数理解析研究所講究録
第1781巻 2012年 103-107

古典的挿入定理における写像の終域について

高崎経済大学・経済学部
山﨑　薫里
(Faculty of Economics, Takasaki City University of Economics)
(Kaori YAMAZAKI)

本稿は, 論文 [13] の概説である.

1　導入

以下, 位相空間はすべてハウスドルフ空間, ベクトル空間はすべて実ベクトル空間であるとする. $\mathbb{R}$ は実数全体の集合, $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合, κ は無限基数をあらわす. また, X 上の下半連続, 上半連続, 連続実数値関数 $f:X\to\mathbb{R}$ 全体を, それぞれ, $LSC(X,\mathbb{R})$, $USC(X,\mathbb{R})$, $C(X,\mathbb{R})$ であらわす.

X の位相的性質を特徴づけるような X 上の関数組への挿入定理として, 以下がよく知られている.

Katětov-Tong の挿入定理 ([6], [10]; 距離空間 X に関しては Hahn; パラコンパクト空間 X に関しては Dieudonné; [4]). X を位相空間とする. このとき, $g\in USC(X,\mathbb{R})$, $h\in LSC(X,\mathbb{R})$, $g\leq h$ である関数の対 g,h に対し, 関数 $f_{(g,h)}\in C(X,\mathbb{R})$ が $g\leq f_{(g,h)}\leq h$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が正規空間となることである.

Dowker-Katětov の挿入定理 ([3], [6]; パラコンパクト空間 X に関しては Dieudonné; [4]). X を位相空間とする. このとき, $g\in USC(X,\mathbb{R})$, $h\in LSC(X,\mathbb{R})$, $g(x)<h(x)$ $(x\in X)$, である関数の対 g,h に対し, 関数 $f_{(g,h)}\in C(X,\mathbb{R})$ が $g(x)<f_{(g,h)}(x)<h(x)$ $(x\in X)$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が正規かつ可算パラコンパクト空間となることである.

Michael の挿入定理 ([7]). X を位相空間とする. このとき, $g\in USC(X,\mathbb{R})$, $h\in LSC(X,\mathbb{R})$, $g\leq h$ である関数の対 g,h に対し, 関数 $f_{(g,h)}\in C(X,\mathbb{R})$ が $g\leq f_{(g,h)}\leq h$ で, かつ, $g(x)<h(x)$ となる $x\in X$ について $g(x)<f_{(g,h)}(x)<h(x)$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が完全正規空間となることである.

Katětov-Tong の挿入定理において, 終域 '$\mathbb{R}$' は他の可分バナッハ束 c_0, l_p $(1\leqq p<\infty)$ に置き換えられるが, 別の可分バナッハ束 c には置き換えられないことが知られている ([5], [8], [12]).

本稿では, Dowker-Katětov や Michael の挿入定理における終域 "$\mathbb{R}$" は, どんな非自明な可分バナッハ束にも置き換えられることを示す. すなわち, 非

自明な可分バナッハ束は常に, Dowker-Katětov や Michael の挿入定理の終域のテスト空間となりうることを示す.

2 用語と主定理

ベクトル空間Yが$Y \neq \{\mathbf{0}\}$のとき, 非自明であるという. ここで, $\mathbf{0}$はYの原点をあらわす.

以下の用語は [9] による. 半順序の入ったベクトル空間 $(Y, \leq)$ が次の (i), (ii) をみたすとき 順序線形空間, (i), (ii), (iii) をみたすとき ベクトル束 と呼ばれる:

(i) $x, y, z \in Y$ について, $x \leq y$ のとき $x + z \leq y + z$ である;

(ii) $x, y \in Y$ と $r \geq 0$ となる $r \in \mathbb{R}$ について, $x \leq y$ のとき $rx \leq ry$ である ;

(iii) Yの任意の2点集合 $\{x, y\}$ は 最小上界 $x \vee y$ と最大下界 $x \wedge y$ をもつ.

ベクトル束Yと$A \subset Y$について, '$x \in A$ で $|y| \leq |x|$ のとき $y \in A$である' ならば, Aは solid であると呼ばれる. ここで, $z \in Y$に対し, $|z| = z \vee (-z)$ と定義する. 線形位相空間Yが, ベクトル束であり, かつ, solid 集合からなる $\mathbf{0}$-近傍基をもつとき, 位相ベクトル束 であると呼ばれる.

バナッハ空間 $(Y, \|\cdot\|)$ が, ベクトル束であり, かつ, 次の条件 (iv) をみたすとき, バナッハ束 と呼ばれる:

(iv) $x, y \in Y$ について, $|x| \leq |y|$ のとき $\|x\| \leq \|y\|$ である.

バナッハ束の球 $\{y \in Y : \|y\| \leq r\}$ $(r > 0)$ は solid であるので, バナッハ束は位相ベクトル束である.

順序線形空間Yに対し, 集合 $\{y \in Y : y \geq \mathbf{0}\}$ をYの 正錐, $[y_1, y_2] = \{z \in Y : y_1 \leq z \leq y_2\}$ $(y_1, y_2 \in Y,\ y_1 \leq y_2)$ を Y の 区間 と呼ぶ. 順序線形空間Yが線形位相空間であり, その正錐が閉集合であるとき, 順序線形位相空間 と呼ばれる. 位相ベクトル束における正錐 (や区間) は閉集合であるので, 位相ベクトル束は順序線形位相空間である. また, $y_1, y_2 \in Y$ について, $y_1 \leq y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$ であるとき, $y_1 < y_2$ であらわす.

位相空間X, ベクトル束Y と写像 $f, g : X \to Y$ に対し, 各 $x \in X$ について $f(x) \leq g(x)$ となるとき, $f \leq g$ とあらわす.

Xを位相空間, Yを位相ベクトル束とする. このとき, 写像 $f : X \to Y$ が 下半連続 (resp. 上半連続) であるとは, 任意の$x \in X$ とYの任意の$\mathbf{0}$-近傍Vに対し, xの近傍Gを

任意の $x' \in G$ について, $f(x) - f(x) \wedge f(x') \in V$ (resp. $f(x) \vee f(x') - f(x) \in V$)

となるようにとれるときをいう．この定義は，[12, Proposition 2.2] によるものであるが，Borwein-Théra [1] が順序線形位相空間 Y に対して導入していた定義と一致する．また，この定義は，Gutev-Ohta-Yamazaki [5] がバナッハ束 $Y = C_0(Z)$ に対して導入した定義とも一致する ([12, Corollary 2.3])．位相構造と束構造をもつ空間 Y への上下半連続写像としては様々な定義が知られており，挿入定理に関する研究報告も多い．本稿で上述の定義を採用する理由は，この定義が実数値半連続関数がもつ自然な性質を引き継いでいるからである．実際，(i) $f : X \to Y$ の上下半連続関数の定義は $Y = \mathbb{R}$ の場合，実数値の上下半連続関数のものと一致する，(ii) $f : X \to Y$ が上かつ下半連続写像であることと f が連続であることが同値である，(iii) $f : X \to Y$ が下半連続写像であることと $-f : X \to Y; x \mapsto -f(x)$，が上半連続であることが同値である，などが成り立つ．

位相空間 X と位相ベクトル束 Y に対し，下半連続，上半連続，連続写像 $f : X \to Y$ 全体からなる集合を，それぞれ，$LSC(X,Y)$, $USC(X,Y)$, $C(X,Y)$ であらわす．

Dowker-Katětov, Michael の挿入定理は，以下のように拡張できる．すなわち，Katětov-Tong の挿入定理とは異なり，いかなる非自明な可分バナッハ束も Dowker-Katětov, Michael の挿入定理の写像の終域になりうる．

定理 2.1. X を位相空間，Y を非自明な可分バナッハ束とする．このとき，$g \in USC(X,Y)$, $h \in LSC(X,Y)$, $g(x) < h(x)$ $(x \in X)$ である写像の対 g, h に対し，写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ $(x \in X)$ となるようにとれるための必要十分条件は，X が正規かつ可算パラコンパクト空間となることである．

定理 2.2. X を位相空間，Y を非自明な可分バナッハ束とする．このとき，$g \in USC(X,Y)$, $h \in LSC(X,Y)$, $g \le h$ である写像の対 g, h に対し，写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g \le f_{(g,h)} \le h$ で，かつ，$g(x) < h(x)$ となる $x \in X$ について $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ となるようにとれるための必要十分条件は，X が完全正規空間となることである．

ある種の位相的性質をもつ空間 X 上の関数の挿入定理を導く場合に，集合値関数の選択定理 [1], [2], [7], [11] を用いることができる．よって，本研究における関心は，終域 "$\mathbb{R}$" がいかなるバナッハ束でも置き換えられるのかという方向にあり，鍵になるのは以下の補題である．

補題 2.3. X を位相空間，Y を非自明な位相ベクトル束で $g \in USC(X,Y)$, $h \in LSC(X,Y)$, $g(x) < h(x)$ $(x \in X)$ となる写像の対 g, h に対し，写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ $(x \in X)$ となるようにとれるとする．このとき，X は正規空間である．また，Y が更に距離空間であると仮定すると，X は可算パラコンパクトになる．

補題 2.4. X を位相空間, Y を非自明な距離空間である位相ベクトル束で $g \in USC(X,Y)$, $h \in LSC(X,Y)$, $g \leq h$ となる写像の対 g,h に対し, 写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g \leq f_{(g,h)} \leq h$ で, かつ, $g(x) < h(x)$ となる $x \in X$ について $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ となるようにとれるとする. このとき, X は完全空間である.

3 可分とは限らない終域 Y の場合

位相空間 X が κ-族正規 であるとは, $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ であるような X の疎 (= 離散, discrete) な閉集合の族 $\mathcal{F}$ に対し, X の互いに素 (= disjoint) な開集合の族 $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$ が $F \subset U(F)$ $(F \in \mathcal{F})$ となるようにとれることである. 位相空間 Y に対し, $w(Y)$ は Y の位相濃度をあらわす.

バナッハ束 Y が可分でない場合へ挿入定理の終域を一般化することには, いくつかの技術的な困難な点があらわれる. 本稿では, 形式を少し変えた "挿入関数の拡張" を用いた結果を紹介する.

定理 3.1. $\kappa \geq \omega$ とし, X を位相空間, Y をバナッハ束で $w(Y) = \kappa$ かつ Y の任意の区間がコンパクトであるとする. このとき, X の任意の閉集合 A 上の写像 $g \in USC(A,Y)$, $h \in LSC(A,Y)$ で $g \leq h$ となる写像の対 g,h に対し, 写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g \leq f_{(g,h)}|A \leq h$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が γ-族正規空間となることである.

定理 3.2. $\kappa \geq \omega$ とし, X を位相空間, Y をバナッハ束で $w(Y) = \kappa$ かつ Y の任意の区間がコンパクトであるとする. このとき, X の任意の閉集合 A 上の写像 $g \in USC(A,Y)$, $h \in LSC(A,Y)$ で $g(x) < h(x)$ $(x \in A)$ となる写像の対 g,h に対し, 写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ $(x \in A)$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が γ-族正規かつ可算パラコンパクト空間となることである.

定理 3.3. $\kappa \geq \omega$ とし, X を位相空間, Y をバナッハ束で $w(Y) = \kappa$ かつ Y の任意の区間がコンパクトであるとする. このとき, X の任意の閉集合 A 上の写像 $g \in USC(A,Y)$, $h \in LSC(A,Y)$ で $g \leq h$ となる写像の対 g,h に対し, 写像 $f_{(g,h)} \in C(X,Y)$ が $g \leq f_{(g,h)} \leq h$ で, かつ, $g(x) < h(x)$ となる $x \in A$ について $g(x) < f_{(g,h)}(x) < h(x)$ となるようにとれるための必要十分条件は, X が γ-族正規かつ完全正規空間となることである.

注 3.4. 定理 3.1, 3.2, 3.3 において 'Y の任意の区間がコンパクト' という条件は, $\kappa > \omega$ については落とせない.

バナッハ束 $c_0(\kappa)$ や $l_p(\kappa)$ $(1 \leq p < \infty)$ の区間はコンパクトである ([5, Lemma 2.5], [12, Lemma 4.4]). よって, 定理 3.1, 3.2, 3.3 により, [5, Theorems 4.1, 4.5 and 4.6] にある挿入定理の終域 $c_0(\kappa)$ は $l_p(\kappa)$ $(1 \leq p < \infty)$ に変えることができる.

References

[1] J. M. Borwein and M. Théra, *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 463–474.

[2] M. Čoban and V. Valov, *A certain theorem of Michael on selections*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 28 (1975), 871–873 (in Russian).

[3] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (1951), 219–224.

[4] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Selections and sandwich-like properties via semi-continuous Banach-valued functions*, J. Math. Soc. Japan 55 (2003), 499–521.

[6] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. 38 (1951), 85–91. Correction: Fund. Math. 40 (1953), 203-205.

[7] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361–382.

[8] H. Ohta, *An insertion theorem characterizing paracompactness*, Topology Proc. 30 (2006), 557–564.

[9] H. H. Schaefer with M. P. Wolff, Topological Vector Spaces, Second edition, GTM 3, Springer, 1999.

[10] H. Tong, *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Duke Math. J. 19 (1952), 289–292.

[11] T. Yamauchi, *Continuous selections avoiding extreme points*, Topology and its Appl. 155 (2008), 916–922.

[12] K. Yamazaki, *Insertion theorems for maps to Banach lattices*, Topology and its Appl. 157 (2010), 1955–1965.

[13] K. Yamazaki, *The range of maps on classical insertion theorems*, Acta. Math. Hungar. 132 (2011), 42–48.