数理解析研究所講究録
第 1781 巻 2012 年 29-37

Higson 関数の拡張性

嶺 幸太郎 (筑波大学 数理物質系)

位相空間のコンパクト化は, 互いに交わらない 2 つの閉集合の分離性によって特徴づけられるのであった. 本稿では, Higson コンパクト化における閉集合の分離条件について考察する.

1. コンパクト化の特徴づけ

位相空間 X を稠密に含むコンパクト空間 $\widetilde{X}$ を X の**コンパクト化** (**compactification**) といい, $\partial X := \widetilde{X} \setminus X$ をコンパクト化の**境界** (**boundary**) と呼ぶ. 本稿では空間のハウスドルフ性を常に仮定し, コンパクト化もハウスドルフ空間に限るとする. X のコンパクト化 γX および δX について, $h|_X = \mathrm{id}_X$ なる同相写像 $h : \gamma X \to \delta X$ が存在するとき γX と δX は**同値なコンパクト化である**といい, $\gamma X \sim \delta X$ と書く. 次の定理により, X のコンパクト化は 2 つの閉集合の閉包が分離されるかどうかによって特徴づけられる (Theorem 3.5.5 of [2]):

定理 1.1. 位相空間 X のコンパクト化 γX および δX について次は同値である:
(i) γX と δX は同値なコンパクト化である,
(ii) X の任意の閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \emptyset \iff \mathrm{cl}_{\delta X} A \cap \mathrm{cl}_{\delta X} B = \emptyset$.

とくに, コンパクトでない全ての閉集合の閉包たちを分離しないコンパクト化が 1 点コンパクト化であり (例 1.2), 互いに交わらない, いかなる閉集合の閉包たちをも分離するコンパクト化が Stone-Čech コンパクト化である (定理 1.3(iii)).

例 1.2. 局所コンパクト空間 X の 1 点コンパクト化を αX とする. X 上のコンパクトでない閉集合 A, B において, $\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B \neq \emptyset$.

X 上の任意の有界連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が境界に連続な拡張を持つようなコンパクト化を X の **Stone-Čech コンパクト化**といい, これを βX と表す. 次は正規空間についてよく知られた事実である.

定理 1.3. 正規空間 X について次が成立する:
(i) 任意の閉集合 $A \subset X$ および連続関数 $f : A \to [a, b]$ について, $F|_A = f$ を満たす連続関数 $F : X \to [a, b]$ が存在する (ティーチェの拡張定理).
(ii) 任意の閉集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{\beta X} A \sim \beta A$.
(iii) X の互いに交わらない閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\beta X} A \cap \mathrm{cl}_{\beta X} B = \emptyset$.

上と似たような事実が一様空間においても成立する. 一様空間 $(X, \mathcal{U})$ に対して, 境界への連続な拡張を持つ X 上の実数値連続関数全体が X 上の実数値有界一様連続関数全体と一致するようなコンパクト化を **Smirnov コンパクト化**といい, これを $u_{\mathcal{U}} X$ と書く.

簡単のため, 距離空間 (X, d) を考えよう. 距離 d から導かれる X の一様構造 $\mathcal{U}_d$ に対する Smirnov コンパクト化を $u_{\mathcal{U}_d}X$ と書こう. 定理 1.3 の一様空間版として次が言える. ここで, 距離空間 (X, d) の部分集合 A および B について $d(A, B) := \inf\{\, d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\,\}$ とする.

定理 1.4. 距離空間 (X, d) について次が成立する[1]:

(i) 任意の閉集合 $A \subset X$ および一様連続関数 $f : A \to [a, b]$ について, $F|_A = f$ を満たす一様連続関数 $F : X \to [a, b]$ が存在する.
(ii) 任意の閉集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}_d}X} A \sim u_{\mathcal{U}_{d|A}}A$.
(iii) X の互いに交わらない閉集合 A, B について, $d(A, B) > 0$ であることと $\mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}_d}X} A \cap \mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}_d}X} B = \emptyset$ であることは必要十分である.

本稿では, 定理 1.3 や 1.4 に相当する命題が, 一般の粗空間 (coarse space) についてどの程度成り立つかについて考察する.

さて, コンパクト化のもう一つの特徴づけを挙げておこう:

定理 1.5. X の二つのコンパクト化 γX, δX が同値であるための必要十分条件は, それぞれのコンパクト化に連続な拡張を持つような X 上の実数値連続関数全体がちょうど一致する事である.

Stone-Čech コンパクト化や Smirnov コンパクト化は同値なコンパクト化を除いて唯一つ存在することを上の定理は述べている.

2. 粗構造と粗空間

まず粗空間に関するいくつかの定義を述べておこう. ここでの定義および記号はすべて Roe [6] に準ずる. X を集合とし, $E, F \subset X \times X$ および $K \subset X$ に対して, Δ_X および E^{-1}, $E \circ F$, $E[K]$ をそれぞれ次のように定義する:

- $\Delta_X := \{\, (x, x) \mid x \in X \,\}$,
- $E^{-1} := \{\, (x, y) \in X^2 \mid (y, x) \in E \,\}$,
- $E \circ F := \{\, (x, z) \in X^2 \mid \exists\, y \in X \text{ s.t. } (x, y) \in E$ かつ $(y, z) \in F \,\}$,
- $E[K] := \{\, x \in X \mid \exists\, y \in K \text{ s.t. } (x, y) \in E \,\}$.

$E \subset X^2$ が $E^{-1} = E$ を満たすとき**対称** (**symmetry**) であるという. 各 $x \in X$ について $E[\{x\}]$ を $E[x]$ と略記しよう.

補題 2.1. $E \subset X^2$ を Δ_X の近傍とすれば, 部分集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_X A \subset E[A]$.

Proof. 任意の $x \in \mathrm{cl}_X A$ に対して, E は $(x, x) \in X^2$ の近傍であるから, $U^2 \subset E$ を満たす x の近傍 U が存在する. このとき, $a \in U \cap A$ を取れば $(x, a) \in U^2 \subset E$ ゆえ $x \in E[A]$. □

[1]もちろん, この定理は一般の一様正規空間の場合に拡張することができる. (i) に相当する有界閉区間の一様 AE 性は Katětov [3] によって示された.

一様連続性の議論が一様空間に抽象化されたように, 距離空間の擬等長性を抽象化する枠組みとして粗空間が定義される:

定義 2.2. X^2 の部分集合族 $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{E}$ を X の**粗構造** (**coarse structure**) と呼び, 集合と粗構造の組 $(X, \mathcal{E})$ を**粗空間** (**coarse space**) という:

- $\Delta_X \in \mathcal{E}$,
- $E \in \mathcal{E},\ F \subset E \Longrightarrow F \in \mathcal{E}$,
- $E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E^{-1} \in \mathcal{E}$,
- $E, F \in \mathcal{E} \Longrightarrow E \circ F \in \mathcal{E},\ E \cup F \in \mathcal{E}$.

粗構造 $\mathcal{E}$ の各元を**制御集合** (**controlled set**) または**近縁** (**entourage**) と呼ぶ.

定義 2.3. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 $B \subset X$ が $B \times B \in \mathcal{E}$ を満たすとき**有界** (**bounded**) であるという.

例 2.4. 距離空間 (X, d) において, 次で定義される粗構造 $\mathcal{E}_d$ を**有界粗構造** (**bounded coarse structure**) という:

$$E \in \mathcal{E}_d \underset{\text{def}}{\iff} \sup\{\, d(x, y) \mid (x, y) \in E \,\} < \infty.$$

この粗構造においては, 距離空間における部分集合の有界性 (すなわち直径の有界性) と粗空間における有界性 (定義 2.3) は同値になる.

定義より, 有界集合の部分集合は有界である. 更に次が成り立つ (Proposition 2.19(a) of [6]):

事実 2.5. B を有界集合, $E \in \mathcal{E}$ とすれば, $E[B]$ も有界集合である.

粗空間 X が位相空間である場合, その位相と粗構造の性質には何らかの関係があることが望ましい. 任意の相対コンパクト集合[2] $K \subset X$ について $E[K]$ および $E^{-1}[K]$ が相対コンパクトとなるとき, $E \subset X^2$ は**固有** (**proper**) であるという.

さて, 本稿では議論を簡単にするために, 以降では**相対コンパクト性と有界性が同値になるような局所コンパクト粗空間**のみを考えることにする. ただし, $\mathcal{E}$ が Δ_X のある近傍を含むことは要求せず, とくに固有粗空間[3]でなくてもよい.

事実 2.6. 上の仮定の下では, 有界集合の閉包は有界であり, 有界閉集合であることとコンパクト性は一致する. また, 事実 2.5 より任意の制御集合は固有となる.

---

[2] 位相空間 X の部分集合 A が**相対コンパクト** (**relatively compact**) であるとは, その閉包 $\mathrm{cl}_X A$ がコンパクト集合になるときをいう.

[3] パラコンパクト空間 X の粗構造 $\mathcal{E}$ が次の (i) および (ii) を満たすとき, $\mathcal{E}$ は**固有** (**proper**) であるといい, $(X, \mathcal{E})$ を**固有粗空間** (**proper coarse space**) と呼ぶ:

(i) Δ_X の近傍となるような制御集合が存在する. (ii) 任意の有界集合は相対コンパクトである.

3. HIGSON 関数と HIGSON コンパクト化

定義 3.1. 粗空間 $(X,\mathcal{E})$ 上の有界連続関数 $f:(X,\mathcal{E})\to\mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき **Higson 関数 ($\mathcal{E}$-Higson)** であるという:

$$\forall\, E\in\mathcal{E},\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, B\subset X\text{: 有界}\quad \text{s.t.}\quad \forall\, x\in X\setminus B,\ \operatorname{diam} f(E[x])<\varepsilon.$$

ここで, $\operatorname{diam} A := \sup\{\, |a-b| \mid a,b\in A\,\}$ は $A\subset\mathbb{R}$ の直径を表す.

定義 3.2. 粗空間 $(X,\mathcal{E})$ に対して, 境界への連続な拡張を持つ X 上の実数値連続関数全体が X 上の Higson 関数全体と一致するようなコンパクト化を $(X,\mathcal{E})$ の **Higson コンパクト化**といい, これを $h_{\mathcal{E}}X$ と書く. さらに, Higson コンパクト化の境界を $\nu_{\mathcal{E}}X$ と書く. とくに粗構造が不明瞭でない場合は, しばしば略して hX, νX と書く.

固有粗空間において, その Higson コンパクト化の境界は粗不変量 (coarse invariant) であることが知られている (Corollary 2.42 of [6]).

例 3.3. 局所コンパクトな距離空間 (X,d) に対して, 次で定義される $\mathcal{E}^0_d$ は粗構造になり, **C_0 粗構造**と呼ばれる:

$$E\in\mathcal{E}^0_d \underset{\text{def}}{\iff} \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, K\subset X:\text{コンパクト}\ \ \text{s.t.}\ \ (x,y)\in E\setminus K^2\ \Rightarrow\ d(x,y)<\varepsilon.$$

C_0 粗構造においては, $f:X\to\mathbb{R}$ が $\mathcal{E}^0_d$-Higson であることと有界一様連続関数であることとは同値である (cf. [5]). したがって, 粗空間 $(X,\mathcal{E}^0_d)$ の Higson コンパクト化は一様空間 $(X,\mathcal{U}_d)$ の Smirnov コンパクト化に等しい.

例 3.4. 局所コンパクト空間 X に対して, X^2 のコンパクト部分集合全体で生成される粗構造を**離散粗構造** (**discrete coarse structure**) という.[4] すなわち, 次で定義される粗構造である:

$$\mathcal{E} := \{\, A\subset X\times X \mid A\setminus\Delta_X \text{ は } X^2 \text{ の相対コンパクト部分集合}\,\}.$$

離散粗構造において, Higson 関数全体が有界連続関数全体と一致することは定義よりすぐに分かる. つまり, その Higson コンパクト化は Stone-Čech コンパクト化に等しい.

例 3.5. 局所コンパクト空間 X において, 固有な制御集合すべてを集めた粗構造を**密着粗構造** (**indiscrete coarse structure**) という. X にパラコンパクト性を仮定すると, この Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化に等しいことが分かる.

次の粗構造に関する Higson コンパクト化も 1 点コンパクト化に等しい:

例 3.6 (Example 2.44 of [6]). 離散空間 X において, 次で定義される粗構造 $\mathcal{E}$ を**普遍有界幾何構造** (**universal bounded geometry structure**) という:

$$E\in\mathcal{E} \underset{\text{def}}{\iff} \exists\, n\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall\, x\in X,\ |E[x]|,\ |E^{-1}[x]|\le n,$$

ここで, $|A|$ は集合 A の濃度を表す.

[4] Roe [6] では, 離散空間に限って定義していた.

与えられたコンパクト化から粗構造を構成することもできる:

定義 3.7 (Theorem 2.27 of [6]). 局所コンパクト空間 X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ および $E \subset X^2$ について, 次の (a)〜(c) はそれぞれ同値である:

(a) $(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}} E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X}$,

(b) E は固有であり, $\forall\,(x_\lambda, y_\lambda) \in E,\ x_\lambda \longrightarrow \omega \in \partial X\ (\lambda \in \Lambda) \implies y_\lambda \longrightarrow \omega\ (\lambda \in \Lambda)$,

(c) E は固有であり,

$\forall\,\omega \in \partial X,\ \forall\,V \subset \widetilde{X}$: ω の近傍, $\exists\,U \subset V$: ω の近傍 s.t. $E \cap (U \times (X \setminus V)) = \emptyset$.

上の (a)〜(c) のいずれかを満たす (したがってすべてを満たす) 集合 $E \subset X^2$ たち全体で構成される X^2 の部分集合族 $\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ は粗構造の条件を満たし, これを $\widetilde{X}$ による**位相的粗構造** (**topological coarse structure**) あるいは**連続的に制御された粗構造** (**continuously controlled coarse structure**) と呼ぶ.

一般には, $(X, \mathcal{E}_{\widetilde{X}})$ の Higson コンパクト化が $\widetilde{X}$ に一致するとは限らない.[5] また, 次の命題の包含関係を等号に変えることは一般にはできない.

命題 3.8 (Proposition 2.45 of [6]). X の粗構造 $\mathcal{E}$ について, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{h_{\mathcal{E}}X}$.

4. Higson 関数の拡張性

Higson コンパクト化における閉集合の分離条件を粗構造の言葉で記述するために, 次の概念を導入する:

定義 4.1. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A, B が次を満たすとき, **発散する** (**diverge**) または**漸近的に交わらない** (**asymptotically disjoint**) という:

$$\forall\,E \in \mathcal{E},\quad E[A] \cap E[B]\ \text{は有界}.$$

あとで挙げる例により, 次の補題の逆は一般には成立しない.

補題 4.2. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \emptyset$ ならば A と B は発散する.

Proof. A と B が発散することを背理法により示そう. もし $E[A] \cap E[B]$ が有界 (すなわち相対コンパクト) でないような制御集合 $E \in \mathcal{E}$ が存在するとすれば, ある $\omega \in \nu X$ に収束する有向点列 $z_\lambda \in E[A] \cap E[B]$ が見つかる. $(x_\lambda, z_\lambda), (y_\lambda, z_\lambda) \in E$ となる $x_\lambda \in A$, $y_\lambda \in B$ を取れば, 命題 3.8 より $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ であるから, 定義 3.7(b) より $x_\lambda, y_\lambda \longrightarrow \omega$. したがって $\omega \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X \neq \emptyset$ となり, 矛盾を得る. □

粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A において, $\mathcal{E}$ の A への制限 $\mathcal{E}|_A := \{\, E \in \mathcal{E} \mid E \subset A^2 \,\}$ は A 上の粗構造をなす. $(A, \mathcal{E}|_A)$ を X の**部分粗空間**と呼ぶ. いま我々は, 相対コンパクト性と有界性が同値になる粗空間のみを考えている. 部分粗空間 $A \subset X$ もそのような状況を満たすためには, A は閉集合でなければならない. 次の事実は定義より直ちに得られる:

---

[5] $\widetilde{X}$ が第 1 可算公理を満たすならば一致する.

事実 4.3. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合[6] A および $\mathcal{E}$-Higson 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, $f|_A$ は $\mathcal{E}|_A$-Higson である. □

定理 1.3 や 1.4 に相当する命題が, 一般の粗空間について常に成り立つわけではないものの, 今回の研究で (i)〜(iii) の成立条件がそれぞれ同値であることが分かった:

定理 4.4. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ について次は同値である.

(i) 任意の閉集合 $A \subset X$ および $\mathcal{E}|_A$-Higson $f : A \to [a, b]$ について, $F|_A = f$ を満たす $\mathcal{E}$-Higson $F : X \to [a, b]$ が存在する. すなわち, 任意の閉集合からの Higson 関数は全体の Higson 関数に拡張する.

(ii) 任意の閉集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{hX} A \sim h_{\mathcal{E}|_A} A$.

(iii) 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散することと $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$ となることは必要十分である.

Proof. (i)⇒(ii): 定理 1.5 より, $\mathrm{cl}_{hX} A$ に拡張する A 上の連続関数全体 $S(\mathrm{cl}_{hX} A)$ と $h_{\mathcal{E}|_A} A$ に拡張する A 上の連続関数全体 $S(h_{\mathcal{E}|_A} A)$ が一致することを示せばよい.

まず $S(\mathrm{cl}_{hX} A) \subset S(h_{\mathcal{E}|_A} A)$ を示そう. 任意の連続関数 $\tilde{f} : \mathrm{cl}_{hX} A \to \mathbb{R}$ について, $\tilde{f}|_A$ が $\mathcal{E}|_A$-Higson であることを示せばよい. ティーチェの拡張定理より $\tilde{f}$ は $\tilde{F} : hX \to \mathbb{R}$ に拡張する. Higson コンパクト化の定義より $F := \tilde{F}|_X$ は $\mathcal{E}$-Higson であり, その制限 $F|_A = \tilde{f}|_A$ は $\mathcal{E}|_A$-Higson である. 以上により $S(\mathrm{cl}_{hX} A) \subset S(h_{\mathcal{E}|_A} A)$. このことは (i) を仮定せずとも成立することに注意したい.

次に $S(h_{\mathcal{E}|_A} A) \subset S(\mathrm{cl}_{hX} A)$ を示そう. 任意の $\mathcal{E}|_A$-Higson $f : A \to \mathbb{R}$ が $\mathrm{cl}_{hX} A$ に拡張することを言えばよい. f を $\mathcal{E}|_A$-Higson とすれば (i) により X への $\mathcal{E}$-Higson なる拡張 $F : X \to \mathbb{R}$ を持つ. F は hX への拡張 $\tilde{F}$ を持ち, その制限 $\tilde{F}|_{\mathrm{cl}_{hX} A}$ が求める拡張である.

(ii)⇒(i): $f : A \to [a, b]$ を $\mathcal{E}|_A$-Higson としよう. f は $\mathrm{cl}_{hX} A \sim h_{\mathcal{E}|_A} A$ 上への拡張 $\tilde{f}$ を持つ. ティーチェの拡張定理により, $\tilde{f}$ は hX 上への拡張 $\tilde{F}$ を持ち, その制限 $F = \tilde{F}|_X$ は $\mathcal{E}$-Higson なる f の拡張である.

(i)⇒(iii): A と B が発散すると仮定する. $Y = A \cup B$, $f : Y \to [0, 1]$ を $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ と定める. f が $\mathcal{E}|_Y$-Higson であることを確認しよう. 任意の対称な $E \in \mathcal{E}|_Y$ に対して, $K = E[A] \cap E[B]$ は有界であるから, $x \in Y \setminus K$ ならば $E[x] \subset A$ または $E[x] \subset B$ である. 実際, $E[x] \cap A \neq \emptyset$ かつ $E[x] \cap B \neq \emptyset$ とすれば, $(a, x), (b, x) \in E$ を満たす $a \in A$, $b \in B$ が存在し, E の対称性から $x \in E[A] \cap E[B] = K$ となり $x \notin K$ に反する. ゆえに $E[x]$ は, A または B の少なくともいずれか一方に含まれてなければならない. よって, $\mathrm{diam}\, f(E[x]) = 0$ ゆえ f は $\mathcal{E}|_Y$-Higson となる. したがって, (i) より f は $\mathcal{E}$-Higson となる拡張 $F : X \to [0, 1]$ を持ち, 更に F は $\tilde{F} : hX \to [0, 1]$ へ拡張する. このとき, $\mathrm{cl}_{hX} A \subset \tilde{F}^{-1}(0)$ および $\mathrm{cl}_{hX} B \subset \tilde{F}^{-1}(1)$ より $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \subset \tilde{F}^{-1}(0) \cap \tilde{F}^{-1}(1) = \emptyset$.

$\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$ ならば A と B が発散することは補題 4.2 より常に成り立つ.

(iii)⇒(ii): 定理 1.5 より, $S(\mathrm{cl}_{hX} A)$ と $S(h_{\mathcal{E}|_A} A)$ が一致することを示せばよい. まず $S(\mathrm{cl}_{hX} A) \subset S(h_{\mathcal{E}|_A} A)$ は (i)⇒(ii) の証明で述べたように, 常に成り立つ. 次に $S(h_{\mathcal{E}|_A} A) \subset$

[6] 閉部分集合でなくてもよい.

$S(\mathrm{cl}_{hX} A)$ を示したいが, これは $q|_X = \mathrm{id}_X$ を満たす連続写像 $q : \mathrm{cl}_{hX} A \to h_{\mathcal{E}|_A} A$ が存在することと同値である.[7] そこで, 次の主張を用いる.

主張 4.5 (Theorem 3.2.1 of [2]). X を位相空間 $\widetilde{X}$ の稠密部分集合とし, K をコンパクト空間とする. 連続写像 $q : X \to K$ が $\widetilde{X}$ 上に連続に拡張するための必要十分条件は, 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset K$ に対して, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\, q^{-1}(A) \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\, q^{-1}(B) = \emptyset$ となることである.

恒等写像 $\mathrm{id}_X; X \to h_{\mathcal{E}|_A} A$ について主張 4.5 を適用し, q の存在を示そう. $h_{\mathcal{E}|_A} A$ の互いに交わらない閉集合 $\widetilde{C}, \widetilde{D}$ を任意に取る. $C := \widetilde{C} \cap A$ および $D := \widetilde{D} \cap A$ は補題 4.2 により部分粗空間 $(A, \mathcal{E}|_A)$ において発散する. まず, C と D が $(X, \mathcal{E})$ においても発散することを背理法で示そう. もし $E[C] \cap E[D]$ が有界とならないような対称かつ Δ_X を含む $E \in \mathcal{E}$ があると仮定すれば, ある $\omega \in \nu X$ に収束する有向点列 $x_\lambda \in E[C] \cap E[D]$ が存在する. 各 λ について $(x_\lambda, c_\lambda), (x_\lambda, d_\lambda) \in E$ を満たす $c_\lambda \in C$ および $d_\lambda \in D$ を取れば, $(c_\lambda, d_\lambda) \in E \circ E$ である. $E \circ E$ は対称かつ Δ_X を含むことから $c_\lambda, d_\lambda \in (E \circ E[C]) \cap (E \circ E[D])$ となり, $E' := (E \circ E) \cap A^2 \in \mathcal{E}|_A$ についても $c_\lambda, d_\lambda \in E'[C] \cap E'[D]$ が成り立つ. 命題 3.8 より $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ であるから, $x_\lambda \longrightarrow \omega$ および定義 3.7(b) より $c_\lambda, d_\lambda \longrightarrow \omega$ となり, つまり $E'[C] \cap E'[D]$ は有界でない. これは $(A, \mathcal{E}|_A)$ において C と D が発散することに矛盾する. 以上より, C と D は $(X, \mathcal{E})$ においても発散する. したがって (iii) より $\mathrm{cl}_{hX} C \cap \mathrm{cl}_{hX} D = \emptyset$. ゆえに主張 4.5 より id_X は $q : \mathrm{cl}_{hX} A \to h_{\mathcal{E}|_A} A$ に拡張する. □

系 4.6. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が定理 4.4 の各条件を満たすならば, その閉部分粗空間も各条件を満たす. □

固有粗空間については次の条件も同値になる:

命題 4.7. 固有粗空間 $(X, \mathcal{E})$ において, 定理 4.4 の各条件と次は同値である.

(iv) 任意の集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散することと $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \emptyset$ となることは必要十分である.

Proof. (iii)⇒(iv): 補題 4.2 の逆が成り立つことを示せばよい. A と B が発散すると仮定する. まず $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B$ が有界であることを示そう. $\mathcal{E}$ は固有であるから, Δ_X の近傍となる $E \in \mathcal{E}$ が存在する. このとき補題 2.1 より $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B \subset E[A] \cap E[B]$ であり, A と B は発散することから $E[A] \cap E[B]$ は有界である. したがって $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B$ も有界である. $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B$ を含む X における相対コンパクトな開集合 U を取り, $A' := (\mathrm{cl}_X A) \setminus U$, $B' := (\mathrm{cl}_X B) \setminus U$ とすれば,

$$\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} A' \cap \mathrm{cl}_{hX} B' \cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} A' \cap \mathrm{cl}_{hX} B'$$

である. A' と B' は互いに交わらない X の閉集合であり, 更に $A' \subset E[A]$ および $B' \subset E[B]$ ゆえ A' と B' は発散する. したがって (iii) より $\mathrm{cl}_{hX} A' \cap \mathrm{cl}_{hX} B' = \emptyset$ となり, それゆえ $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \emptyset$ を得る.

---

[7] より詳しくは [4] を参照されたい.

(iv)⇒(iii): 明らか. □

5. 正規な粗空間

定理 4.4 の各条件を満たす粗空間 (およびその粗構造) を**正規**な粗空間 (および**正規**な粗構造) と呼ぶことにしよう. 系 4.6 により, 正規粗空間の閉部分粗空間は正規である. 定理 1.1 および 4.4 から正規粗空間の Higson コンパクト化の特徴づけを得る:

系 5.1. 正規粗空間 X およびそのコンパクト化 $\widetilde{X}$ について次は同値である:
(i) $\widetilde{X}$ と hX は同値なコンパクト化である,
(ii) 互いに交わらない X の任意の閉集合 A, B について,

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B = \emptyset \iff A \text{ と } B \text{ は発散する}.$$ □

正規粗空間の例を見てみよう.

命題 5.2. 第 1 可算公理を満たすコンパクト化 $\widetilde{X}$ の位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ は正規である.

Proof. 条件 (iii) の対偶を示そう. $A, B \subset X$ を交わらない閉集合とし, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B \neq \emptyset$ を仮定する. $\omega \in \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B$ とすれば, $\omega \in \partial X := \widetilde{X} \setminus X$ であり, ω に収束する点列 $a_n \in A$ および $b_n \in B$ が存在する. このとき $E := \{ (a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \in \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ である. 何故なら, 任意のコンパクト集合 K に対して, $E[K]$ は有限集合となるので E は固有である. また, a_n および b_n の集積点は ω 唯一つであることから, 定義 3.7(b) を満たすことが分かり $E \in \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ を得る. $E' := E \cup E^{-1} \cup \Delta_X \in \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ とすれば, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \in E'[A] \cap E'[B]$ である. したがって $E'[A] \cap E'[B]$ は有界ではなく, とくに A と B は発散しない. □

一般のコンパクト化について命題 5.2 が成り立つかどうかは分かっていない:

問題 5.3. 任意の位相的粗構造は正規か?

命題 5.2 が適用外のいくつかの粗空間について個別に考察しておく.

命題 5.4 (cf. [1]). 固有距離空間[8]の有界粗構造は正規である.

事実 5.5. 正規[9]空間における離散粗構造, 普遍有界幾何構造, C_0 粗構造はそれぞれ正規である.

Proof. 離散粗構造の閉部分粗構造は, やはり離散粗構造である. これらの Higson コンパクト化とは Stone-Čech コンパクト化のことであり, 条件 (ii) の成立が定理 1.3(ii) より得られる. 普遍有界幾何構造や C_0 粗構造についても同様の論法により条件 (ii) の成立が分かる. □

最後に正規でない粗空間の例を一つ挙げよう:

---

[8]有界閉集合であることとコンパクト性が同値な距離空間を**固有距離空間** (**proper metric space**) という.

[9]この "正規" は位相空間としての正規性, すなわち T_4 分離公理が成立することを意味する.

例 5.6. 半直線 $X=[0,\infty)$ を考える. $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n,2n+1]$, $U=X\setminus A$ とし, U における通常の距離による有界粗構造を $\mathcal{E}'$ とする. このとき, $\mathcal{E}'$ および X^2 のコンパクト集合全体で生成される粗構造を $\mathcal{E}$ とすれば, $(X,\mathcal{E})$ は正規でない.

Proof. $\mathcal{E}|_A$ は A^2 のコンパクト集合全体で生成される粗構造に一致するゆえ, A 上の任意の有界連続関数は $\mathcal{E}|_A$-Higson である. そこで $f:A\to\mathbb{R}$ を次のように定義すれば

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x\in[4n,4n+1],\\ 1 & \text{if } x\in[4n+2,4n+3]\end{cases}$$

これは A 上の Higson 関数である. f の任意の連続な拡張 $F:X\to\mathbb{R}$ を取れば区間の連結性により各 $n\in\mathbb{N}$ について $F((2n+1,2n+2))\supset(0,1)$ となり, とくに $\operatorname{diam}F((2n+1,2n+2))$ は 0 に収束しない. このことと $\mathcal{E}|_U=\mathcal{E}'$ であることから, $F|_U$ は $\mathcal{E}|_U$-Higson でないことが分かる. ゆえに事実 4.3 より F は $\mathcal{E}$-Higson でない. 以上より, f は Higson 関数となる X への連続な拡張を持たないことが分かった. つまり $(X,\mathcal{E})$ は正規粗空間でない. □

上の例は Δ_X の近傍となる制御集合が存在しない粗構造である. 正規でない固有粗空間の例があるかどうかは分かっていない:

問題 5.7. 任意の固有粗空間は正規か?

References

[1] A.N. Dranishnikov, J. Keesling, and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology **37** (1998), no. 4, 791–803.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[3] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. **38** (1951), 85–91.

[4] 嶺 幸太郎, 平面で構成できる数直線のいくつかのコンパクト化による上限, 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究, 数理解析研究所講究録 **1681** (2010), 1–8.

[5] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures*, `arXiv:1106.1672v3`.

[6] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.