

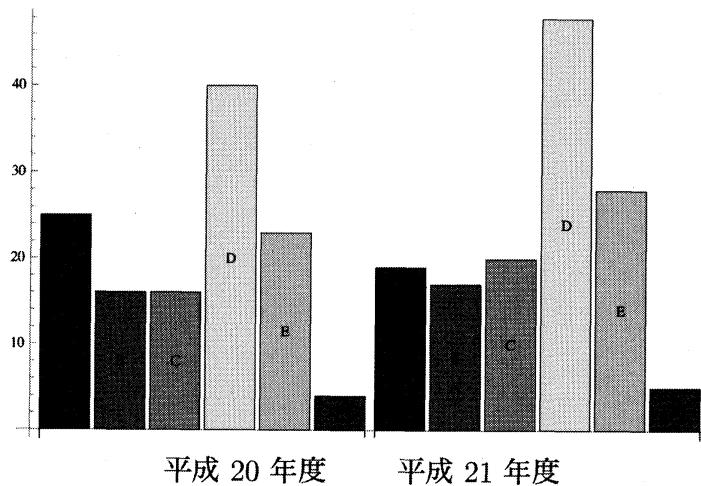
# イメージ化がもたらす深い理解と数学の有用性 —ソフト Mathematica を活用して—

日本大学・理工学部 山本修一 (Shuichi Yamamoto)  
College of Science and Technology,  
Nihon University

## 1 はじめに

数学の概念や数式をイメージ化することによって学生は数学の理解が確実に深まる。その証拠に、10年以上継続している学部の半期授業・教養ゼミナール「*Mathematica*で数学を学ぶ」において、下記のアンケート調査表1からわかるように項目「数学のイメージ化ができて理解が深まった」に同意する学生数は群を抜いている。

表 1 教養ゼミナールのアンケート調査



上の表の A, B, C, D, E, F は下記のアンケート調査項目を表し、高さは調査項目に同意した人数である。ただし重複は許す。このアンケート調査は平成 21 年 1 月 14 日と平成 22 年 1 月 13 日に実施したもので受講者はそれぞれ 55 名 (1 年 16 名, 2 年 37 名, 3 年 2 名) と 61 名 (1 年 36 名, 2 年 5 名, 3 年 19 名, 4 年 1 名) である。

アンケート調査項目	20 年度の人数	21 年度の人数
A: 数学は応用できそうであるという気持ちが以前より増した	25 名	19 名
B: 数学をもっと深く勉強したいという気持ちになった	16 名	17 名
C: 数学の重要性をより強く感じるようになった	16 名	20 名
D: 数学のイメージ化ができて理解が深まった	40 名	48 名
E: 公式の暗記から離れて数学を楽しく勉強することができた	23 名	28 名
F: その他	4 名	5 名

表 1 はまたこの傾向は学生の学年構成に無関係であることを示している。

ソフトウェアが進化して、数学理解に新しい学び方「(先に) 現象を観察して、(後に) 観察を通して数式の機能を深く理解する」ことも可能になり、数学的な考察も視覚的な支援のおかげで理解しやすくなった。このような時代背景に合わせて以下のような研究テーマを設定している。

- 伝統的な (従来からの) 数学教育をコンピュータ活用で支援する。特に、コンピュータを活用しなければ達成し得ない数学教材を開発したい。
- 地球シミュレーションに象徴されるように数学の役割も変化する。新しい時代に必要とされる数学教育を模索したい。

本論文では、最初にイメージ化がもたらす深い理解を具体的に例で示し、応用数学や微分方程式の授業で取り入れている *Mathematica* を活用したイメージ化の工夫をいくつか紹介し、そのとき実施したアンケート調査と合わせて、教材の是非を検証する。

## 2 イメージ化がもたらす深い数学理解

*Mathematica* 等ソフトウェアの進化は著しくグラフの挙動と関係する数学の分野は新しい学び方ができるようになっている。微分方程式においても、解の挙動を視覚的に見ながら微分方程式の重要性を深く理解できるようになっている。

例えば、熱伝導の簡単な例を見せるだけで熱 (拡散) 方程式とその解の挙動を実感させることができ、熱方程式の深い理解に貢献すると思われる。また、2 階の定数係数の線形微分方程式の解の表現する式をグラフと一っしょに理解することが可能であり、直流 RCL 回路の電流と関連づけることでコイルのインダクタンス、抵抗、コンデンサーの静電容量の値との関係を容易に理解できる。

### (1) 熱伝導の例

この例は長さ  $\pi$  の棒があり両端は氷付けになっていて、棒の各点  $x$  での温度は最初以下の  $\sin x + \sin 3x$  のグラフ (図 1) のようになっている。

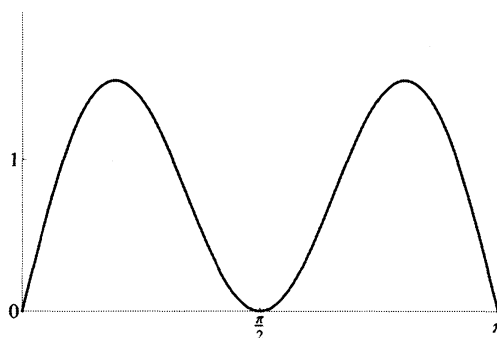


図 1 (初期条件)

そのまま放置すると、フーリエの法則に従って熱は高いところから低いところへ移動し、棒の温度変化は真中の部分の温度が一旦上昇に転じ、その後全体的に冷えていく。

この現象は、 $\sin x$  ( $\sin 3x$ ) と指数関数  $e^{-t}$  ( $e^{-3^2t}$ ) との積で得られる関数  $e^{-t} \sin x + e^{-9t} \sin 3x$  で表現され、 $t$  (時間) を経過させるときその挙動を見るだけで数学の凄さに驚かされ、感動せずにはいられない。

また、指数関数と三角関数を組み合わせてこのような動きが生じる理由も、以下のような関数  $e^{-t} \sin x$  と関数  $e^{-9t} \sin 3x$  を別々に  $t$  を 0 から 3 まで変化させるアニメーション (図 2) を観察し、次にそれらの和のグラフのアニメーション (図 3) を観察することで一目瞭然、納得することができる。また、このような原理を理解することでさらなる応用力が育成させる。

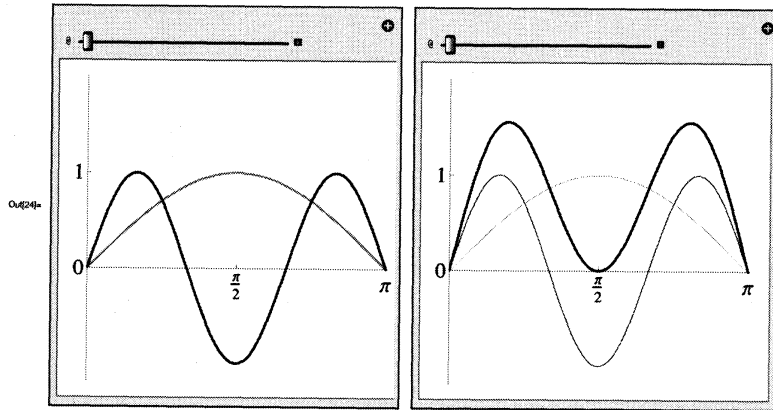


図 2

図 3

## (2) 直流 RLC 回路の電流の例

直流 RLC 回路に流れる電流  $i(t)$  は 2 階の定数係数の線形微分方程式

$$L i''(t) + R i'(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

に従うことが知られる。ただし、 $L$  (ヘンリ) はコイルのインダクタンス、 $R$  (オーム) は抵抗、 $C$  (ファラッド) はコンデンサーの静電容量である。

特に、回路にスイッチを入れた瞬間からの電流の挙動を知るために、初期条件  $i(0) = 0$ ,  $i'(0) = \frac{V}{L}$  ( $V$  は電圧で、コンデンサーの電荷  $Q(0) = 0$  より導かれる) のもとで解く。解法は特性方程式  $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$  を 2 次方程式の解の公式を用いて

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - (4L/C)}}{2L}$$

と解いて、以下のように場合分けして解を表現するのが一般的である。

$$1 \quad D = \frac{4L}{C} - R^2 < 0 \text{ のとき } i(t) = \frac{V}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

$$2 \quad D = \frac{4L}{C} - R^2 = 0 \text{ のとき } i(t) = \frac{V}{L} t e^{-\alpha t}$$

$$3 \quad D = \frac{4L}{C} - R^2 > 0 \text{ のとき } i(t) = \frac{V}{2\beta L} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t})$$

ここで  $\alpha = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{(4L/C) - R^2}}{2L}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{R^2 - (4L/C)}}{2L}$  である。

実際に回路を流れる電流を理解しようとするとき、上の式だけを見て理解できる学生は少ない。多くの学生はグラフと関連付けて始めて理解ができる状態になると思われる。

簡単のために、 $V = 10, R = L = 1$  とする。このとき  $C$  の値を 0 に近い値から 4 まで、また 4 から 30 までの間を小刻みに変化させるアニメーション (図 4) を考える。

$C$  の値の範囲に応じて表現は

$$i(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \frac{20}{\sqrt{(4/C) - 1}} \sin \frac{\sqrt{(4/C) - 1}}{2} t \quad (C < 4), \quad i(t) = 10 t e^{-\frac{1}{2}t} \quad (C = 4), \quad i(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \frac{10}{\sqrt{1 - (4/C)}} (e^{\frac{\sqrt{1 - (4/C)}}{2} t} - e^{-\frac{\sqrt{1 - (4/C)}}{2} t}) \quad (4 < C)$$

と異なるが、解を表すグラフは  $C$  に関して連続的に変化する様子が感得でき、 $C$  の値による電流の変化が明瞭に識別できる。

このように解のイメージを与えることで、判別式による解の表現だけに終始してしまう学生に微分方程式の「解の意味」と「有用性」を示すことができると考えている。

また、 $\frac{1}{50} \leq C \leq 4$  のとき、解は  $i(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \frac{20}{\sqrt{(4/C) - 1}} \sin \frac{\sqrt{(4/C) - 1}}{2} t$  で与えられ減衰振動という重要な挙動を示すが、その挙動を理解するために  $C = k/50$  とおいて  $k$  を 1 から 20 まで変化させながら、3 つの関数

$$e^{-\frac{1}{2}t} \frac{20}{\sqrt{(200/k) - 1}}, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \frac{-20}{\sqrt{(200/k) - 1}}, \quad \sin\left(\frac{\sqrt{(200/k) - 1}}{2} t\right)$$

と電流  $i(t)$  を表現する式  $e^{-\frac{1}{2}t} \frac{20}{\sqrt{(200/k) - 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{(200/k) - 1}}{2} t\right)$  のグラフをすべて同時に見れるアニメーション

(図 5) を考える。これによって関数の積として表現される式のグラフの概形が理解でき、減衰振動のイメージを得ることができる。画面は  $k = 15$  のときである。

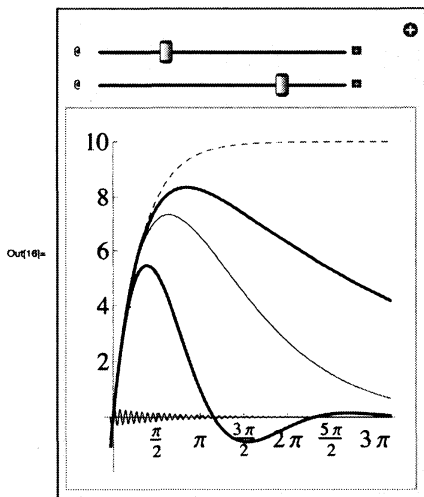


図 4

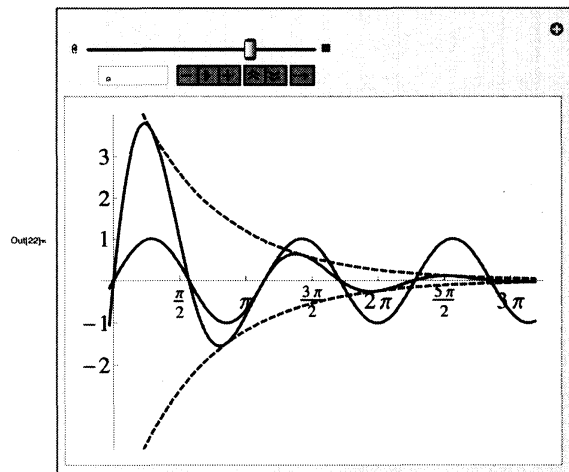


図 5

### 3 イメージ化の工夫1 (フーリエ解析)

以下は、応用数学 I (大学院・前期) で実施した教授法の工夫である。授業の対象は工学を専攻する前期課程の学生である。この授業のコンセプトは「イメージできてはじめて応用できる」である。

この授業では、関数の近似、テイラー展開、フーリエ級数、フーリエ変換などを扱う。概念から導かれる式がどのような挙動を示すかをソフトウェアを活用して観察させることで、知識のイメージ化を促し、数学をより有効に活用できる資質と時代に対応できる応用力の育成を目指している。

*Mathematica* で作成したアニメーションを授業中にプロジェクター使用で見せて、それを NB ファイルとしてポータルサイトに置くようにしている。後で学生はそれをダウンロードして自分で自由に操作できるようになっているのも授業の特長である。

関数の近似やテイラー展開において、*Mathematica* を活用し、視覚的にその挙動を観察すれば深い理解が得られることは周知の通りであるが、以下はフーリエ級数展開やフーリエ変換を教授する場合の工夫である。

(i) フーリエ級数展開での工夫

区分的に滑らかで周期  $2L$  を持つ周期関数  $f(x)$  は

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

としてフーリエ級数展開できるが、授業ではフーリエ係数  $a_k, b_k$  を先に紙と鉛筆で計算させ、計算した後にそれに対応する級数展開をアニメーションで見せ、その挙動を観察させることで効果を上げている。

以下は中間レポートの課題の一部である。

**課題：**下の図 6 のグラフから定義される周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を求めよ。

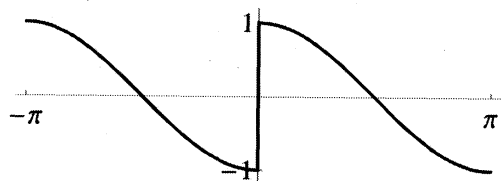


図 6

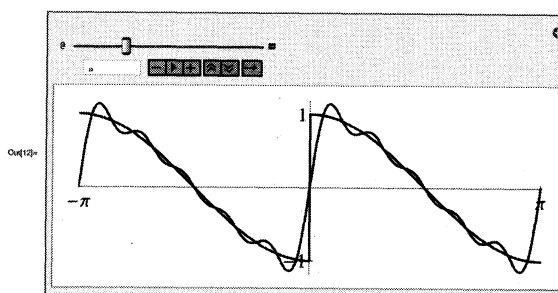


図 7

上の係数  $a_k$  ( $b_k$ ) はフーリエ係数と呼ばれ、課題の場合は

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

を計算する。レポート課題を回収した時点で、アニメーション (図 7) を授業中に見せて、授業後にポータルサイトに置くようにした。画面は  $k$  について 0 から 11 までの和の表すグラフと  $f(x)$  のグラフである。

アンケート調査からは、アニメーションを通して「積分の計算によって自分で求めたフーリエ係数が実際にグラフをうまく近似する」という体験が、学生に「よくわかる」と思わせる傾向が伺える。

(ii) フーリエ変換での工夫

フーリエ級数展開のように、三角関数のグラフ（高さ）を巧みに加減させてグラフを近似させていく手法は比較的理解しやすいが、関数  $f(x)$  に対してフーリエ変換  $a(s)$  は

$$a(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos sy dy$$

として定義されるので、まず、関数の積のグラフをイメージするのが難しい。さらに  $a(s)$  は積分で定義される式になるのでそのグラフをイメージするのはさらに難しい。この場面で、ソフトウェアを活用しイメージ化するのは非常に有効である。

最初の工夫として、以下の 図 8 のグラフで定義されるわかりやすい関数に対して、

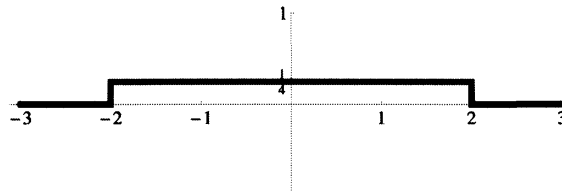


図 8

そのフーリエ変換のイメージ化として、積分で定義される関数  $a(s)$ （計算では  $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin 2s}{2s}$  となる）が描くグラフを実感できるようなアニメーション（図 9）を作成している。

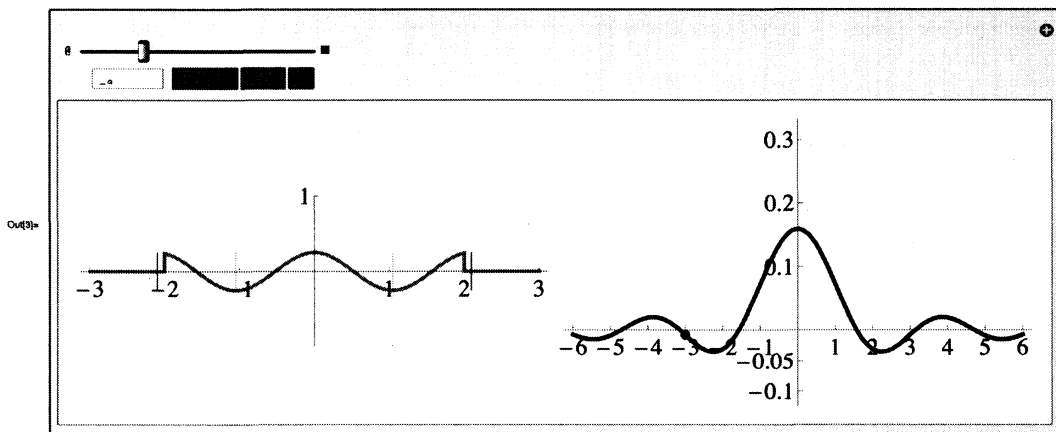


図 9

図は  $s = -3$  のときの一コマで、左のグラフは積で得られる関数  $f(y) \cos sy$  のグラフを表す。そのときにそのグラフで囲まれる図形の面積（グラフの正の部分と負の部分が打ち消し合って非常に小さい負の値になっている）が右のグラフの座標  $s = -3$  のときの値（丸印 ● で表示）に対応するようになっている。  $s$  の値が  $-6$  から  $6$  まで動くアニメーションで、グラフで作られる図形に対応して ● はその面積を値にとるように右のグラフ上を動かすのでフーリエ変換  $a(s)$  のグラフが明瞭にイメージできる。

さらにフーリエの積分公式

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} a(s) \cos sx ds = 2 \int_0^{\infty} a(s) \cos sx ds$$

を近似的に実現させるアニメーション (図 10) を作成し, フーリエ変換の機能をイメージ化させている. ここで積分の値は, 小区間の長さを  $\frac{1}{n}$ , 積分区間を  $[0, m]$  とする積和

$$\sum_{k=0}^{nm-1} a\left(\frac{(2k+1)}{(2n)}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)}{(2n)}x\right)$$

で近似計算させている. ただし,  $n, m$  は自然数. 画面は  $n = 2$  のアニメーションで  $m = 10$  のとき示される一コマである.

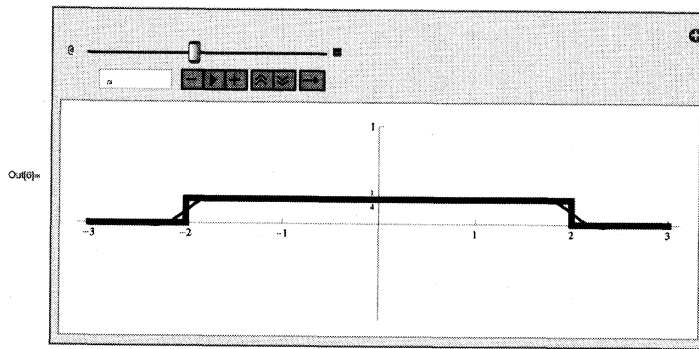


図 10

上のように  $n = 2$  でも区間を広げて積分すれば, フーリエの積分公式の右辺の関数は図 8 で与えられた関数  $f(x)$  にかなり近づくことが実感できる.

## 4 イメージ化の工夫 2 (微分方程式)

微分方程式 I (電子情報系の学部 2 年生が対象の前期授業) では 1 階の微分方程式および 2 階の線形微分方程式を扱っている. ここでもいかに微分方程式が自然現象の理解に役立っているかを感じさせながら基本的な微分方程式の解法を教授している.

授業では定数係数の 2 階線形微分方程式の解を直流 RLC 回路の電流 (2 の (2)) と関連づけることで, 微分方程式の形式的な解法だけでなく微分方程式とその解の挙動を組にさせた理解を試みている.

さらに, 1 階の線形微分方程式およびその解 (積分法で計算される) の表現式を理解させるために交流 RL 回路の過渡電流を例にとって説明している.

過渡電流は線形微分方程式の解として得られ, その解は指数関数と三角関数を用いた時間  $t$  の関数として表現される. しかしその式からその挙動をグラフとして読み取るとは容易ではない.

交流 RL 回路の過渡電流は 1 階の線形微分方程式

$$Li'(t) + Ri(t) = V \sin \omega t$$

(ただし  $i(0) = 0$ ) の解として得られるが、この解は

$$i(t) = \frac{V}{R^2 + (\omega L)^2} (\omega L e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

と表される。この式が表現する挙動は式を見て理解するよりもグラフを先に見て理解する方がわかりやすい。例えば、 $V = 10$ ,  $\omega = 3$  とし、 $R$  と  $L$  をそれぞれ 1 から 5 まで変化させるアニメーション (図 11) を活用してその挙動を観察させる。

表示されている図は、 $R = L = 1$  のとき、2つの関数  $\frac{30}{R^2 + (3L)^2} Le^{-\frac{R}{L}t}$ ,  $\frac{10}{R^2 + (3L)^2} (R \sin 3t - 3L \cos 3t) = \frac{10}{\sqrt{R^2 + (3L)^2}} \sin(3t + \phi)$  (ただし、 $\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (3L)^2}}$ ,  $\sin \phi = \frac{-\omega L}{\sqrt{R^2 + (3L)^2}}$ ) のグラフおよびこれら関数の和として表される  $i(t)$  のグラフである。

これらグラフを観察しながら、指数関数  $e^{-\frac{R}{L}t}$  のグラフ表現と三角関数  $\sin(3t + \phi)$  の表現するグラフを理解させてから、定数倍を考慮した上で、 $i(t)$  のグラフをそれらの和 (グラフの高さの和) として理解させることができる。

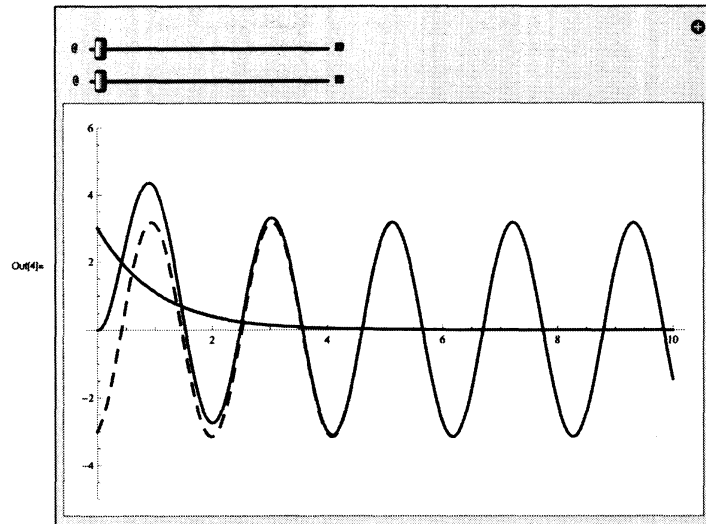


図 11

この形状を理解した上で、このアニメーションを通して  $R$  が大きくなると振幅が少しずつ小さくなること、また  $L$  が大きくなっても同じような現象が生じることが容易に理解できる。

また、関数  $\frac{30}{R^2 + (3L)^2} Le^{-\frac{R}{L}t}$  によって  $R$  が大きくなる場合と  $L$  が大きくなる場合とでどちらが早く破線の定常電流 (正弦波) に近づくかの違いも理解できる。

一度理解できれば当たり前と感ずるが、微分方程式をはじめて学ぶ学生の多くは式を導くだけで終わり、その解の挙動の考察までしないのではなかろうか。ソフトウェアが進化して、その解の挙動をアニメーション等で観察できて微分方程式を深く理解することができる。また、微分方程式をその挙動と組にして理解することは、微分方程式の重要性をより多くの学生に感じさせるためにも必要な学び方だと考えている。



## 5 学生アンケートによる検証

応用数学 I において、授業の工夫 (3 の (i) および (ii)) がフーリエ級数展開やフーリエ変換の深い理解に貢献したかを調査するために、以下の 2 つのアンケート調査を平成 22 年 7 月 14 日に評価には無関係とした上でレポート課題といっしょに提出した。回答者は 33 名であった。

問 1 「フーリエ級数展開される状況を *Mathematica* で実際に見ることで、フーリエ級数の理解を深めるのに役に立ちましたか」

問 2 「フーリエ変換と積分公式の関係を *Mathematica* を用いて実際に具体例を見ることでその理解が深まりましたか」

上の問 1 と問 2 に対する結果はそれぞれ下の表 2 と表 3 である。

表 2 (問 1 の結果)

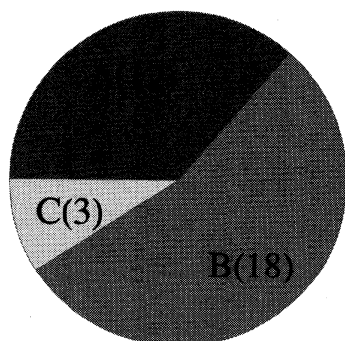
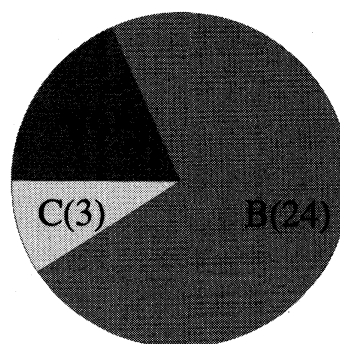


表 3 (問 2 の結果)



ただし、上の表の A, B, C, D, E はアンケート項目で、A:非常に役に立った(非常に深まった)、B:かなり役に立った(かなり深まった)、C:どちらともいえない、D:あまり役に立たなかった(あまり深まらなかった)、E:全く役に立たなかった(あまり深まらなかった)を表し、( )内の数字は同意した学生数を表す。

このアンケート調査の結果では、殆どの学生は非常にまたはかなり役立った(深まった)と回答している。

また、イメージ化を取り入れた授業の効果を検証するために、応用数学 1 で上の学生に対してさらに以下のアンケート調査をした。

問 3 「総じて、式の変形で導いた定理や公式を、*Mathematica* を使ったアニメーションでビジュアルに確認するという方法で授業を展開しましたが、理解する上で効果的だったと思いますか」

微分方程式 I でも、4 の工夫を検証するために、平成 23 年度の授業の最後に以下のアンケート調査(評価には無関係とした上で)を実施した。回答者は 42 名である。

問 4 「微分方程式の解を表現する式からその挙動を理解するためには、先にイメージが与えられる方が理解しやすいと思いませんか」

上の問 3 および問 4 の結果はそれぞれ以下の表 4 および表 5 である。

表 4 (問 3 の結果)

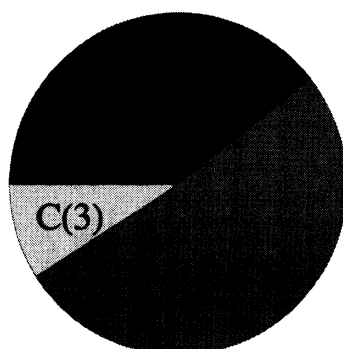
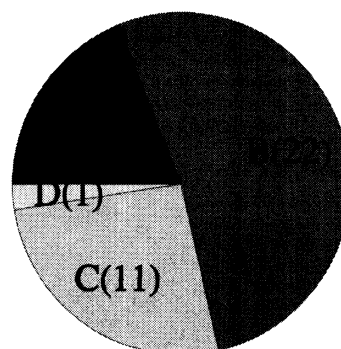


表 5 (問 4 の結果)



ただし、上の表の A, B, C, D, E はアンケート項目で、A：非常にそう思う、B：かなりそう思う、C：ふつう、D：あまりそう思わない、E：全くそう思わないを表し、( )内の数字は同意した学生数を表す。

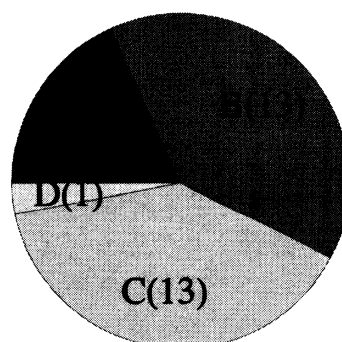
このアンケートからも、イメージ化は学生の深い理解に貢献していることが伺える。高度な数学を理解しようとするとき、基礎的な数学力がかなり必要とされるはずだが、イメージ化によって必ずしもそうでない学生にも理解できるようになる。一方で基礎的な数学力のある学生にとってはさらに深い理解をもたらすと感じている。

また、数学の有用性に関する検証のため平成 22 年の応用数学 I のアンケート調査時に以下のアンケート調査も実施した。

問 5 「Mathematica を用いたアニメーションを見たことで、フーリエ級数やフーリエ変換は応用できそうだという思いが今までより高まりましたか」

結果は以下の表 6 のようになった。

表 6 (問 5 の結果)



ただし、A, B, C, D, E は調査項目で、A：非常に高まった、B：かなり高まった、C：どちらともいえない、D：あまり高まらなかった、E：全く高まらなかったを表し、( )内の数字は同意した学生数を表す。

少なくとも、イメージ化の効果で過半数以上の学生は応用できそうという思いが高まったと回答している。このことはイメージ化は数学の有用性ももたらす効果があることを示している。

## 6 まとめ

ソフトウェアを活用して教材を提供するとき、ソフトウェアの進化に伴いより精密な教材が提供できるようになった。しかし、授業担当者にとって興味深いことが受講生の興味に直結するとは限らない。ここに教材としての難しさがある。このためにも地味な学生アンケート調査は継続する必要があると考えている。

ここに提案した応用数学や微分方程式の教材は、学生アンケートの検証結果からも内容の理解を深めるのに非常に効果的であったと判断できる。

数式が表現する挙動をイメージ化して教授することは、学生に対しては、「より深い数学理解を促し」、また「数学の有用性や重要性も感得させる」効果が期待できる。

ここで強調したいのは、ソフトウェアがもたらすアニメーションに代表されるような「動き」である。「動き」が従来の教育の中で達成できなかった数学の新しいイメージ造りに貢献していることである。

また、見逃してはいけないことは

- 1 学生に対する効果だけでなく
- 2 授業担当者側の深い数学理解にも貢献し

質の高い授業に結びつくことである。

多くの授業担当者の積極的な数学ソフトの活用を期待したい。

## 参考文献

- [1] 安藤豊・大澤秀雄共著, 電気・電子・情報系の基礎数学 II, 東京電機大学出版局
- [2] 日本 Mathematica ユーザー会編著, 入門 Mathematica, 東京電機大学出版局
- [3] 山本修一・深石博夫, 動くグラフによる視覚から入る数学の授業実践 III - Web 教材と MathReader を利用して -, 数学教育学会秋季論文集, pp. 149-151, 2006
- [4] 山本修一: マルチメディア教材を活用する大学数学の指導~情報化社会における新しい数学教育を目指して~, 大学教育と情報 (私立大学情報教育協会誌), Vol. 16, No. 1, pp. 15-17, 2007
- [5] 山本修一: Mathematica を活用する数学教育 - 数学的性質の視覚的に関連付けられた理解の上 -, 日本大学理工学部一般教育教室集報, 第 82 号, pp. 15-25, 2007
- [6] 山本修一: パソコン活用で培われる数学力, 数式処理 Vol. 17, No. 2, pp. 74-76, 2011