いを可能としている. 他でも, 条件 (S1)-(S2) により, a.e. $t\in(0,T)$ に対して $\alpha'(\eta(t))|D\theta(t)|$ は結果的に Hilbert 空間 $(H^1)^*$ と Banach 空間 $\mathcal{M}$ $(=C_0^*)$ の両方に属する事になる. 更に条件 (S3) からは, 劣微分作用素 $\partial\Phi_\alpha(\eta(t);\theta(t))$ が式 (1.2) 中の特異拡散 $-(\alpha(\eta)\frac{D\theta}{|D\theta|})_x$ に対する数学的に厳密な表現を与えている事が読み取れるが, これが特異拡散の適切かつ自然な表現となる事については [2, 3, 4, 11, 12, 18, 21, 24, 25] をはじめとする様々な文献から確認する事が出来る.

以上までを準備すれば, 本論文の主定理の主張は以下の様に簡潔にまとめられる.

主定理 (システム (S) の解の存在定理) 条件 (A1)-(A5) を仮定するならば, システム (S) には少なくとも一つの解 $[\eta,\theta]$ が存在する.

補足 2.4 (一意性に関するコメント) 空間 1 次元という設定で初期値に十分な正則性があれば, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ には解の一意性も成立するという研究報告がある (cf. [13]). しかしながら, 本論文で扱われるシステム (S) に関しては, 空間 1 次元という設定でも解の一意性の保証は難しく, 未解決問題の一つとなっている.

3 主定理の証明の概要

本節では, 主定理の証明の大まかな道筋が示される. 導入で述べた様に, 証明中は緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$, $\nu>0$, をシステム (S) の近似問題として扱う. 従ってここではまず, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ の正確な数式表現を与える事から始めるが, その際には以下の記法を準備しておくと数学的記述を行う上で便利である.

Laplacian の作用素. 集合 $D_N \subset L^2$ を, $D_N := \left\{ z \in H^2 \;\middle|\; z_x(\pm L) = 0 \right\}$ と定め, 作用素 $A_N : D_N \subset L^2 \longrightarrow L^2$ を以下で定義する:

$$v \in D_N \mapsto A_N v := -v_{xx} + v \in L^2. \tag{3.1}$$

容易に確認出来る様に, A_N は $L^2 \times L^2$ 内で極大単調なグラフを持つ. また, 作用素 A_N は双対作用素 $F : H^1 \longrightarrow (H^1)^*$ の $D_N \subset H^1$ への制限 $F|_{D_N}$ と一致する.

全変動に対する近似凸関数. 任意の定数 $\nu>0$ を固定した上で, 任意の正値関数 $\beta \in C(\mathbb{R})$ と任意の $w \in L^2$ に対し, 空間 L^2 上の適正下半連続凸関数 $\Phi_{\beta,\nu}(w;\cdot)$ を以下で定義する:

$$v \in L^2 \mapsto \Phi_{\beta,\nu}(w;v) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \beta(w)|v_x|\,dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |v_x|^2\,dx, & \text{if } v \in H^1, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

また, この凸関数の L^2 の位相での劣微分を $\partial\Phi_{\beta,\nu}(w;\cdot)$ と表す.

各 $\nu>0$ に対し, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ は 式 (1.4) で与えられる自由エネルギーの勾配流のシステムとして導出される. 本論文では, 先で準備した記法を用いて, このシステム $(\mathrm{S})_\nu$ を以下 2 つの発展方程式による初期値問題の連立系として定義する.

$(\mathrm{S})_\nu$:

$$\begin{cases} (\eta_\nu)_t(t) + A_N\eta_\nu(t) - \eta_\nu(t) + g(\eta_\nu(t)) + \alpha'(\eta_\nu(t))|(\theta_\nu)_x(t)| = 0 \ \text{ in } L^2, \ t \in (0,T), \\ \eta_\nu(0) = \eta_{0,\nu} \ \text{ in } L^2; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(\eta_\nu(t))(\theta_\nu)_t(t) + \partial\Phi_{\alpha,\nu}(\eta_\nu(t);\theta_\nu(t)) \ni 0 \quad \text{in } L^2, \quad t \in (0,T), \\ \theta_\nu(0) = \theta_{0,\nu} \quad \text{in } L^2. \end{cases} \tag{3.4}$$

各 $\nu > 0$ において, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ の解は以下の正則性:

$$\begin{cases} \eta_\nu \in W^{1,2}(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \subset C(\overline{Q_T}),\ 0 \leq \eta_\nu \leq 1 \text{ on } \overline{Q_T}, \\ \theta_\nu \in W^{1,2}(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^1) \subset C(\overline{Q_T}); \end{cases} \tag{3.5}$$

を有し, なおかつ条件式 (3.3)-(3.4) を満たす関数の組 $[\eta_\nu, \theta_\nu] \in L^2(0,T;L^2) \times L^2(0,T;L^2)$ として定義される. また式 (3.2) で定めた凸関数を用いれば, 式 (1.4) において大まかに設定した $(\mathrm{S})_\nu$ に対する自由エネルギー $\mathscr{F}_\nu$ に関しても, その数学的に厳密な定義を以下の様に与える事が出来る:

$$[w,v] \in L^2 \times L^2 \mapsto \mathscr{F}_\nu(w,v) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |w_x|^2\,dx + \int_\Omega \hat{g}(w)\,dx + \Phi_{\alpha,\nu}(w;v), \\ \qquad \text{if } [w,v] \in H^1 \times H^1, \\ \infty, \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.6}$$

以上を準備した上で, 本論文では主定理の証明を導入で設定した (Part I) と (Part II) の 2 つのパートに分けて議論する.

(Part I) 近似極限の存在

はじめに, 近似問題である緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ の基本性質に関する以下の補題を準備する.

補題 3.1 (緩和システムにおける可解性とエネルギー消散性) 定数 $\nu > 0$ を固定し, 条件 (A1)-(A4) を仮定する. その上で, 関数の組 $[\eta_{0,\nu}, \theta_{0,\nu}]$ (初期値) に対し, 以下の条件を仮定する:

$$[\eta_{0,\nu}, \theta_{0,\nu}] \in D_0 \cap (H^1 \times H^1) \subset C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}).$$

このとき, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ には解 $[\eta_\nu, \theta_\nu]$ が一意的に存在する. 更に 2 つの関数:

$$t \in [0,T] \mapsto \Phi_{\alpha,\nu}(\eta_\nu(t);\theta_\nu(t)) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T] \mapsto \mathscr{F}_\nu(\eta_\nu(t),\theta_\nu(t)) \in \mathbb{R};$$

はどちらも区間 $[0,T]$ 上で絶対連続であり, なおかつ以下の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_s^t \left(|(\eta_\nu)_t(\tau)|_{L^2}^2 + \left|\sqrt{\alpha_0(\eta_\nu(\tau))}(\theta_\nu)_t(\tau)\right|_{L^2}^2 \right) d\tau + \mathscr{F}_\nu(\eta_\nu(t),\theta_\nu(t)) \\ = \mathscr{F}_\nu(\eta_\nu(s),\theta_\nu(s)), \quad \forall s, \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

上記の補題に加えて, 以下のエネルギーの連続依存性に関する補題が, 近似極限の考察における議論の要となる.

補題 3.2 (エネルギーの Mosco 収束) $\beta \in C(\mathbb{R})$ を与えられた関数とし，以下の条件を仮定する:

$$\exists \delta_\beta > 0 \ \text{ s.t. } \ \beta \geq \delta_\beta \text{ on } \mathbb{R}.$$

また，関数 $w_0 \in C(\overline{\Omega})$ および関数列 $\{w_\nu \,|\, \nu > 0\} \subset C(\overline{\Omega})$ に対し，以下の収束条件を仮定する:

$$w_\nu \to w_0 \ \text{ in } C(\overline{\Omega}) \text{ as } \nu \searrow 0. \tag{3.8}$$

このとき，$\nu \searrow 0$ とすると，凸関数の列 $\{\Phi_{\beta,\nu}(w_\nu;\cdot) \,|\, \nu > 0\}$ は凸関数 $\Phi_\beta(w_0;\cdot)$ へ空間 L^2 上で Mosco 収束する．即ち凸関数の列 $\{\Phi_{\beta,\nu}(w_\nu;\cdot) \,|\, \nu > 0\}$ は以下 2 つの条件を満足する (cf. [22]):

(m1) $\{\check{v}_\nu \,|\, \nu > 0\} \subset L^2$, $\check{v}_0 \in L^2$ であり，なおかつ $\check{v}_\nu \to \check{v}_0$ weakly in L^2 as $\nu \searrow 0$ ならば，$\liminf_{\nu \searrow 0} \Phi_{\beta,\nu}(w_\nu;\check{v}_\nu) \geq \Phi_\beta(w_0;\check{v}_0)$;

(m2) $\forall \hat{v}_0 \in D(\Phi_\beta(w_0;\cdot)) \ (= BV)$, $\exists \{\hat{v}_\nu \,|\, \nu > 0\} \subset H^1$, s.t. $\hat{v}_\nu \to \hat{v}_0$ in L^2, $\Phi_{\beta,\nu}(w_\nu;\hat{v}_\nu) \to \Phi_\beta(w_0;\hat{v}_0)$, as $\nu \searrow 0$.

以上 2 つの補題 3.1-3.2 を準備すれば，(Part I) の近似極限の存在は，以下の手順で示す事が出来る．

関数の組 $[\eta_0, \theta_0] \in D_0$ を任意に取り，関数 $\theta_0 \in BV$ に対する近似列 $\{\bar{\theta}_{0,\nu} \,|\, \nu > 0\} \subset H^1$ を以下の条件を満たす様に選ぶ:

$$\bar{\theta}_{0,\nu} \to \theta_0 \ \text{ in } L^2, \quad \Phi_{\alpha,\nu}(\eta_0;\bar{\theta}_{0,\nu}) \to \Phi_\alpha(\eta_0;\theta_0), \quad \text{as } \nu \searrow 0. \tag{3.9}$$

この様な近似列は，補題 3.2 中の条件 (m2) を，

$$\beta = \alpha \text{ in } C(\mathbb{R}), \ \ w_\nu = w_0 = \eta_0 \text{ in } C(\overline{\Omega}), \forall \nu > 0, \ \ \hat{v}_0 = \theta_0 \text{ in } L^2;$$

という設定の下で適用すれば得られる．このとき，条件 (3.9) から，

$$\mathscr{F}_\nu(\eta_0, \bar{\theta}_{0,\nu}) \to \mathscr{F}(\eta_0, \theta_0) \ \text{ as } \nu \searrow 0,$$

となるため，定数 $0 < \nu_0 < 1$ を十分小さく選べば，

$$R_0 := \sup_{0<\nu\leq\nu_0} \mathscr{F}_\nu(\eta_0, \bar{\theta}_{0,\nu}) < \infty, \tag{3.10}$$

とする事が出来る．

次に，初期条件 $[\eta_{0,\nu}, \theta_{0,\nu}] = [\eta_0, \bar{\theta}_{0,\nu}]$ を満たす緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ の解の列を $\{[\bar{\eta}_\nu, \bar{\theta}_\nu] \,|\, \nu > 0\}$ とする．このとき，条件 (A1)-(A4), (3.7) および (3.10) から，以下の不等式が得られる:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(|(\bar{\eta}_\nu)_t|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \sup_{0\leq t\leq T} |(\bar{\eta}_\nu)_x(t)|^2_{L^2} \right) \\ &+\delta_\alpha \left(\frac{1}{2} |(\bar{\theta}_\nu)_t|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \sup_{0\leq t\leq T} |(\bar{\theta}_\nu)_x(t)|_{L^1} \right) \leq 4R_0, \quad 0 < \forall \nu \leq \nu_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

よって, Ω が 1 次元領域という設定では, 以下の様な考察が可能である:

$$\begin{cases} \bullet\ \{\bar{\eta}_\nu \,|\, 0<\nu\le\nu_0\} \text{ は, 空間 } W^{1,2}(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;H^1)\ (\subset C(\overline{Q_T})) \\ \quad \text{内の有界点列でなおかつ条件 } 0\le\bar{\eta}_\nu\le 1 \text{ on } \overline{Q_T},\ 0<\forall\nu\le\nu_0 \text{ を} \\ \quad \text{満たすため, 空間 } C(\overline{Q_T}) \text{ 内で点列コンパクトである;} \\ \bullet\ \{\bar{\theta}_\nu \,|\, 0<\nu\le\nu_0\} \text{ は空間 } W^{1,2}(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;W^{1,1})\ (\subset \\ \quad L^\infty(Q_T)) \text{ 内の有界点列であるため, 空間 } C([0,T];L^2) \text{ 内で点列} \\ \quad \text{コンパクトである.} \end{cases} \tag{3.12}$$

上記のコンパクト性に関する考察により, ゼロ収束する単調減少列:

$$\{\nu_n \,|\, n=1,2,3,\cdots\}\subset(0,\nu_0),\quad \nu_n\searrow 0 \ \text{ as } n\to\infty; \tag{3.13}$$

を上手く選ぶ事によって, 関数列 $\{[\eta_n,\theta_n]\}:=\{[\bar{\eta}_{\nu_n},\bar{\theta}_{\nu_n}]\,|\,n=1,2,3,\cdots\}$ を空間 $C(\overline{Q_T})\times C([0,T];L^2)$ 内の収束列とする事が出来る. ここで点列 $\{[\eta_n,\theta_n]\}$ の極限を $[\eta,\theta]\in C(\overline{Q_T})\times C([0,T];L^2)$ とおいて, 更に考察 (3.12) 中の有界性 (弱コンパクト性) をも考慮に入れれば, 極限 $[\eta,\theta]$ は条件:

$$\begin{cases} \eta\in W^{1,2}(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;H^1)\subset C(\overline{Q_T}),\ \ 0\le\eta\le 1 \text{ on } \overline{Q_T}, \\ \theta\in W^{1,2}(0,T;L^2)\cap L^\infty(Q_T),\ \ |D\theta(\,\cdot\,)|(\Omega)\in L^\infty(0,T); \end{cases} \tag{3.14}$$

を満たし, なおかつ点列 $\{[\eta_n,\theta_n]\}$ は以下の収束条件を満たす事が確認出来る:

$$\eta_n\to\eta \qquad \text{in } C(\overline{Q_T}), \text{ weakly in } W^{1,2}(0,T;L^2), \ \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(0,T;H^1), \tag{3.15}$$

$$\theta_n\to\theta \qquad \text{in } C([0,T];L^2), \text{ weakly in } W^{1,2}(0,T;L^2), \ \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(Q_T), \tag{3.16}$$

$$F\eta_n\ (=A_N\eta_n)\to F\eta \quad \text{weakly in } L^2(0,T;(H^1)^*), \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \eta_n(t)\to\eta(t) & \text{weakly in } H^1, \\ \theta_n(t)\to\theta(t) & \text{weakly-}* \text{ in } BV, \end{cases} \quad \forall t\in[0,T]; \tag{3.18}$$

as $n\to\infty$.

上記で得られた関数の組 $[\eta,\theta]$ は, (Part I) で主張されていた近似極限そのものである.

■

(Part II) 近似極限のシステム (S) への適合性

(Part II) における議論では, 先の (Part I) における (3.10) で設定された定数 $\nu_0\in(0,1)$ および, (3.13)-(3.18) で得られた数列 $\{\nu_n\}\subset(0,\nu_0)$ と関数列 $\{[\eta_n,\theta_n]\}\subset C(\overline{Q_T})\times C([0,T];L^2)$ とその極限 $[\eta,\theta]\in C(\overline{Q_T})\times C([0,T];L^2)$ がそのまま用いられる.

初期値問題 (2.4) との適合性. 検証を始める準備として, 以下の記法を追加する.

エネルギーの時間積分. 数列 $\{\nu_n\}$, 関数列 $\{\eta_n\} \subset C(\overline{Q_T})$ および関数 $\eta \in C(\overline{Q_T})$ は (3.13)-(3.15) で得られたものと同じものとし, 開区間 $I \subset (0,T)$ を任意に取る. その上で, 空間 $L^2(I;L^2)$ 上の汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$ を以下で定義する:

$$\zeta \in L^2(I;L^2) \mapsto \hat{\Phi}(\zeta)_I := \begin{cases} \displaystyle\int_I \Phi_\alpha(\eta(t);\zeta(t))\,dt, & \text{if } \Phi_\alpha(\eta(\cdot);\zeta(\cdot)) \in L^1(I), \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.19}$$

同様に, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 空間 $L^2(I;L^2)$ 上の汎関数 $\hat{\Phi}_n(\cdot)_I$ を以下で定義する:

$$\zeta \in L^2(I;L^2) \mapsto \hat{\Phi}_n(\zeta)_I := \begin{cases} \displaystyle\int_I \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(t);\zeta(t))\,dt, \\ \qquad \text{if } \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(\cdot);\zeta(\cdot)) \in L^1(I), \\ \infty, \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.20}$$

補足 3.1 (汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$, $\hat{\Phi}_n(\cdot)_I$ に関する補足) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とする. このとき,

$$\Phi_\alpha(\eta(t);0) = \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(t);0) = 0, \quad \forall t \in I, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

であるから, 汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$, $\hat{\Phi}_n(\cdot)_I$, $n \in \mathbb{N}$, のすべては空間 $L^2(I;L^2)$ 上で適正な汎関数である事がわかる. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 汎関数 $\hat{\Phi}_n(\cdot)_I$ には [16, Lemma 1.2.2] で構築された一般論が適用可能であり, これより $\hat{\Phi}_n(\cdot)_I$ は空間 $L^2(I;L^2)$ 上の下半連続凸関数である事も確認出来る. しかしながら, 汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$ に対しては文献 [16] の一般論を直接適用する事が出来ないため, この汎関数の下半連続性や凸性の保証に関しては改めて検証が必要となる.

上記の記法と補足を踏まえた上で, 次に以下 4 つの補題を用意する.

補題 3.3 (予備的考察) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とし, $\xi \in L^2(I;L^2)$ を条件 $\xi(t) \in BV$, a.e. $t \in I$ 満たす関数とする. このとき, 以下 2 つが成立する.

(I) $\psi \in C(\overline{I \times \Omega})$ ならば, 関数 $t \in I \mapsto \displaystyle\int_\Omega \psi(t)|D\xi(t)| \in \mathbb{R}$ は I 上の可測関数となる.

(II) $|D\xi(\cdot)|(\Omega) \in L^1(I)$, $\gamma \in C(\overline{I \times \Omega})$ と仮定し, $C(\overline{I \times \Omega})$ 上の連続線形形式 $[\gamma|D\xi|]$ を以下で定義する:

$$[\gamma|D\xi|] : \psi \in C(\overline{I \times \Omega}) \mapsto \int_I \int_\Omega \psi(t)\gamma(t)|D\xi(t)|\,dt \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

このとき, $[\gamma|D\xi|]$ は $I \times \Omega$ 上の Radon 測度となり, 更に以下を満足する:

$$[\gamma|D\xi|](U) = \int_I \gamma(t)|D\xi(t)|(\{x \in \Omega \mid (t,x) \in U\})\,dt, \quad \forall U \subset I \times \Omega\text{: 開集合.} \tag{3.22}$$

補題 3.4 (極限と関連した考察) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とし, 関数 $\psi_\infty \in C(\overline{I \times \Omega})$ と関数列 $\{\psi_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset C(\overline{I \times \Omega})$ に対して以下を仮定する:

$$\psi_n \to \psi_\infty \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}) \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.23}$$

また, 関数 $\xi_\infty \in L^2(I;L^2)$ と関数列 $\{\xi_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;L^2)$ に対し, 以下の条件を仮定する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_\infty(t) \in BV, \quad \xi_n(t) \in BV, \ n = 1,2,3,\cdots, \\ D\xi_n(t) \to D\xi_\infty(t) \ \text{ weakly-}* \text{ in } \mathcal{M} \text{ as } n \to \infty, \end{array} \right. \quad \text{a.e. } t \in I. \tag{3.24}$$

このとき, 以下 2 つが成立する.

(III) $\displaystyle \liminf_{n\to\infty} \int_I \int_\Omega |\psi_n(t)|\,|D\xi_n(t)|\,dt \geq \int_I \int_\Omega |\psi_\infty(t)|\,|D\xi_\infty(t)|\,dt;$

(IV) 以下の条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ |D\xi_\infty(\cdot)|(\Omega) \in L^1(I), \ \ |D\xi_n(\cdot)|(\Omega) \in L^1(I), \ n = 1,2,3,\cdots, \\ \bullet\ \gamma_\infty \in C(\overline{I \times \Omega}), \ \{\gamma_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset C(\overline{I \times \Omega}), \\ \bullet\ \gamma_\infty \geq 0 \text{ on } \overline{I \times \Omega}, \ \ \gamma_n \geq 0 \text{ on } \overline{I \times \Omega}, \ n = 1,2,3,\cdots, \\ \bullet\ \gamma_n \to \gamma_\infty \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}) \text{ as } n \to \infty, \\ \bullet\ \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \Big|\gamma_n(\cdot)|D\xi_n(\cdot)|(\Omega)\Big|_{L^1(I)} \leq \Big|\gamma_\infty(\cdot)|D\xi_\infty(\cdot)|(\Omega)\Big|_{L^1(I)}; \end{array} \right. \tag{3.25}$$

をすべて満足するならば:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \int_\Omega \psi_n(t)\gamma_n(t)|D\xi_n(t)|\,dt = \int_I \int_\Omega \psi_\infty(t)\gamma_\infty(t)\,|D\xi_\infty(t)|\,dt.$$

補題 3.5 (時間依存する BV-関数の近似) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とし, $\check{\zeta} \in L^2(I;L^2)$ を条件 $|D\check{\zeta}(\cdot)|(\Omega) \in L^1(I)$ を満たす関数とする. このとき, 関数 $\check{\zeta}$ を以下の意味で近似する様な滑らかな関数列 $\{\check{\psi}_i \,|\, i = 1,2,3,\cdots\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が存在する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\psi}_i \to \check{\zeta} \text{ in } L^2(I;L^2), \\ \displaystyle\int_I \int_\Omega |(\check{\psi}_i)_x(t)|\,dxdt \to \int_I \int_\Omega |D\check{\zeta}(t)|\,dt, \end{array} \right. \quad \text{as } i \to \infty; \tag{3.26}$$

$$\check{\psi}_i(t) \to \check{\zeta}(t) \text{ in } L^2, \ \text{ strictly in } BV \ \text{ as } i \to \infty, \ \text{ a.e. } t \in I. \tag{3.27}$$

補題 3.6 (Γ-収束の検証) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とし, $\hat{\Phi}(\cdot)_I$ を式 (3.19) で与えられる $L^2(I;L^2)$ 上の汎関数とする. このとき, 汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$ は有効領域を:

$$D(\hat{\Phi}(\cdot)_I) = \left\{ \, \tilde{\zeta} \in L^2(I;L^2) \ \middle|\ |D\tilde{\zeta}(\cdot)|(\Omega) \in L^1(I) \, \right\}; \tag{3.28}$$

とする $L^2(I;L^2)$ 上の適性下半連続凸関数となる. 更に, 式 (3.20) に基づいて構成される汎関数列 $\{\hat{\Phi}_n(\cdot)_I \,|\, n = 1,2,3,\cdots\}$ に対して極限操作 $n \to \infty$ を施すと, 関数列 $\{\hat{\Phi}_n(\cdot)_I\}$ は汎関数 $\hat{\Phi}(\cdot)_I$ へ空間 $L^2(I;L^2)$ 上で Γ-収束する. 即ち汎関数列 $\{\hat{\Phi}_n(\cdot)_I\}$ は以下 2 つの条件を満足する (cf. [8]):

($\gamma1$) $\check{\zeta}_\infty \in L^2(I;L^2)$, $\{\check{\zeta}_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;L^2)$ であり, なおかつ $\check{\zeta}_n \to \check{\zeta}_\infty$ in $L^2(I;L^2)$ as $n \to \infty$ ならば, $\liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\check{\zeta}_n)_I \geq \hat{\Phi}(\check{\zeta}_\infty)_I$;

($\gamma2$) $\forall \hat{\zeta}_\infty \in D(\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I)$, $\exists \{\hat{\zeta}_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;H^1)$, s.t. $\hat{\zeta}_n \to \hat{\zeta}_\infty$ in $L^2(I;L^2)$, $\hat{\Phi}_n(\hat{\zeta}_n)_I \to \hat{\Phi}(\hat{\zeta}_\infty)_I$, as $n \to \infty$.

以上 4 つの補題が証明出来れば, 近似極限 $[\eta, \theta]$ の初期値問題 (2.4) との適合性は以下の手順で検証する事が出来る.

はじめに開区間 $I \subset (0,T)$ と関数 $z \in BV$ ($z \in D(\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I)$) を任意に選んで固定し, 関数 z を以下の意味で近似する様な関数列 $\{\zeta_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;H^1)$ を取る:

$$\zeta_n \to z \text{ in } L^2(I;L^2), \quad \hat{\Phi}_n(\zeta_n)_I \to \hat{\Phi}(z)_I, \quad \text{as } n \to \infty.$$

この様な近似列は, 補題 3.6 中の条件 ($\gamma2$) を,

$$\hat{\zeta}_\infty(t) = z \text{ in } L^2, \forall t \in [0,T],$$

という設定の下で適用すれば得られる.

他方で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 関数 θ_n は $\nu = \nu_n$, $\eta = \eta_n$, $\theta_{0,\nu} = \bar{\theta}_{0,\nu_n}$ とした場合の初期値問題 (3.4) の解となるから,

$$\begin{gathered}(\alpha_0(\eta_n(t))(\theta_n)_t(t), \theta_n(t) - \zeta_n(t))_{L^2} + \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(t);\theta_n(t)) \leq \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(t);\zeta_n(t)), \\ \text{a.e. } t \in I, \ \ n = 1,2,3,\cdots.\end{gathered} \tag{3.29}$$

ここで, 変分不等式 (3.29) の両辺を区間 I 上で積分し, 更に収束条件 (3.13)-(3.18) と補題 3.6 の条件 ($\gamma1$) を適用すると, 以下の不等式が導かれる:

$$\begin{aligned} &\int_I (\alpha_0(\eta(t))\theta_t(t), \theta(t) - z)_{L^2}\, dt + \int_I \Phi_\alpha(\eta(t);\theta(t))\, dt \\ \leq\ & \lim_{n\to\infty} \int_I (\alpha(\eta_n(t))(\theta_n)_t(t), \theta_n(t) - \zeta_n(t))_{L^2}\, dt + \liminf_{n\to\infty} \int_I \Phi_{\alpha,\nu_n}(\eta_n(t);\theta_n(t))\, dt \\ \leq\ & \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\zeta_n)_I = \hat{\Phi}(z)_I = \int_I \Phi_\alpha(\eta(t);z)\, dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

開区間 $I \subset (0,T)$ は任意であるので, 不等式 (3.30) から以下の変分不等式:

$$\begin{gathered}(\alpha_0(\eta(t))\theta_t(t), \theta(t) - z)_{L^2} + \Phi_\alpha(\eta(t);\theta(t)) \leq \Phi_\alpha(\eta(t);z), \\ \forall z \in BV = D(\Phi_\alpha(\eta(t);\,\cdot\,)), \text{ a.e. } t \in (0,T);\end{gathered} \tag{3.31}$$

が得られる. また, 条件 (3.9) と条件 (3.16) から, 以下の収束も確認出来る:

$$\theta_n(0) = \bar{\theta}_{0,\nu_n} \to \theta(0) = \theta_0 \text{ in } L^2, \text{ as } n \to \infty. \tag{3.32}$$

変分不等式 (3.31) および条件 (3.32) は, 近似極限 $[\eta, \theta]$ が初期値問題 (2.4) の条件式を満たす事を意味する. ■

初期値問題 (2.3) との適合性. 初期値問題 (2.3) との適合性に関しては, はじめに以下の補題を証明しておく事が検証の大きな要となる.

補題 3.7 (重み付き全変動に対する時間積分の収束) $I \subset (0,T)$ を任意の開区間とし, $\psi_\infty \in C(\overline{I \times \Omega})$ と $\{\psi_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset C(\overline{I \times \Omega})$ を補題 3.4 と全く同様に設定する. 更に $[\eta,\theta] \in L^2(I;L^2) \times L^2(I;L^2)$ と $\{[\eta_n,\theta_n] \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;L^2) \times L^2(I;L^2)$ のそれぞれは, (3.14)-(3.18) で得られた近似極限と近似解の列とする. このとき, 以下が成立する.

$$\int_I \int_\Omega \psi_n(t)\alpha(\eta_n(t))|(\theta_n)_x(t)|\,dxdt \to \int_I \int_\Omega \psi_\infty(t)\alpha(\eta(t))|D\theta(t)|\,dt \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.33}$$

実際, 補題 3.7 が証明できれば, その後の検証の議論は以下の手順に従って進める事が出来る.

まず, 仮定 (A1) と収束条件 (3.15), (3.17) から, 以下の収束が直ちに導かれる:

$$\begin{aligned} \mu_n^* := \alpha'(\eta_n)|(\theta_n)_x| \;&=\; -(\eta_n)_t - A_N\eta_n + \eta_n - g(\eta_n) \\ &\to\; \mu^* := -\eta_t - F\eta + \eta - g(\eta) \end{aligned} \tag{3.34}$$
$$\text{weakly in } L^2(I;(H^1)^*) \ \text{ as } n \to \infty, \ \forall I \subset (0,T)\text{: 開区間.}$$

他方で $I \subset \Omega$ を任意の開区間とし, 関数 $\psi \in C(\overline{I \times \Omega})$ を任意に選んで, 補題 3.7 を設定:

$$\psi_\infty = \psi\,\frac{\alpha'(\eta)}{\alpha(\eta)} \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}), \ \ \psi_n = \psi\,\frac{\alpha'(\eta_n)}{\alpha(\eta_n)} \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}),\ n = 1,2,3,\cdots,$$

の下で適用すると, 以下の収束も得られる:

$$\begin{gathered} \int_I \int_\Omega \psi(t)\,\mu_n^*(t)\,dxdt \to \int_I \int_\Omega \psi(t)\,\alpha'(\eta(t))|D\theta(t)|\,dt \quad \text{as } n \to \infty, \\ \forall I \subset (0,T)\text{: 開区間}, \ \forall \psi \in C(\overline{I \times \Omega}). \end{gathered} \tag{3.35}$$

条件 (3.34)-(3.35) から:

$$\begin{gathered} \alpha'(\eta(t))|D\theta(t)| = \mu^*(t) = -\eta_t(t) - F\eta(t) + \eta(t) - g(\eta(t)) \\ \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ (distribution sense)}, \ \text{a.e. } t \in (0,T); \end{gathered}$$

となるが, この事実と初期条件:

$$\eta_n(0) = \eta(0) = \eta_0 \text{ in } H^1, \ \ n = 1,2,3,\cdots.$$

を併せれば, 関数 $[\eta,\theta]$ は初期値問題 (2.3) の条件式を満たす事が確認出来る. ■

4 証明中の (Part I) の検証

本節では, 前節中の 2 つの補題 3.1-3.2 の証明を与える事によって, 主定理の証明における (Part I) の検証を完結させる.

補題 3.1 の証明. $\nu > 0$ を任意に取って固定する. このとき, 緩和システム $(\mathrm{S})_\nu$ の解の存在と一意性に関しては, それぞれ [13, Theorem 2.1] と [13, Theorem 2.2] と全く同様の手法を適用する事によって証明出来る. また, 等式 (3.7) に関しても, その証明は論文 [13, Section 5] および [17, Lemma 3.2] と全く同様である.

唯一注意すべきは, 先行研究 [13, 14, 15, 17] では未知関数 θ に斉次 Dirichlet 境界条件を仮定しているのに対し, 本論文では斉次 Neumann 境界条件を仮定している点である. しかしながら, この設定の食い違いは「エネルギーの有効領域の修正」や「摂動項 (強圧性) の追加」といったテクニカルな微調整のみで解決可能であり, 証明の本質的な道筋には全く影響しない (詳細に関しては [27, Section 3] を参照).

補題 3.2 の証明. はじめに, 条件 (m1) を検証する. 点列 $\{w_\nu \,|\, \nu > 0\}$ に対して条件 (3.8) を仮定した上で, 関数 $\check{v}_0 \in L^2$ に L^2-弱収束する点列 $\{\check{v} \,|\, \nu > 0\} \subset L^2$ を取る. その際, $\liminf_{\nu \searrow 0} \Phi_{\beta,\nu}(w_\nu; \check{v}_\nu) = \infty$ ならば主張は直ちに成立するので, ここではそれ以外の場合を考える. 上記の下極限が有限ならば, 以下の収束条件を満足する様な単調減少数列 $\{\check{\nu}_i \,|\, i = 1, 2, 3, \cdots\} \subset (0, 1)$ が存在するはずである:

$$\check{\nu}_i \searrow 0 \text{ as } i \to \infty, \quad \liminf_{\nu \searrow 0} \Phi_{\beta,\nu}(w_\nu; \check{v}_\nu) = \lim_{i \to \infty} \Phi_{\beta,\check{\nu}_i}(w_{\check{\nu}_i}; \check{v}_{\check{\nu}_i}).$$

またこのとき, 以下も成立する:

$$R_1 := \sup_{i \in \mathbb{N}} |(\check{v}_{\check{\nu}_i})_x|_{L^1} \leq \frac{1}{\delta_\beta} \sup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_{\beta,\check{\nu}_i}(w_{\check{\nu}_i}; \check{v}_{\check{\nu}_i}) < \infty.$$

よって, 仮定 (3.8) および凸関数 $\Phi_\beta(w_0; \cdot)$ の下半連続性から, 以下の不等式が成立する:

$$\begin{aligned}
\liminf_{\nu \searrow 0} \Phi_{\beta,\nu}(w_\nu; \check{v}_\nu) &= \lim_{i \to \infty} \int_\Omega \left(\beta(w_{\check{\nu}_i}) |(\check{v}_{\check{\nu}_i})_x| + \frac{\check{\nu}_i}{2} |(\check{v}_{\check{\nu}_i})_x|^2 \right) dx \\
&\geq \liminf_{i \to \infty} \Phi_\beta(w_0; \check{v}_{\check{\nu}_i}) - R_1 \lim_{i \to \infty} |\beta(w_{\check{\nu}_i}) - \beta(w_0)|_{C(\overline{\Omega})} \\
&\geq \Phi_\beta(w_0; \check{v}_0).
\end{aligned}$$

次に, 条件 (m2) を検証する. 任意の $\hat{v}_0 \in D(\Phi_\beta(w_0; \cdot)) = BV$ に対し, 関数列 $\{\hat{\varphi}_i \,|\, i = 1, 2, 3, \cdots\} \subset H^1$ を以下を満たす様に選ぶ:

$$\hat{\varphi}_i \to \hat{v}_0 \text{ in } L^2, \quad \int_\Omega |(\hat{\varphi}_i)_x| \, dx \to \int_\Omega |D\hat{v}_0|, \quad \text{as } i \to \infty.$$

この様な関数列は, BV-関数に対する基本的な近似手法を適用する事によって容易に構成する事が出来る (cf. [1, Theorem 3.9], [6, Theorem 10.1.2], [9, Section 5.2.2], [10, 1.17 Theorem], e.t.c.).

ここで, 任意の番号 $i\in\mathbb{N}$ に対し, 数列 $\{\hat{\nu}_i\,|\,i=1,2,3,\cdots\}\subset(0,1)$ を以下を満たす様に選ぶ:

$$0<\cdots<\hat{\nu}_i<\cdots<\hat{\nu}_1<1,\quad \hat{\nu}_i\searrow 0 \text{ as } i\to\infty,$$
$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega|(\hat{\varphi}_i)_x|^2\,dx\le\frac{1}{i},\quad \forall i\in\mathbb{N},\ 0<\forall\nu\le\hat{\nu}_i.$$

これらを踏まえると, 条件 (m2) で主張される点列 $\{\hat{v}_\nu\,|\,\nu>0\}$ は, 以下の様に構成する事が出来る:

$$\hat{v}_\nu:=\begin{cases}\hat{\varphi}_i, \text{ if } \ \exists i\in\mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \hat{\nu}_{i+1}<\nu\le\hat{\nu}_i,\\ \hat{\varphi}_1, \text{ if } \ \nu>\hat{\nu}_1.\end{cases}$$

実際, 点列 $\{\hat{v}_\nu\,|\,\nu>0\}$ の定義式から直ちに以下が成立する:

$$\begin{cases}R_2:=\sup_{\nu>0}\int_\Omega|(\hat{v}_\nu)_x|\,dx<\infty,\\ \hat{v}_\nu\to\hat{v}_0 \text{ in } L^2,\ \int_\Omega|(\hat{v}_\nu)_x|\,dx\to\int_\Omega|D\hat{v}_0|,\ \frac{\nu}{2}\int_\Omega|(\hat{v}_\nu)_x|^2\,dx\to 0,\ \text{ as } \nu\searrow 0.\end{cases}\tag{4.1}$$

また, 全変動の下半連続性から, 以下の不等式も確認出来る:

$$\liminf_{\nu\searrow 0}\int_W|(\hat{v}_\nu)_x|\,dx\ge\int_W|D\hat{v}_0|,\quad \forall W\subset\Omega\text{: 開集合}.\tag{4.2}$$

ここで条件 (3.8), (4.1)-(4.2) を基に [1, Proposition 1.80] を適用すれば, 以下の収束条件が得られる:

$$\begin{aligned}&|\Phi_{\beta,\nu}(w_\nu;\hat{v}_\nu)-\Phi_\beta(w_0;\hat{v}_0)|\\ \le\ & R_2|\beta(w_\nu)-\beta(w_0)|_{C(\overline{\Omega})}+\left|\int_\Omega\beta(w_0)|(\hat{v}_\nu)_x|\,dx-\int_\Omega\beta(w_0)|D\hat{v}_0|\right|+\frac{\nu}{2}\int_\Omega|(\hat{v}_\nu)_x|^2\,dx\\ \to\ & 0,\quad \text{as } \nu\searrow 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

式 (4.1), (4.3) は, 条件 (m2) が成立する事を直接的に裏付けている. ■

5 証明中の (Part II) の検証

本節では, 主定理の証明中の (Part II) において, 検証の要となる 5 つの補題 3.3-3.7 の証明を与える.

補題 3.3 の証明. はじめに, 項目 (I) を検証する. 関数 $\xi\in L^2(I;L^2)$ を任意に選んで固定する. また, $t_*:=\inf I$, $t^*:=\sup I$ とし, 区間 I の等分割の列:

$$\Delta_m:=\{t_i^{(m)}=t_*+ih_m\,|\,i=0,1,\cdots,2^m\}\subset I,$$
$$\text{ここに } \ h_m=(t^*-t_*)/2^m,\ \ m=1,2,3,\cdots;$$

を用意する. このとき [7, Proposition 2.16] により, 関数:

$$
\begin{aligned}
t \in I \mapsto \lambda_i^{(m)}(t) &:= \int_\Omega (\psi^+(t_i^{(m)})+1)\,|D\xi(t)| - \int_\Omega (\psi^-(t_i^{(m)})+1)\,|D\xi(t)| \\
&= \int_\Omega \psi(t_i^{(m)})|D\xi(t)| \in \mathbb{R}, \quad m=1,2,3,\cdots, \quad i=1,\cdots,2^m;
\end{aligned}
$$

はすべて I 上の可測関数となる. その上で, 任意の番号 $m \in \mathbb{N}$ に対し, 階段関数 $\bar{\psi}_m : \overline{I} \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ を以下の様に定義する:

$$
t \in \overline{I} \mapsto \bar{\psi}_m(t) := \sum_{i=1}^{2^m} \chi_{(t_{i-1}^{(m)}, t_i^{(m)}]}(t)\psi(t_i^{(m)}) \in C(\overline{\Omega});
$$

ここに任意の 1 次元 Borel 集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対し, $\chi_B : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ は B 上の特性関数である. このとき, 以下で与えられる関数:

$$
t \in I \mapsto \bar{\lambda}_m(t) := \sum_{i=1}^{2^m} \chi_{(t_{i-1}^{(m)}, t_i^{(m)}]}(t)\lambda_i^{(m)}(t) = \int_\Omega \bar{\psi}_m(t)\,|D\xi(t)| \in \mathbb{R}, \quad m=1,2,3,\cdots;
$$

についても, そのすべてが I 上の可測関数となる事が容易にわかる. 更に, 関数 $\psi \in C(\overline{I \times \Omega})$ の一様連続性から:

$$
\bar{\psi}_m(t) \to \psi(t) \text{ in } C(\overline{\Omega}) \text{ as } m \to \infty, \quad \forall t \in \overline{I}.
$$

となるので, Lebesgue の優収束定理を適用すれば:

$$
\bar{\lambda}_m(t) = \int_\Omega \bar{\psi}_m(t)\,|D\xi(t)| \to \int_\Omega \psi(t)\,|D\xi(t)| \in \mathbb{R} \;\text{ as } m \to \infty, \;\text{ a.e. } t \in I.
$$

これは, 項目 (I) の主張が正しい事を意味する.

続いて, 項目 (II) を検証する. 空間 $C(\overline{I \times \Omega})$ 上の連続線形形式は, 空間 $C_0(I \times \Omega)$ 上の連続線形形式でもあるので, $[\gamma|D\xi|]$ が $I \times \Omega$ 上の Radon 測度である事はほぼ自明である.

次に, 開集合 $U \subset I \times \Omega$ を任意に選んで固定し, U 上の特性関数 $\chi_U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{0,1\}$ の近似列 $\{\bar{\chi}_i \,|\, i=1,2,3,\cdots\} \subset C_c^\infty(I \times \Omega)$ を以下を満たす様に選ぶ:

$$
\bar{\chi}_i(t,x) \nearrow \chi_U(t,x) \text{ as } i \to \infty, \quad \forall (t,x) \in I \times \Omega.
$$

ここで, Lebesgue の優収束定理を適用すれば, 関数:

$$
\begin{aligned}
t \in I &\mapsto \gamma(t)|D\xi(t)|(\{x \in \Omega \,|\, (t,x) \in U\}) \\
&= \int_\Omega \chi_U(t)\gamma(t)|D\xi(t)| = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \bar{\chi}_i(t)\gamma(t)|D\xi(t)| \in \mathbb{R};
\end{aligned}
$$

は I 上の可測関数であり, 従って更に以下の等式が成立する事も確認出来る:

$$
\begin{aligned}
[\gamma|D\xi|](U) &= \int_{I\times\Omega} \chi_U \, d[\gamma|D\xi|] = \lim_{i\to\infty} \int_{I\times\Omega} \bar{\chi}_i \, d[\gamma|D\xi|] \\
&= \lim_{i\to\infty} \int_I \int_\Omega \bar{\chi}_i(t)\gamma(t)|D\xi(t)|\,dt = \int_I \gamma(t)|D\xi(t)|(\{x \in \Omega \,|\, (t,x) \in U\})\,dt.
\end{aligned}
$$

上記は, 項目 (II) で主張されている等式そのものである. ■

補題 3.4 の証明. 補題の証明には, 測度論の一般論を用いる (cf. [1, Chapter 1]).

先ず, 項目 (III) の検証からはじめる. 仮定 (3.23), (3.24) および一様有界性定理から:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \varphi\,\psi_n(t)\,D\xi_n(t) - \int_\Omega \varphi\,\psi_\infty(t)\,D\xi_\infty(t)\right| \\
\leq\;& |\varphi|_{C(\overline{\Omega})}|\psi_n - \psi_\infty|_{C(\overline{Q_T})}\sup_{n\in\mathbb{N}}|D\xi_n(t)|_{\mathcal{M}} + \left|\int_\Omega \varphi\,\psi_\infty(t)\,D(\xi_n - \xi_\infty)(t)\right| \\
\to\;& 0,\ \text{ as } n\to\infty,\ \forall\varphi\in C_0,\ \text{ a.e. } t\in I\ (t\ \text{は固定}).
\end{aligned}\tag{5.1}$$

また, [1, Proposition 1.23] から,

$$\begin{cases}
|\psi_\infty(t)D\xi_\infty(t)| = \left|\psi_\infty(t)\frac{D\xi_\infty(t)}{|D\xi_\infty(t)|}\right||D\xi_\infty(t)| = |\psi_\infty(t)||D\xi_\infty(t)|, \\
|\psi_n(t)D\xi_n(t)| = \left|\psi_n(t)\frac{D\xi_n(t)}{|D\xi_n(t)|}\right||D\xi_n(t)| = |\psi_n(t)||D\xi_n(t)|,\ n = 1,2,3,\cdots,
\end{cases}\tag{5.2}$$
$$\text{in } \mathcal{M},\ \text{ a.e. } t\in I;$$

ただし a.e. $t\in I$ に対し, $\frac{D\xi_\infty(t)}{|D\xi_\infty(t)|}$ (resp. $\frac{D\xi_n(t)}{|D\xi_n(t)|}$, $n\in\mathbb{N}$) は Radon 測度 $D\xi_\infty(t)$ (resp. $D\xi_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$) の全変動 $|D\xi_\infty(t)|$ (resp. $|D\xi_n(t)|$, $n\in\mathbb{N}$) に対する密度関数を表す.

条件 (5.1), (5.2) を基に [1, Theorem 1.59] を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\psi_n(t)|\,|D\xi_n(t)| = \liminf_{n\to\infty}|\psi_n(t)D\xi_n(t)|(\Omega) \\
&\geq |\psi_\infty(t)D\xi_\infty(t)|(\Omega) = \int_\Omega |\psi_\infty(t)|\,|D\xi_\infty(t)|,\ \text{ a.e. } t\in I.
\end{aligned}$$

従って, 項目 (III) の主張は, 補題 3.3 の (I) と Fatou の補題を組み合わせる事によって, 検証する事が出来る.

次に項目 (IV) を検証する. 条件 (3.25) を仮定する. 式 (5.1) は, $\psi_\infty = \gamma_\infty$, $\psi_n = \gamma_n$, $n\in\mathbb{N}$ としても成立するので, [1, Propositoin 1.62] により:

$$\begin{gathered}
\liminf_{n\to\infty}\gamma_n(t)|D\xi_n(t)|(W) \geq \gamma_\infty(t)|D\xi_\infty(t)|(W), \\
\forall W\subset\Omega\text{: 開集合},\ \text{ a.e. } t\in I.
\end{gathered}\tag{5.3}$$

また, $[\gamma_\infty|D\xi_\infty|]\in\mathcal{M}(I\times\Omega)$ と $[\gamma_n|D\xi_n|]\in\mathcal{M}(I\times\Omega)$, $n\in\mathbb{N}$ を, 補題 3.3 の式 (3.21) に基づいて定められる $I\times\Omega$ 上の Radon 測度とする. このとき, 条件 (5.3), 補題 3.3 の (II) および Fatou の補題から, 以下の不等式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\ [\gamma_n|D\xi_n|](U) = \liminf_{n\to\infty}\int_I \gamma_n(t)|D\xi_n(t)|(\{x\in\Omega\,|\,(t,x)\in U\})\,dt \\
\geq\;& \int_I \liminf_{n\to\infty}\gamma_n(t)|D\xi_n(t)|(\{x\in\Omega\,|\,(t,x)\in U\})\,dt \\
\geq\;& \int_I \gamma_\infty(t)|D\xi_\infty(t)|(\{x\in\Omega\,|\,(t,x)\in U\})\,dt = [\gamma_\infty|D\xi_\infty|](U), \\
&\forall U\subset I\times\Omega\text{: 開集合}.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

更に, 条件 (3.25), (5.4) を併せると, 以下の等式も得られる:

$$\lim_{n\to\infty}[\gamma_n|D\xi_n|](I\times\Omega)=[\gamma_\infty|D\xi_\infty|](I\times\Omega). \tag{5.5}$$

定義式 (3.21) および条件 (5.4), (5.5) を基に [1, Proposition 1.80] を適用すると:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I\times\Omega}\psi\ d[\gamma_n|D\xi_n|]=\int_{I\times\Omega}\psi\ d[\gamma_\infty|D\xi_\infty|],\quad \forall\psi\in C(\overline{I\times\Omega}).$$

従って, 項目 (IV) の主張は以下の計算によって確認する事が出来る:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I\int_\Omega\psi_n(t)\gamma_n(t)|D\xi_n(t)|\,dt-\int_I\int_\Omega\psi_\infty(t)\gamma_\infty(t)|D\xi_\infty(t)|\,dt\right|\\
\leq\ &|\psi_n-\psi_\infty|_{C(\overline{I\times\Omega})}\sup_{n\in\mathbb{N}}[\gamma_n|D\xi_n|](I\times\Omega)+\left|\int_{I\times\Omega}\psi_\infty\ d([\gamma_n|D\xi_n|]-[\gamma_\infty|D\xi_\infty|])\right|\\
\to\ &0,\quad \text{as } n\to\infty.
\end{aligned}$$

■

補題 3.5 の証明. 関数 $\breve{\zeta}\in L^2(I;L^2)$ に対し, 条件 $|D\breve{\zeta}(\,\cdot\,)|(\Omega)\in L^1(I)$ を仮定する. このとき, Lusin の定理 [9, Theorem 2 in Section 1.2] により, 以下の条件を満たす様な 1 次元コンパクト集合のクラス $\{J_\kappa\,|\,\kappa>0\}\subset 2^I$ を見つける事が出来る:

$$\mathscr{L}^1(I\setminus J_\kappa)\leq\kappa,\ \breve{\zeta}\in C(J_\kappa;L^2),\ |D\breve{\zeta}(\,\cdot\,)|(\Omega)\in C(J_\kappa),$$
$$\Lambda_\kappa:=\sup_{t\in J_\kappa}|\breve{\zeta}(t)|_{L^\infty}<\infty,\quad\forall\kappa>0.$$

その上で, 有界な関数の列 $\{\breve{\xi}_\kappa\,|\,\kappa>0\}\subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$ を以下の様に設定する:

$$\breve{\xi}_\kappa(t):=\begin{cases}\breve{\zeta}(t)^{\mathrm{ex}}\text{ in }L^\infty(\mathbb{R}),\ \text{if }t\in J_\kappa,\\ 0\text{ in }L^\infty(\mathbb{R}),\ \text{otherwise,}\end{cases}\quad\text{a.e. }t\in\mathbb{R};$$

ここに a.e. $t\in I$ に対し, $\breve{\zeta}(t)^{\mathrm{ex}}\in L^\infty(\mathbb{R})$ は式 (2.2) に従って定められる関数 $\breve{\zeta}(t)\in BV$ の $\mathbb{R}$ 全体への拡張である. 更に任意の $\kappa>0$ に対し, 関数列 $\{\psi_\varepsilon^{(\kappa)}\,|\,\varepsilon>0\}\subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を以下で定義する:

$$\psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t,x):=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(t-\tau)\varrho_\varepsilon(x-y)\,\breve{\xi}_\kappa(\tau,y)\,dyd\tau,\quad\forall(t,x)\in\mathbb{R}^2;$$

ここに任意の $\varepsilon>0$ に対し, ϱ_ε は通常の 1 次元 mollifier である.

以上を準備した上で, ここでは補題で主張される関数列 $\{\breve{\psi}_i\,|\,i=1,2,3,\cdots\}$ を, 関数のクラス $\{\psi_\varepsilon^{(\kappa)}\,|\,\kappa>0,\varepsilon>0\}\subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対する対角線論法を適用する事によって構成する.

はじめに関数列 $\{\breve{\xi}_\kappa\,|\,\kappa>0\}$ に対しては, 容易に以下の収束条件が確認出来る:

$$\begin{cases}\breve{\xi}_\kappa\to\breve{\zeta}\text{ in }L^2(I;L^2),\\ \breve{\xi}_\kappa(t)\to\breve{\zeta}(t)\text{ in }L^2,\ \text{a.e. }t\in I,\end{cases}\quad\text{as }\kappa\searrow 0. \tag{5.6}$$

他方で,

$$\int_{\Omega}|D\breve{\zeta}(t)| \le \liminf_{\kappa\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(t)|, \quad \sup_{\kappa>0}\int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(t)| \le \int_{\mathbb{R}}|D\breve{\zeta}(t)^{\mathrm{ex}}| = \int_{\Omega}|D\breve{\zeta}(t)|,$$
$$\text{a.e. } t\in I,$$

より Lebesgue の優収束定理が適用出来るため, 以下の収束も成立する:

$$\int_I\left|\int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(t)| - \int_{\Omega}|D\breve{\zeta}(t)|\right| dt \to 0 \ \text{ as } \kappa\searrow 0. \tag{5.7}$$

次に mollifier の基本性質から, 任意の $\kappa>0$ に対して関数列 $\{\psi_\varepsilon^{(\kappa)}\,|\,\varepsilon>0\}$ は以下の性質を持つ事がわかる:

$$|\psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t,x)| \le \Lambda_\kappa, \quad \psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t,x) \to \breve{\xi}_\kappa(t,x) \ \text{(各点収束)} \ \text{ as } \varepsilon\searrow 0,$$
$$\mathscr{L}^2\text{-a.e. } (t,x)\in\mathbb{R}^2.$$

よって, Lebesgue の優収束定理と全変動の下半連続性から,

$$\psi_\varepsilon^{(\kappa)} \to \breve{\xi}_\kappa \text{ in } L^2(I;L^2) \text{ as } \varepsilon\searrow 0, \ \forall\kappa>0, \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t) \to \breve{\xi}_\kappa(t) \text{ in } L^2 \text{ as } \varepsilon\searrow 0, \\ \displaystyle\liminf_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega}|(\psi_\varepsilon^{(\kappa)})_x(t)|\,dx \ge \int_{\Omega}|D\breve{\xi}_\kappa(t)|, \end{cases} \quad \text{a.e. } t\in I, \ \forall\kappa>0. \tag{5.9}$$

また, 任意の 2 つの正数 $\kappa>0$, $\varepsilon>0$, 任意の時間 $t\in I$ および任意の関数 $\varphi\in C_{\mathrm{c}}^1$ を固定すると, Fubini の定理から以下の計算が実行可能である:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t,x)\varphi_x(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\varphi_x(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(t-\tau)\varrho_\varepsilon(x-y)\breve{\xi}_\kappa(\tau,y)\,dyd\tau\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\breve{\xi}_\kappa(\tau,y)\left(\int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(y-x)\varphi_x(x)\,dx\right)dy\,d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\breve{\xi}_\kappa(\tau,y)(\varrho_\varepsilon*\varphi)_x(y)\,dy\,d\tau. \end{aligned} \tag{5.10}$$

加えて:

$$\varphi\in C_{\mathrm{c}}^1, \ |\varphi|_{C(\overline{\Omega})}\le 1 \implies |\varrho_\varepsilon*\varphi|_{C(\overline{\Omega})}\le 1; \tag{5.11}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|(\psi_\varepsilon^{(\kappa)})_x(t)|\,dx &= \sup\left\{\int_{\Omega}\psi_\varepsilon^{(\kappa)}(t,x)\tilde{\varphi}_x(x)\,dx \,\middle|\, \tilde{\varphi}\in C_{\mathrm{c}}^1, \ |\tilde{\varphi}|_{C(\overline{\Omega})}\le 1\right\} \\ &\le \left(\sup_{\varsigma\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(\varsigma)|\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\varrho_\varepsilon(\tau-t)\,d\tau\right) \le \Big||D\breve{\zeta}(\cdot)|(\Omega)\Big|_{C(J_\kappa)}, \end{aligned} \tag{5.12}$$
$$\forall\varepsilon>0, \ \forall t\in I, \ \forall\kappa>0.$$

他方で, 条件 (5.10)-(5.11) および補題 3.3 から, :

$$\limsup_{\varepsilon\searrow 0}\int_\Omega |(\psi_\varepsilon^{(\kappa)})_x(t)|\,dx \le \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\left(\varrho_\varepsilon(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(\tau)|\right)d\tau = \int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(t)|, \tag{5.13}$$
$$\text{a.e. } t\in I \ (\text{関数 } |D\breve{\xi}_\kappa(\,\cdot\,)|(\mathbb{R})\in L^1(I) \text{ の Lebesgue 点}),\ \forall\kappa>0.$$

条件 (5.9), (5.12)-(5.13) を併せれば, Lebesgue の優収束定理が適用出来るので,

$$\int_I\left|\int_\Omega |(\psi_\varepsilon^{(\kappa)})_x(t)|\,dx - \int_{\mathbb{R}}|D\breve{\xi}_\kappa(t)|\right|dt \to 0 \ \text{ as } \varepsilon\searrow 0,\ \forall\kappa>0. \tag{5.14}$$

以上を振り返ると, 先ず収束条件 (5.6)-(5.7) から, 以下の条件を満足する様な数列 $\{\kappa_m\,|\,m=1,2,3,\cdots\}\subset(0,1)$ を選ぶ事が出来る:

$$\begin{cases} 0<\kappa_m<\dfrac{1}{2^m},\ |\breve{\xi}_{\kappa_m}-\breve{\zeta}|_{L^2(I;L^2)}\le\dfrac{1}{2^m}, \\ \Big||D\breve{\xi}_{\kappa_m}(\,\cdot\,)|(\Omega)-|D\breve{\zeta}(\,\cdot\,)|(\Omega)\Big|_{L^1(I)}\le\dfrac{1}{2^m}, \end{cases} \quad m=1,2,3,\cdots.$$

続けて, 収束条件 (5.8), (5.14) からは, 以下の条件を満たす単調減少数列 $\{\varepsilon_m\,|\,m=1,2,3,\cdots\}\subset(0,1)$ の存在が確認出来る:

$$\begin{cases} 0<\varepsilon_m<\dfrac{1}{2^m},\ |\psi_{\varepsilon_m}^{(\kappa_m)}-\breve{\xi}_{\kappa_m}|_{L^2(I;L^2)}\le\dfrac{1}{2^m}, \\ \Big||D\psi_{\varepsilon_m}^{(\kappa_m)}(\,\cdot\,)|(\Omega)-|D\breve{\xi}_{\kappa_m}(\,\cdot\,)|(\Omega)\Big|_{L^1(I)}\le\dfrac{1}{2^m}, \end{cases} \quad m=1,2,3,\cdots.$$

最終的に, 補題で主張されている関数列 $\{\breve{\psi}_i\,|\,i=1,2,3,\cdots\}\subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ は, 以下の条件を満たす様な関数列 $\{\psi_{\varepsilon_m}^{(\kappa_m)}\,|\,m=1,2,3,\cdots\}\subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分列として構成する事が可能である:

$$\begin{cases} \breve{\psi}_i(t)\to\breve{\zeta}(t) \text{ in } L^2 \\ |D\breve{\psi}_i(t)|(\Omega)\to|D\breve{\zeta}(t)|(\Omega), \end{cases} \quad \text{as } i\to\infty,\ \text{a.e. } t\in I.$$

■

補題 3.6 の証明. $\nu_0\in(0,1)$, $\{\nu_n\}\subset(0,\nu_0)$, $\{\eta_n\}\subset C(\overline{Q_T})$, $\eta\in C(\overline{Q_T})$ はすべて (3.10)-(3.15) で用いられたもと同じとする. また, $I\subset(0,T)$ を任意の開区間とし, $\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I$ および $\hat{\Phi}_n(\,\cdot\,)_I$, $n\in\mathbb{N}$, はそれぞれ式 (3.19) および式 (3.20) で与えられた $L^2(I;L^2)$ 上の汎関数とする.

補足 3.1 でも述べた通り, $\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I$ は $L^2(I;L^2)$ 上の適正な汎関数である. また, 任意の関数 $\zeta\in D(\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I)$ に対し, 仮定 (A4) から直ちに $\zeta(t)\in BV$ a.e. $t\in I$ が確認出来るので, 補題 3.3 の (I) から関数:

$$t\in I\mapsto\Phi_\alpha(\eta(t);\zeta(t))\in\mathbb{R};$$

は I 上の可測関数となる. 従って, 等式 (3.28) については仮定 (A3)-(A4) および条件 (3.14) から直ちに得られ, また汎関数 $\hat{\Phi}(\,\cdot\,)_I$ の下半連続性と凸性に関しても Fatou の補題と三角不等式を用いて容易に導く事が出来る.

以上を踏まえると, 条件 $(\gamma 1)$ は補題 Lemma 3.2 の (m1) と Fatou の補題を組み合わせる事によって検証出来る.

条件 $(\gamma 2)$ に関しては, 以下の手順で検証する事が出来る. はじめに関数 $\hat{\zeta}_\infty \in D(\hat{\Phi}(\cdot)_I)$ を任意に取って固定し, 補題 3.5 を適用してこの $\hat{\zeta}$ に対して (3.26)-(3.27) と同じ意味での近似列 $\{\hat{\psi}_i\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を用意する. また, 以下を満たす自然数の列 $\{\hat{n}_i \,|\, i = 1,2,3,\cdots\} \subset \mathbb{N}$ も一つ用意する:

$$\hat{n}_{i+i} > \hat{n}_i \geq i, \quad \frac{\nu}{2}\int_I\int_\Omega |(\hat{\psi}_i)_x|^2\,dxdt \leq \frac{1}{i} \quad 0 < \forall \nu < \nu_{\hat{n}_i}, \quad i = 1,2,3,\cdots.$$

これらを準備した上で, 条件 $(\gamma 2)$ で主張される関数列 $\{\hat{\zeta}_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\}$ は以下の様に構成する事が出来る:

$$\hat{\zeta}_n := \begin{cases} \hat{\psi}_i \text{ in } L^2(I;L^2), & \text{if } \exists i \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \hat{n}_i < n \leq \hat{n}_{i+1}, \\ \hat{\psi}_1 \text{ in } L^2(I;L^2), & \text{if } 1 \leq n \leq \hat{n}_1. \end{cases}$$

実際, 関数列 $\{\hat{\zeta}_n\}$ の構成法から,

$$\begin{cases} \hat{\zeta}_n \to \hat{\zeta}_\infty \text{ in } L^2(I;L^2), \\ \displaystyle\int_I\int_\Omega |(\hat{\zeta}_n)_x(t)|\,dxdt \to \int_I\int_\Omega |D\hat{\zeta}_\infty(t)|\,dt, \\ \displaystyle\frac{\nu_n}{2}\int_I\int_\Omega |(\hat{\zeta}_n)_x(t)|^2\,dxdt \to 0, \end{cases} \quad \text{as } n \to \infty, \tag{5.15}$$

$$D\hat{\zeta}_n(t) \to D\hat{\zeta}_\infty(t) \text{ weakly-}* \text{ in } \mathcal{M}, \quad \text{as } n \to \infty, \quad \text{a.e. } t \in I,$$

となる事は容易に確認出来るから, 補題 3.4 の条件 (IV) を設定:

$$\begin{cases} \psi_\infty = \alpha(\eta) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}), \ \psi_n = \alpha(\eta_n) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}), \ n = 1,2,3,\cdots, \\ \gamma_\infty = \gamma_n \equiv 1 \text{ on } \overline{I \times \Omega}, \ n = 1,2,3,\cdots, \\ \xi_\infty = \hat{\zeta}_\infty \text{ in } L^2(I;L^2), \ \xi_n = \hat{\zeta}_n \text{ in } L^2(I;L^2), \ n = 1,2,3,\cdots; \end{cases}$$

の下で適用すれば, 以下の収束を得る:

$$\int_I\int_\Omega \alpha(\eta_n(t))|(\hat{\zeta}_n)_x(t)|\,dxdt \to \int_I\int_\Omega \alpha(\eta(t))|D\hat{\zeta}_\infty(t)|\,dt \quad \text{as } n \to \infty. \tag{5.16}$$

条件 $(\gamma 2)$ 中で主張される収束条件は, (5.15)-(5.16) から直ちに導かれる. ■

補題 3.7 の証明. 以下の収束条件を満たす様な関数列 $\{\hat{\theta}_n \,|\, n = 1,2,3,\cdots\} \subset L^2(I;H^1)$ を一つ選ぶ:

$$\hat{\theta}_n \to \theta \text{ in } L^2(I;L^2), \quad \hat{\Phi}_n(\hat{\theta}_n)_I \to \hat{\Phi}(\theta)_I, \quad \text{as } n \to \infty.$$

この様な関数列 $\{\hat{\theta}_n\}$ は, 補題 3.6 の $(\gamma 2)$ を設定 $\hat{\zeta}_\infty = \theta \in D(\hat{\Phi}(\cdot)_I)$ の下で適用すれば容易に得られる.

他方で, 関数 θ_n, $n \in \mathbb{N}$, は $\nu = \nu_n$, $\eta = \eta_n$, $\eta_{0,\nu} = \eta_0$ という設定の下での初期値問題 (3.4) の解となるので:

$$\int_I (\alpha_0(\eta_n(t))(\theta_n)_t(t), \theta_n(t) - \hat{\theta}_n(t))_{L^2}\, dt + \hat{\Phi}_n(\theta_n) \le \hat{\Phi}_n(\hat{\theta}_n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

上記の不等式の両辺に極限操作 $n \to \infty$ を施し, 条件 (3.16) および補題 3.6 の $(\gamma 1)$ を適用すると, 以下の収束条件が得られる:

$$\hat{\Phi}(\theta)_I \le \liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\theta_n)_I \le \limsup_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\theta_n)_I \le \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\hat{\theta}_n)_I = \hat{\Phi}(\theta)_I. \tag{5.17}$$

更に, 条件 (3.12), (3.14), (3.15), (3.18), (5.17) により, 補題 3.4 の (III) が設定:

$$\begin{cases} \psi_\infty = \alpha(\eta) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}),\ \psi_n = \alpha(\eta_n) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}),\ n = 1, 2, 3, \cdots, \\ \xi_\infty = \theta \text{ in } L^2(I; L^2),\ \xi_n = \theta_n \text{ in } L^2(I; L^2),\ n = 1, 2, 3, \cdots; \end{cases}$$

の下で適用可能となるから:

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\nu_n}{2} \int_I \int_\Omega |(\theta_n)_x(t)|^2\, dxdt \right) \\ \le\ &\lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}_n(\theta_n)_I - \liminf_{n\to\infty} \int_I \int_\Omega \alpha(\eta_n(t))|(\theta_n)_x(t)|\, dxdt \\ \le\ &\hat{\Phi}(\theta)_I - \hat{\Phi}(\theta)_I = 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

条件 (5.17), (5.18) を併せれば以下の収束が導かれる:

$$\int_I \int_\Omega \alpha(\eta_n(t))|(\theta_n)_x(t)|\, dxdt \to \int_I \int_\Omega \alpha(\eta(t))|D\theta(t)|\, dt, \quad \text{as } n \to \infty. \tag{5.19}$$

最終的に, 考察中の補題 3.7 の結論 (3.33) は, 条件 (3.12), (3.14), (3.15), (3.18), (5.19) を基にした上で, 補題 3.4 の (IV) を設定:

$$\begin{cases} \gamma_\infty = \alpha(\eta) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}),\ \gamma_n = \alpha(\eta_n) \text{ in } C(\overline{I \times \Omega}),\ n = 1, 2, 3, \cdots, \\ \xi_\infty = \theta \text{ in } L^2(I; L^2),\ \xi_n = \theta_n \text{ in } L^2(I; L^2),\ n = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

の下で適用する事によって示される. ∎

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, 2000.

[2] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Progress in Mathematics, **223**, Birkhäuser Verlag, 2004.

[3] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo, *Nonlocal Diffusion Problems*, Mathematical Surveys and Monographs, **165**, American Mathematical Society, 2010.

[4] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo, Local and nonlocal weighted p-Laplacian evolution equations with Neumann boundary conditions, Publ. Mat., **55** (2011), 27–66.

[5] G. Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **135** (1983), 293–318.

[6] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces*, Applications to PDEs and Optimization, MPS-SIAM Series on Optimization, SIAM and MPS, 2001.

[7] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies **5**, Notas de Matemática (50), North-Holland Publishing and American Elsevier Publishing, 1973.

[8] G. Dal Maso, *An Introduction to Γ-convergence*, ISAS-International School for Advanced Studies, Lecture Notes of a course held at SISSA in 1998/99, Birkhäuser, 1993.

[9] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.

[10] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Monographs in Mathematics, **80**, Birkhäuser, 1984.

[11] M. -H. Giga and Y. Giga, Very singular diffusion equations: second and fourth order problems, Jpn. J. Ind. Appl. Math., **27** (2010), no. 3, 323–345

[12] M. -H. Giga, Y. Giga and R. Kobayashi, Very singular diffusion equations, Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98, 93–125, Adv. Stud. Pure Math., **31**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[13] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, A phase-field model of grain boundary motion, Appl. Math., **53** (2008), no. 5, 433–454.

[14] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Weak solutions of grain boundary motion model with singularity, Rend. Mat. Appl. (7), **29** (2009), no. 1, 51–63.

[15] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Global solvability of a model for grain boundary motion with constraint, Discrete Continuous Dynamical Systems, Ser. S (to appear).

[16] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30** (1981), 1–87.

[17] N. Kenmochi and N. Yamazaki, Large-time behavior of solutions to a phase-field model of grain boundary motion with constraint, *Current advances in nonlinear analysis and related topics*, 389–403, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **32**, Gakkōtosho, Tokyo, 2010.

[18] R. Kobayashi and Y. Giga, Equations with singular diffusivity, J. Statist. Phys., **95** (1999), 1187–1220.

[19] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundary, Phys. D, **140** (2000), no. 1-2, 141–150.

[20] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, Grain boundary model and singular diffusivity, *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, 283–294, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **14**, Gakkōtosho, Tokyo, 2000.

[21] J. S. Moll, The anisotropic total variation flow, Math. Ann., **332** (2005), no. 1, 177–218.

[22] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Math., **3** (1969), 510–585.

[23] M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators: Cauchy problems, J. Differential Equations, **46** (1982), no. 2, 268–299.

[24] K. Shirakawa, Stability analysis for Allen-Cahn equations involving indefinite diffusion coefficients, *Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena; Modelling, Analysis and Simulations*, 238–254, GAKUTO Internat. Ser. Math. Appl. **23**, Gakkōtosho, Tokyo, 2006.

[25] K. Shirakawa, Stability for phase field systems involving indefinite surface tension coefficients, *Dissipative phase transitions*, 269–288, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **71**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[26] K. Shirakawa, A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Asymptotic stability for evolution equations governed by subdifferentials, *Recent Development in Domain Decomposition Methods and Flow Problems*, 287–310, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **11**, Gakkōtosho, Tokyo, 1998.

[27] K. Shirakawa, H. Watanabe and N. Yamazaki, Solvability for one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion, Technical Reports of Mathematical Sciences, Chiba University, **27** (2011), no. 1, 1–30.