

Mathematica for Student を用いた実験数学の教材開発

東京理科大学 清水 克彦 (Katsuhiko Shimizu)

Tokyo University of Science

東京理科大学大学院・科学教育研究科 目代 充寿 (Mitsuhisa Mokudai)

Graduate School of Mathematics & Science Education,

Tokyo University of Science

1 はじめに

本研究では、CAS の効果的な利用方法の検討において、道具的位置づけの明確化を行うため、実験数学という方法を用いて、CAS の効果的な利用方法としての検討を行いたい。研究方法は、数学教育における実験数学の利用による可能性と、その具体的な教材についての考察を行う。

数学教育における CAS 利用によるメリットとしては、可視化や大量の数値計算のための利用などが挙げられるが、それらの CAS のメリットが実験数学を補助している。今回用いている実験数学は、大学生に向けた方法として山本 ([1]) によって定義されたものを用い、実験数学と CAS の関連について示し、その教材例として、3 次方程式の解と 3 次関数の解の配置についての考察の教材と、4 次方程式の解と 4 次関数の解の配置についての考察の教材、 $(a+b)^n$ の展開式の考察の教材、整数の集合が可換環となることを考察する教材の開発を行う。本研究においては数式処理システム (CAS) として、Mathematica for Student を用いる。

2 CAS の数学教育における位置づけ

数式処理システムの日本における現状を見てみると、その機能が備わっているグラフ電卓の導入とともに CAS は導入されているが、CAS 自体はほとんど使用されていないようである。また、高等教育には、高専などの含めて、ある程度導入されつつある。さらに、課外的な数学学習、数学クラブや U-18 などの参加作品（津高専、同志社の付属、慶応 SF など）を見ると、CAS の使用したものが増えてきている。このような現状を見ると、CAS の数学教育における活用はまだ日本ではまだ始まったばかりであるといえる。しかし、教師が CAS があることさえ知らない場合もよく見られることを考えるとその利用価値についての認識もこれからであると言える。

それに比べて、米国やフランス、そしてオーストラリアなどでは、CAS (Computer Algebra System) を搭載したパームトップ機が、大学入学資格試験や大学の工学部・数学科を除く理学部、高等学校で使用され教育効果を挙げている。このような傾向を、「欧米の学生は、計算能力が低いためにテクノロジーを使用せざるを得ない。」と見る意見も

ある。それに対して、大学入学試験でCAS使用可（グラフ電卓使用可）の問題と使用しないで解く問題の両方が出されている点から、これらの国では数学教育において「紙と鉛筆による問題解決能力」と「コンピュータを活用した問題解決能力」の両方を育成していると捉えると、日本では後者の指導に対する取り組みがあまりなされていないとも捉えることができる。

人間の数学的能力とテクノロジーの関係は次のように捉えられる。

Compensation(補償)：「足りない能力」を補ってくれる道具、コンピュータに対する従来の数学教育での見方

Amplification(増大)：「人間ではできないこと」をしてくれる道具

Empowerment (新しい能力や力)：「これまでとは違った能力」を与える道具

先の「計算能力が低いために電卓やCASを使用する」という捉え方は、Compensationの関係としてみることができる。この見方が数学教師が電卓の使用やCASの使用に積極的でないことの背景にあると言えよう。先に指摘した現状に変化を与えるためには、CASの残りの2つの関係を導入することが一つの契機を与えると思われる。本稿では、その一つとして「これまでとは違ったことを行う」道具として、「数学で実験を行う」ためのCASの活用の可能性を探り、そのための教材を開発していく。

3 実験数学とその可能性

山本 ([1]) によると、数学におけるコンピュータを利用した実験として、実験数学と数学実験という2つの考え方を導入し、定義を行っている。

- (数学実験) 的確な実験により、知識、技術を修得し、定着させる。
- (実験数学) 多くの実験を通して、新しい知見を得る。

さらに、この定義は清水 ([2]) によって、次のように解説されている。

実験数学と数学実験

[数学実験] … 数学の定理や法則が実際に成り立っていることを、コンピュータなどによって事例にあたり確認するための実験

[実験数学] … コンピュータを用いて様々な事例にあたり、予想を立てたり、検証したりする実験

それぞれの特徴については、以下の表のように挙げられている。

表 1 数学実験と実験数学の特徴 ([1])

数学実験	実験数学
実例により理解を深める こんな現象がある 実証的 数学を理解する 結果を明白に表現する	実例から予想し, 証明を求める 新しい現象を見つける 発見的 数学をする 数学を作る よりよい表現を模索する

前者は確かに成り立っていることを確認するような実験であり, 後者は数学の研究者が行うような実験である. しかし, 実験数学は研究者が行う数学研究としての技術だけではなく, 数学の学習においても有効であると山本 ([1]) は述べている.

また, 数学教育の現場では, 例や例題, 演習問題の一部に数学実験が見られ, テーマ導入後の問として, 「いろいろな場合について調べてみよう」などが実験数学に当たると考えられる. ところが, こういった実験数学に該当するような問題が減少しており, その理由としては, 生徒や教師からの「どのような場合を考えるか」や「答えが2つ以上ある」などの苦情の存在が挙げられている. しかしながら, こういった苦情を「自分で考えて, 自分なりに納得する」ことが数学教育の役割ではないのかと山本 ([1]) は述べている.

このことから, 数学教育において, 実験数学を扱うことで, 生徒が数学学習に必要であるであろう, 「自分で考えて, 自分なりに納得する」姿勢を身につけ, 既存の知識を活用し, 他の問題に応用するといった, 数学学習の上で必要な能力の育成に役立つのではないかと考える.

4 CASと実験数学

実験数学を行うに当たっては, 手計算で十分な場合もあるが, 大量の計算やグラフィックスの処理を必要とする場合に, 本来の数学をすることよりも, そういった作業に時間を使いすぎてしまうのは, 実験数学として意味をなさない. この観点から, 計算処理の部分は数式処理システム (CAS) を利用することがよいのではないかと考えられる.

対象とする分野については, 数式処理が特に大きな力を発揮する分野として, 代数分野を中心に広く検討した. その中で, 今回は3次方程式, 4次方程式の複素数平面上での解配置, および3次関数, 4次関数のグラフとの関係を考察する教材, $(a+b)^n$ の展開式を考察する教材, 整数の集合が可換環となることを考察する教材を作成した.

本研究においては, 数式処理システム (CAS) として Mathematica for Student を用いて教材例を紹介していく. なお教材例は, 以下の3種類を用意し各々の検討を行う.

- (1) 数値代入型 … 数値を代入することで, その結果を考察する. (プログラムは与える)
- (2) スライダー型 … スライダーを動かす, その結果を考察する. (プログラムは与える)

(3) 自己作成型 … 個々でプログラムを作成し，その結果を考察する。

実際に，それぞれの型について，次のような特性があると考えられる。

- (1) 数値代入型 … ある程度対象の焦点化ができ，多少の探究が可能
- (2) スライダー型 … 実験の自由度は低いが，探究対象の焦点化が可能
- (3) 自己作成型 … 実験の自由度は非常に高いが，探究する為の能力も必要

これより，実際に作成した教材例を示す。

5 教材例 1 「3 次関数と 3 次方程式の解の配置」

内容 3 次関数 $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフと複素数平面における 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解の配置の考察

対象 高校 2 年生

目的 3 次関数のグラフの概形と，解の関係，及び複素数平面における解の配置の規則性を考察する。

(解説) 3 次関数とそのグラフ，及び複素数平面における 3 次方程式の解の存在の可能性について考察するための教材として作成した。実際に，3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (ただし $a \neq 0, a, b, c, d$ は実数) の解を求める際には，2 次方程式に次数を下げて考える方法や，カルダノによる解法などがある。

ここで，3 次方程式の複素数平面上での解の配置について考えてみると，次のような解の配置が考えられる。

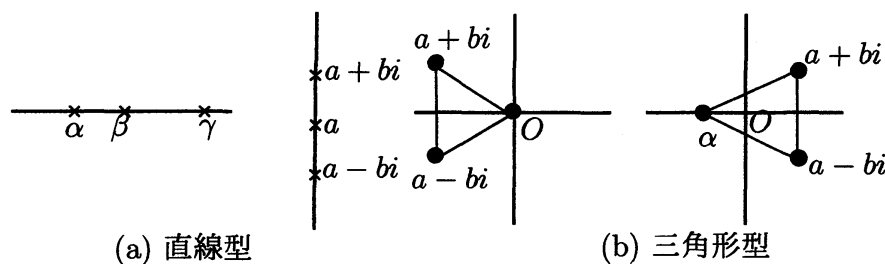


図 1 3 次方程式の解の配置

- (a) 直線型 … 3 個の実数解 α, β, γ (α, β, γ は実数)，または 1 個の実数解 a と 2 個の複素数解 $a \pm bi$ (a, b は実数)
- (b) 三角形型 … 1 個の実数解 α (α は実数) と 2 個の複素数解 $\pm a + bi$ (a, b は実数, $\alpha \neq a$)

この教材では、それぞれの係数 b, c, d の値を実験的に変更しながら、描かれた図と、解の配置、得られた3次方程式の解を見て、考察を行うことで、3次方程式の解は少なくとも1つの実数解を持つことや、解の配置から、複素解はどのように表記されるのかを考える教材を作成した。

また、3次関数 $y = f(x)$ の概形から、3次方程式 $f(x) = 0$ の解がどのようになるのかを考え、その解を複素数平面上に表すことで、幾何的な概形の考察を行うことができるように作成した。

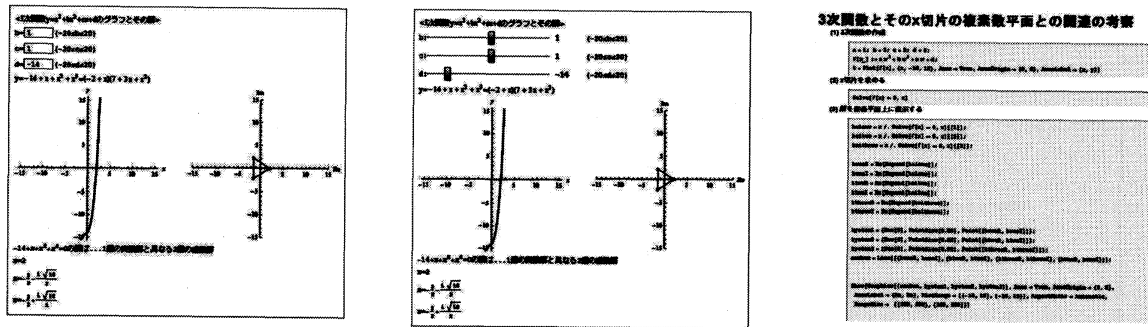


図2 教材例1の数値代入型(左) スライダー型(中央) 自己作成型(右)

6 教材例2 「4次関数と4次方程式の解の配置」

内容 複2次の形の4次関数 $y = f(x) = x^4 + cx^2 + e$ のグラフと複素数平面における4次方程式 $f(x) = 0$ の解の配置の考察

対象 高校2年生

目的 4次関数のグラフの概形と、解の関係、及び複素数平面における解の配置の規則性を考察する。

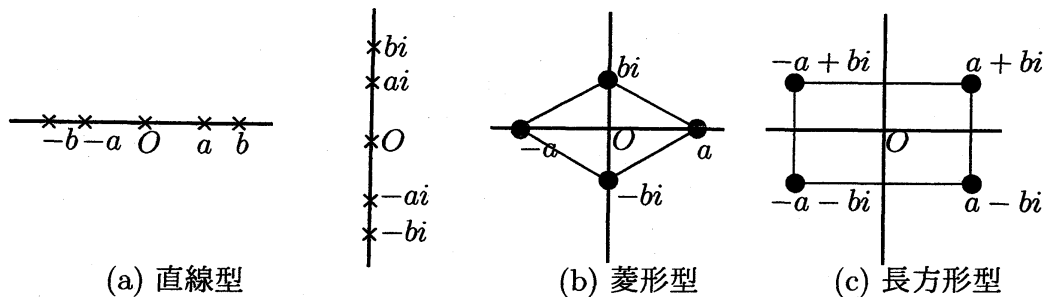
(解説) 一般的な4次方程式を考察すると複素数平面上での解配置が複雑となるので、今回は複2次の形の4次関数 $y = f(x) = x^4 + cx^2 + e$ とその4次方程式を考える。

複2次の形の4次方程式 $f(x) = x^4 + cx^2 + e = 0$ の解を求めるためには、 $t = x^2$ と置き、 t についての2次方程式として解き、それぞれの解の平方根をとればよい。

$$x^4 + cx^2 + e = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + ct + e = 0 \quad (\text{ただし } t = x^2)$$

解の配置を考えてみると、次のような解の配置が考えられる ([3])。



(a) 直線型

(b) 菱形型

(c) 長方形型

図3 複2次方程式の解の配置 ([3, p.106])

- (a) 直線型 $f(t) = 0$ が2個の正の解を持つとき4個の実数解, 2個の負の解を持つとき4つの純虚数解.
- (b) 菱形型 $f(t) = 0$ が正の解と負の解を持つとき2個の実数解と2個の純虚数解.
- (c) 長方形型 $f(t) = 0$ が複素解を持つとき, 4個の虚数解 ($\pm a \pm bi$, ただし複号任意)

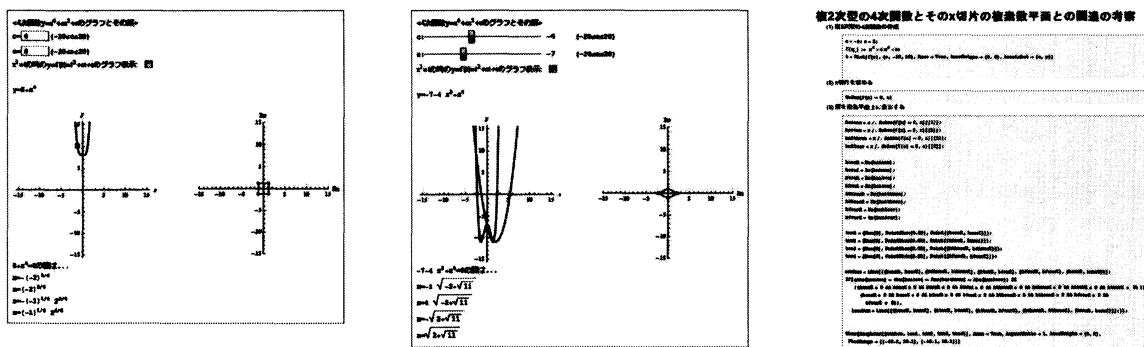


図4 教材例2の数値代入型(左), スライダー型(中央), 自己作成型(右)

この教材では, それぞれの係数 c, e の値を実験的に変更しながら, 描かれた図と, 解の配置, 得られた4次方程式の解を見て, 考察を行うことで, 複2次の場合の4次方程式の解がどのようなものかを考え, そのグラフもどのようなものかを考える教材を作成した.

また, 4次関数 $y = f(x)$ の概形から, 4次方程式 $f(x) = 0$ の解がどのようなものかを考え, その解を複素数平面上に表すことで, 幾何的な概形の考察を行うことができるように作成した.

7 その他の教材例

先に挙げた教材例以外にも, 次のような教材例を作成した.

7.1 教材例3 「 $(a + b)^n$ の展開式の考察」

内容 $(a + b)^n$ の展開式の考察

対象 高校1年生

目的 $(a + b)^n$ の展開式の各項の係数に着目し, その規則性について考察する.

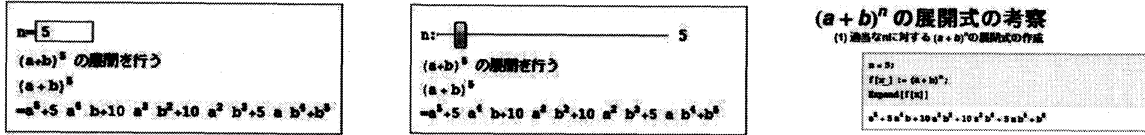


図5 教材例3の数値代入型(左), スライダー型(中央), 自己作成型(右)

7.2 教材例4「整数の可換環となる考察」

内容 整数の性質として、可換環となることの考察

対象 高校1年生

目的 整数の集合が可換環となることの考察を行う。

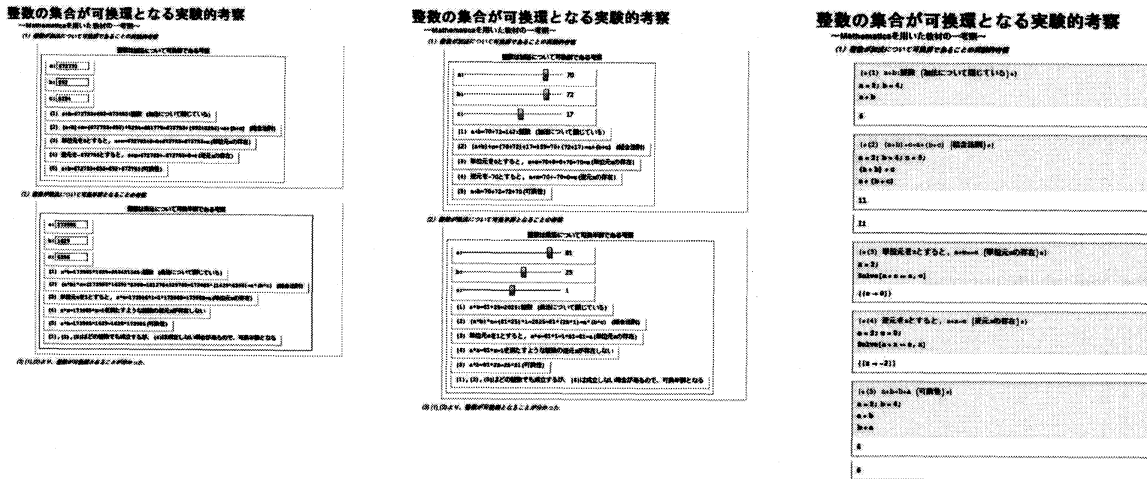


図6 教材例4の数値代入型(左), スライダー型(中央), 自己作成型(右)

今後、これらの教材についても、実験数学におけるCASの効果的な利用方法の考察を行っていきたい。

8 まとめと今後の課題

CASを利用することで、実験数学で行われる「大量の計算およびグラフィクス処理」を容易に行うことができ、目的である実験・考察を十分に行うことができるであろうことが確認でき、実験数学の中等教育における利用を具体的な教材を通して利用することが可能であることが確認できた。

また先に述べた通り、各教材例について次の3つの型の教材の考察が必要であることが確認できた。

- (1) **数値代入型** … 数値を代入することで、その結果を考察する。(プログラムは与える)

- (2) スライダー型 … スライダーを動かし、その結果を考察する。(プログラムは与える)
- (3) 自己作成型 … 個々でプログラムを作成し、その結果を考察する。

各型について、それぞれ特性があり、メリット、デメリットが存在するので、教材の内容に合わせた型の選定を行う必要がある。

今後の検討課題として、各分野に対して、適した型はどういったものなのか、また、CASの補助による実験数学のあり方について、今後もさらに検討する必要があると考える。さらに、これまで作成した教材の深化、および実験数学を行う新たな教材の作成を今後も継続して行っていきたい。

参考文献

- [1] 山本芳彦 (2000) 「実験数学入門」, 岩波書店
- [2] 清水克彦 (2010) 「実験数学による創造性の育成についての検討—テクノロジーによる帰納・類比、そして推測の導入—」, 日本科学教育学会 年会論文集 34 巻, pp.97-98
- [3] 一松信 (1993) 「新数学入門シリーズ 3 複素数と複素数平面」, 森北出版
- [4] J.B.Lagrange (2005), Using symbolic calculators to study mathematics. In D.Guin, K.Ruthven, L.Trouche (Editors) The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. pp.113-136. Springer