数理解析研究所講究録
第 1782 巻 2012 年 1-16

Resolution of the Stokes paradox by the rotation of bodies in the plane

菱田 俊明 (Toshiaki Hishida)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
464-8602 名古屋市千種区不老町
hishida@math.nagoya-u.ac.jp

1 序

本稿を通して, Ω は平面 $\mathbb{R}^2$ において滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ外部領域を表す. 剛体の障害物 $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$ の周りでの非圧縮粘性流体の運動を考えよう. 特に定常流に関して, [17], [8], [9], [12], [13], [1] などの研究があるものの, 得られている知見は 3 次元外部問題に比べて格段に少ない ([10, X], [11], [18] も参照). 2 次元の困難は, 流れの無限遠での漸近挙動の解析にあり, Stokes (1850) により見い出された次の事実と深く関わっている.

Stokes の paradox: 一様流 $u_\infty\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ を与えるとき, 境界値問題

$$-\Delta u+\nabla p=0,\qquad \mathrm{div}\, u=0\qquad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\qquad u\to u_\infty\quad \text{as } |x|\to\infty \tag{1.2}$$

は解をもたない.

ここで, $u(x)=(u_1,u_2)^T$ と $p(x)$ はそれぞれ流体の速度ベクトルと圧力である. Chang-Finn [4] は流れによって障害物にかかる力 (net force)

$$N=\int_{\partial\Omega}\nu\cdot T(u,p)\,d\sigma \tag{1.3}$$

によって Stokes の paradox を明快に説明した. ただし, $T(u,p)=(T_{jk}(u,p))_{j,k}$ は応力テンソルで, その成分は

$$T_{jk}(u,p)=\partial_k u_j+\partial_j u_k-p\delta_{jk}\qquad (1\le j,k\le 2)$$

で与えられる. また, ν は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルを表す. $\mathrm{div}\, u=0$ のもとで $\mathrm{div}\, T(u,p)=\Delta u-\nabla p$ であるから, 応力テンソルが

現れるのは必然であり, 定常/非定常や空間次元にかかわらず, 外部問題の流れの漸近挙動を理解する上で net force (1.3) は常に鍵である. Chang-Finn の結果によれば, (1.1) の解が無限遠で有界ならば, 必要条件として $N=0$ でなくてはならない. 詳細は 2 節で述べる.

Stokes の paradox は, 無限遠において Stokes 流が Navier-Stokes 流の第 1 次近似になりえないことを教えてくれる. 一様流 $u_\infty \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を無限遠に与える問題, あるいは無限遠で流れが静止しているけれども障害物が速度 $-u_\infty$ で並進運動する問題に対して, Oseen (1910) は u_∞ の周りでの Navier-Stokes 方程式の線型化を考えることによって, 困難を解決した. この線型化が機能するのは, Oseen 作用素 $-\Delta u + u_\infty \cdot \nabla u + \nabla p$ の基本解が wake (航跡) を伴う異方的減衰構造 (航跡内で $|x|^{-1/2}$, 航跡外では $|x|^{-1}$) を無限遠で有するためで, Stokes 作用素の基本解 (2.4) が対数的に増大するのと対照的である. 後に, Finn-Smith [8], [9] は, u_∞ がゼロではないが十分小さいときに, この Oseen 線型化を用いて Navier-Stokes 流を構成した. $u_\infty = 0$ であるとき (すなわち障害物は静止, 無限遠で流れも静止のとき) の Navier-Stokes 流の存在は, たとえ外力を十分に小としても, 今なお未解決問題である.

Finn-Smith より以前に, Leray [17] による重要な研究がある. Leray が考察した Navier-Stokes 流のクラスは Dirichlet 積分有限 $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty$ であり (以下で Leray クラスと呼ぶ), このクラスでは a priori 評価が成り立つので, データの大きさに制限を設けない点が優れている (一意性はない). しかし, Leray は彼の構成した Navier-Stokes 流が無限遠で指定された一様流 u_∞ に近づくことを証明できなかった. Gilbarg-Weinberger [12], [13] や Amick [1] の努力にもかかわらず, Leray クラスに属する Navier-Stokes 流の $|x| \to \infty$ での漸近挙動についての最終的な解答は得られていない. [1] によれば, 外力がゼロの場合は Leray による作り方とは関係なく, Navier-Stokes 流 u が Leray クラスに属することから $u \in L^\infty(\Omega)$ が従い, また定数ベクトル $w_\infty \in \mathbb{R}^2$ が存在して $\int_0^{2\pi} |u(r,\theta) - w_\infty|^2 d\theta \to 0$ $(r = |x| \to \infty)$ が成り立つ (r, θ は極座標系). しかし, $w_\infty = u_\infty$ であるのかどうか不明である. 結局, 現時点で平面上の定常 Navier-Stokes 方程式の外部問題が無限遠での境界条件もこめて解けているのは, $u_\infty \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が小さい場合 (すなわち障害物がゆっくり並進する場合) の Finn-Smith による上記の結果, および $u_\infty = 0$ であるが適当な対称性を有する流れについての山崎昌男氏 (早稲田大学) による最近の結果だけである.

本稿では, 障害物が並進運動をする代わりに回転運動をする場合であっても, 以下の意味で Stokes の paradox が解消されることを報告する:

(i) 障害物にかかる力が消えていない $(N \neq 0)$ という一般な状況であっても, 流れは無限遠で有界となりうる. 特に無限遠での増大度 $u(x) = o(|x|)$ の仮定のもとで, ある一様流に $|x|^{-1}$ の速さで近づき, しかもその第 1 項 (leading term) から回転する漸近形 $x^\perp/|x|^2$ を取り出せる (定理 3.1). ただし, $x^\perp = (-x_2, x_1)^T$.

(ii) $\partial\Omega$ 上粘着境界条件のもとで外力 $f = \mathrm{div}\ F$, $F \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^{2\times 2}$, を与えるとき, 無限遠で $u \to 0$ となる流れが常に存在する (定理 3.2). ただし, $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ の元とは $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元の $\overline{\Omega}$ への制限のことである.

2 節で述べるように, 障害物が静止の場合には上記の (i), (ii) いずれも正しくない. ただし, 本稿で提示できるのはすべて線型問題に対する結果であり, 従って上記の流れとは線型流を指す. 証明の技術的なことはともかく, Stokes の paradox が解消される本質は, 障害物が回転する場合の基本解の減衰構造である. 回転による振動の効果が良い減衰を引き起こすのである. 障害物がゆっくり並進する問題のように, ゆっくり回転する場合であっても Navier-Stokes 流を構成できるのかどうか, また構成できる場合にその無限遠での減衰構造はどうなっているのか, これらは今後の課題である. なお, 空間 3 次元の場合の同様な問題は, 線型, 非線型いずれの場合も詳しく解析されている ([6], [7]).

2 Stokes の paradox

Stokes の paradox は, Stokes 方程式の解の無限遠での漸近展開によって正しく理解される. $\{u, p\}$ は方程式 (1.1) を満たすとする. u のほうに対して, 定数ベクトル以外の多項式が排除されるような条件, 例えば $|x| \to \infty$ のとき $u(x) = o(|x|)$ のように振る舞うことを課す. このとき, 定数ベクトル $u_\infty \in \mathbb{R}^2$ と定数 $p_\infty \in \mathbb{R}$ が存在して, $|x| \to \infty$ のときに以下の漸近展開が成り立つ (Chang-Finn [4, Theorem 1]):

$$u(x) = u_\infty + N \cdot E(x) + O(|x|^{-1}), \tag{2.1}$$

$$\partial_\ell u(x) = N \cdot \partial_\ell E(x) + O(|x|^{-2}) \qquad (\ell = 1, 2), \tag{2.2}$$

$$p(x) = p_\infty + N \cdot Q(x) + O(|x|^{-2}). \tag{2.3}$$

第 1 項の漸近形は Stokes 基本解

$$E(x) = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\log\frac{1}{|x|}\right)\mathbb{I} + \frac{x \otimes x}{|x|^2}\right], \qquad Q(x) = \frac{x}{2\pi|x|^2} \tag{2.4}$$

で与えられ, その係数 N は net force (1.3) である. ただし, $\mathbb{I} = (\delta_{jk})$, $x \otimes x = (x_j x_k)$ とする. (1.3) や (2.1) だけでなく本稿を通して, 一般に行列 $A = (A_{jk})$ とベクトル $b = (b_k)$ に対して, $b \cdot A = Ab = \left(\sum_k A_{jk} b_k\right)_j$ とする.

この Chang-Finn による漸近展開は, $\partial\Omega$ 上での境界条件に依存しない. また, 圧力には何も仮定することなく, 圧力の漸近展開 (2.3) も得られる. その理由は, 方程式 $(1.1)_1$ を通して, 速度の増大度により圧力の増大度を統制できるからである. さて, $\{u, p\}$ が方程式 (1.1) を満たすとし, $|x| \to \infty$ のときに $u(x) = O(1)$ ならば, 漸近展開 (2.1) により $N = 0$ でなくてはならないこ

とは明らかである．すなわち，障害物にかかる力が消えているという過剰な境界条件が隠れており，このような特別な物理状況においてのみ，Stokes 流は無限遠で一様流に近づくことができる．このことが Stokes の paradox の本質であり，結局のところ Stokes 基本解の対数増大に起因していたことが分かる．

以上の考察の系として，Stokes 自身により見い出された 1 節冒頭の事実が従う．なぜなら，境界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$ と増大度 $u(x)=o(|x|)$ $(|x|\to\infty)$ のもとで，外力ゼロの方程式 (1.1) の非自明解は常に $N\neq 0$ でなくてはならないからである．このことを観察するには，対偶の主張のほうが見やすい．実際，もし $N=0$ とすると，漸近展開 (2.1), (2.2), (2.3) より，

$$u(x)-u_\infty=O(|x|^{-1}),\qquad \nabla u(x)=O(|x|^{-2}),\qquad p(x)-p_\infty=O(|x|^{-2})$$

となる定数 u_∞, p_∞ が存在する．このような良い減衰度によって energy 等式

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx=-u_\infty\cdot\int_{\partial\Omega}\nu\cdot(T(u,p)+p_\infty\mathbb{I})\,d\sigma$$

が成り立つ．ただし，$Du=\nabla u+(\nabla u)^T$ は ∇u の対称部分の 2 倍を表す．$N=0$ より右辺はゼロとなるので $Du=0$，すなわち u は剛体運動でなくてはならないが，境界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$ より自明解に限る．

Stokes の paradox の別なる形として，以下も成り立つ．外力項を与えるとき，これがたとえ $f=\mathrm{div}\,F$, $F\in C_0^\infty(\overline{\Omega})^{2\times 2}$, のように非常に良いクラスに属しても，境界値問題

$$-\Delta u+\nabla p=f,\qquad \mathrm{div}\,u=0\qquad \text{in }\Omega \tag{2.5}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\qquad u\to 0\quad\text{as }|x|\to\infty \tag{2.6}$$

は必ずしも解をもたない．実際，(1.1), (1.2) は適当な F に対して (2.5), (2.6) に帰着させられるからである．もとより，方程式 (2.5) に対しても解の漸近展開は可能で，(2.1) において第 1 項の係数 N を

$$\int_{\partial\Omega}\nu\cdot(T(u,p)+F)\,d\sigma$$

に取り替えた展開が成り立つ．従って，この力が消えることは (2.5), (2.6) が解をもつための必要条件である．Stokes の paradox の述べ方はほかにもいろいろある．Kozono-Sohr [16, Theorem A], Galdi [10, V.6] も参照されたい．

3 主結果

はじめに，2 次元平面において剛体の障害物が一定な角速度 $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ で回転する場合の回転座標系での方程式を導く．それを導出するには，時間に依

存した外部領域 $\Omega(t)=\{y=O(at)x;\ x\in\Omega\}$ における非定常 Navier-Stokes 方程式から出発しなくてはならない．ここに，

$$O(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

最初の設定において，独立変数を y,t，従属変数 (速度，圧力) を v,q で表そう．速度 v は境界 $\partial\Omega(t)$ 上で $ay^\perp$ (剛体の回転速度) に一致するものとする．これは粘着境界条件にほかならない．また，無限遠では $v\to 0$ ($|y|\to\infty$) とする．変数変換

$$y=O(at)x,\qquad u(x,t)=O(at)^Tv(y,t),\qquad p(x,t)=q(y,t) \tag{3.1}$$

によって一定な外部領域 Ω における問題に書き直し，それの定常流を考える．すなわち，本稿でいう定常流とは，運動する障害物に密着した座標系で見て定常な流れという意味である (障害物が並進の場合でも同様である)．従って，元の座標系では，障害物の回転と同じ周期をもつ時間周期流が対応する．さて，定常流を支配する境界値問題は，

$$-\Delta u-a\left(x^\perp\cdot\nabla u-u^\perp\right)+\nabla p+u\cdot\nabla u=0,\qquad \mathrm{div}\ u=0\qquad \text{in }\Omega \tag{3.2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=ax^\perp,\qquad u\to 0\quad \text{as } |x|\to\infty \tag{3.3}$$

となる．この方程式の形は空間3次元の場合に [15, section 2.1] で導出されているが，2次元であっても同じことである (低階項の3次元の場合の対応物は $(e_3\times x)\cdot\nabla u-e_3\times u$ である)．方程式 $(3.2)_1$ の左辺が発散形 $-\mathrm{div}\ (S(u,p)-u\otimes u)$ で表されることは，しばしば役に立つ．ここで，

$$S(u,p)=T(u,p)+a\left(u\otimes x^\perp-x^\perp\otimes u\right). \tag{3.4}$$

本稿では，対応する線型方程式

$$-\Delta u-a\left(x^\perp\cdot\nabla u-u^\perp\right)+\nabla p=0,\qquad \mathrm{div}\ u=0\qquad \text{in }\Omega \tag{3.5}$$

だけを考察する．外力項を与える場合は，$f\in C_0^\infty(\overline{\Omega})^2$ のようにその台が有界ならば扱える．ここで，ベクトル場 $u,\ v$ に対して，

$$\int_\Omega\left[(x^\perp\cdot\nabla u-u^\perp)\cdot v+u\cdot(x^\perp\cdot\nabla v-v^\perp)\right]\,dx=\int_{\partial\Omega}(\nu\cdot x^\perp)(u\cdot v)\,d\sigma$$

より，同次境界条件のもとで低階項 $x^\perp\cdot\nabla u-u^\perp$ は歪対称である．また，後で述べる補助関数 (4.8) を用いると，$(3.3)_1$ は同次境界条件を伴う問題に帰せられる．従って，無限遠での条件 $(3.3)_2$ を無視すると，Dirichlet 積分有限 $\int_\Omega|\nabla u|^2dx<\infty$ であって境界条件 $u|_{\partial\Omega}=ax^\perp$ (あくまでも $(3.3)_1$ のみ) を満

たす (3.5) の解を少なくとも一つ見つけることは難しくない. Navier-Stokes 方程式 (3.2) に対しても, $|a|$ の大きさの制限なしで同じことが言える. 実際, Leray [17] の方法に従えばよい. すなわち, (上記のように同次境界条件をもつ問題に書き直した後に) まず有界領域 $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ (B_R は中心 0, 半径 R の開円盤) において同次境界条件のもとで解をつくり, その R に依らない評価を用いて適当な部分列に沿って $R \to \infty$ とすればよい. しかし, その方法では 1 節で述べたように ([17] の結果もそうであったように) 得られた解の無限遠での条件 $(3.3)_2$ を確かめることができない.

本稿の最初の定理は, 上記の解も含めて, より一般に $\partial\Omega$ 上での境界条件には依存せずに, 方程式 (3.5) の解 $\{u, p\}$ の漸近挙動の構造を u に対する無限遠での増大度だけのもとで明らかにするものである. 以下の (3.7) を障害物が静止の場合の漸近展開 (2.1) と比べると, 違いは著しい.

定理 3.1 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし, $\{u, p\}$ は (3.5) の滑らかな解とする. 次の (a) または (b) のいずれかを仮定する.

(a) ある $r < \infty$ に対して, $\nabla u \in L^r(\Omega)^{2\times 2}$

(b) $u(x) = o(|x|)$ $(|x| \to \infty)$

このとき, 定数ベクトル $u_\infty \in \mathbb{R}^2$ と定数 $p_\infty \in \mathbb{R}$ が存在して, 以下が成り立つ.

1. (decay) $|x| \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} u(x) &= u_\infty + O(|x|^{-1}), \\ \nabla u(x) &= O(|x|^{-2}), \\ p(x) &= -a\, u_\infty^\perp \cdot x + p_\infty + O(|x|^{-1}). \end{aligned}$$

2. (energy balance)

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \left[\left(\nu \cdot \widetilde{T}(u,p)\right) \cdot (u - u_\infty) + \frac{a}{2}(\nu \cdot x^\perp)|u - u_\infty|^2 \right] d\sigma \tag{3.6}$$

ここに, $Du = \nabla u + (\nabla u)^T$, $\widetilde{T}(u,p) = Du - (p + a\, u_\infty^\perp \cdot x - p_\infty)\mathbb{I}$.

3. (asymptotic representation)

$$u(x) - u_\infty = \frac{\alpha x^\perp - 2\beta x}{4\pi |x|^2} + O(|x|^{-2}) \qquad (|x| \to \infty) \tag{3.7}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{\partial\Omega} \left[y^\perp \cdot (\nu \cdot T(u,p)) + a\,(\nu \cdot y^\perp)(y^\perp \cdot u) \right] d\sigma_y, \\ \beta &= \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u \, d\sigma. \end{aligned}$$

注意 3.1 *(1)* 圧力も漸近展開可能で，$p(x) + a\,u_\infty^\perp \cdot x - p_\infty$ の第1項の漸近形は (2.4) で与えられる Stokes 基本解の圧力部分 $Q(x)$ である．その理由は，$\mathrm{div}\,(x^\perp \cdot \nabla u - u^\perp) = x^\perp \cdot \nabla \mathrm{div}\, u = 0$ より $a \neq 0$ であっても (3.5) の基本解の圧力部分は $Q(x)$ となるからである．圧力には障害物の回転の効果が反映されず関心が薄いことに加えて，漸近展開の第1項の係数がやや繁雑となるので書かなかった．しかし，次に述べる 定理 3.2 においては，(3.9) のように，その係数は整理されて net force (1.3) となる．

(2) 簡単のために外力を与えなかったが，$(3.5)_1$ に外力 $f \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^2$ を与えても定理 3.1 は成り立つ．このときの energy 等式 (3.6) には $\int_\Omega f\cdot(u-u_\infty)\,dx$ が加わり，漸近展開 (3.7) の係数 α には $\int_\Omega y^\perp \cdot f\,dy$ が加わる．外力の台が有界であることは本稿の解析で必要である．

(3) 漸近展開 (3.7) の第1項は回転する漸近形 $x^\perp/|x|^2$ を含み，特に境界 $\partial\Omega$ での流量 (flux) $\beta = 0$ のときは純粋に回転している．次の定理 3.2 の解は，そのような状況である．この形 $x^\perp/|x|^2$ は，(3.5) の基本解の速度部分の第1項から来ている (補題 4.1)．その係数 α は，

$$\alpha = \int_{\partial\Omega} y^\perp \cdot \left\{\nu \cdot \left(T(u,p) + a\,u \otimes y^\perp\right)\right\}\,d\sigma_y$$

と書いても同じもので，$u \otimes y^\perp$ の出処は $y^\perp \cdot \nabla u = \mathrm{div}\,(u \otimes y^\perp)$ である．$T = T(u,p)$ と略記して，$\int_{\partial\Omega} y^\perp\cdot(\nu\cdot T)\,d\sigma$ の3次元の場合の対応物は，$\int_{\partial\Omega}(e_3\times y)\cdot(\nu\cdot T)\,d\sigma = e_3\cdot\int_{\partial\Omega} y\times(\nu\cdot T)\,d\sigma$ であり，これは力のモーメント (torque) の第3成分を表す．なお，空間3次元の場合には，回転する漸近形 $(e_3 \times x)/|x|^3$ は第 1 項でなく第 2 項に現れる ([6])．

(4) $a = 0$ (障害物が静止) のときの漸近展開は (2.1) であるから，(3.7) は $a \to 0$ で破綻する．より詳しくは，(3.7) の剰余項の評価は，

$$\left|u(x) - u_\infty - \frac{\alpha x^\perp - 2\beta x}{4\pi|x|^2}\right| \le \left(1 + \frac{1}{|a|}\right)\frac{C}{|x|^2}$$

となっている ($C > 0$ は $|a| \in (0,1]$ に依らない)．(3.7) の特徴の一つはその第1項の係数が net force N を含まないことであるが，N は決して消えていない．実際，N を含む部分は係数 $1/|a|$ を伴って速く減衰するので，上記の剰余項に入っている．

次に問題となるのは，無限遠で一様流 u_∞ を指定するとき，これを満たす (3.5) の解を実際に構成することである．次の定理は，それが可能であることを $u_\infty = 0$ であって粘着境界条件 $u|_{\partial\Omega} = ax^\perp$ の場合に主張するものである．$u_\infty \neq 0$ であっても，$\{u - u_\infty,\ p + au_\infty^\perp \cdot x\}$ を考えることにより $u_\infty = 0$ の場合に帰着できる．しかし，$u_\infty \neq 0$ の問題は (数学としては (3.5) に附帯させることはできるが) 元の座標系に戻ると無限遠で物理的に非現実的な条件が対応するので，$u_\infty = 0$ の場合だけを定理とする．

定理 3.2 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする. このとき, 境界値問題 (3.5), (3.3) は

$$\nabla u \in L^2(\Omega)^{2\times 2}, \qquad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C|a|$$

を満たす滑らかな解 $\{u,p\}$ をもち, 定理 3.1 のすべての主張が $\{u_\infty, p_\infty\} = \{0,0\}$ として成り立つ. 特に, $|x| \to \infty$ のとき,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} y^\perp \cdot (\nu \cdot T(u,p))\, d\sigma_y \, \frac{x^\perp}{4\pi|x|^2} + O(|x|^{-2}), \tag{3.8}$$

$$p(x) = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot T(u,p)\, d\sigma \cdot \frac{x}{2\pi|x|^2} + O(|x|^{-2}). \tag{3.9}$$

さらに, この解は $\nabla u \in L^2(\Omega)^{2\times 2}$ および無限遠で $u \to 0$, $p \to 0$ となるクラスでの一意解である. また, 同様な結論は, 方程式 (3.5) が外力 $f = \mathrm{div}\, F$, $F \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^{2\times 2}$ を伴う場合でも成り立つ. この場合の解の評価は

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C|a| + \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

となり, $\int_\Omega y^\perp \cdot f\, dy$ と $\int_{\partial\Omega} \nu \cdot F\, d\sigma$ が漸近展開 (3.8), (3.9) の第 1 項の係数にそれぞれ加わる.

注意 3.2 *(1)* 2 節の最後に述べたように, $a = 0$ のとき, 与えられた外力 $f = \mathrm{div}\, F$, $F \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^{2\times 2}$, に対して (2.5), (2.6) は一般に可解でない.

(2) 定理 3.2 の直前で述べたことと関連して, 元の座標系のほうで無限遠に一様流 $v \to v_\infty$ を与えて障害物を回転させることは意味のある設定である. しかし, このとき変換 (3.1) によって, $(3.2)_1$ は移流項 $\big(O(at)^T v_\infty\big) \cdot \nabla u$ も含み, また $(3.3)_2$ は $u \to O(at)^T v_\infty$ となるので, 定常流を考えることができない (本稿の解析からは除かれる).

回転する円盤の外部における次の厳密解を山崎昌男氏 (早稲田大学) から教えていただいた.

例 (M. Yamazaki). 2 次元円盤 $\overline{B_1}$ が一定な角速度 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ で回転するとき, その外部 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1}$ における Navier-Stokes 方程式 の境界値問題

$$-\Delta v + \nabla q + v \cdot \nabla v = 0, \qquad \mathrm{div}\, v = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = a y^\perp, \qquad v \to 0 \quad \text{as } |y| \to \infty$$

は, 解

$$v(y) = \frac{a y^\perp}{|y|^2}, \qquad q(y) = \frac{-a^2}{2|y|^2}$$

をもつ. また, Stokes 方程式の境界値問題

$$-\Delta v + \nabla q = 0, \qquad \mathrm{div}\, v = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = ay^\perp, \qquad v \to 0 \quad \text{as } |y| \to \infty$$

は, 解

$$v(y) = \frac{ay^\perp}{|y|^2}, \qquad q(y) = 0$$

をもつ. いずれも, 圧力には定数の不定性があるが, 無限遠で $q(y) \to 0$ となるものを選んである.

この山崎氏の Navier-Stokes 流 ($\Delta v = 0$ より Euler 流でもある) は, Stokes 基本解 (2.4) よりもひとつ速い減衰度をもつ. 定理 3.1, 定理 3.2 と違って, 圧力もひとつ速く減衰する. これは対称性によるものと理解している. 山崎氏の Stokes 流について, その net force (1.3) は消えているので, Stokes の paradox と矛盾しない. これも対称性による. 障害物が円盤の場合には, その解析において変数変換 (3.1) を施す必要は必ずしもないが, しかしこのように変換することは可能であるので, 円盤の場合が本稿において除かれるわけではない. 一般には, 元の座標系での定常流は (3.1) の変換後に時間周期流となるが, 上記の解 $v(y) = ay^\perp/|y|^2$ は変換後も定常流 $u(x) = ax^\perp/|x|^2$ となるので, 定理 3.1, 定理 3.2 の特別な場合としてカバーされる. 特に, (3.8) において, $\int_{\partial\Omega} y^\perp \cdot (\nu \cdot T(u,p))\, d\sigma_y = 4\pi a$ である.

4 証明の概要

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ のとき, 方程式 (3.5) の全平面 $\mathbb{R}^2$ での基本解の速度部分は,

$$\Gamma_a(x,y) = \int_0^\infty O(at)^T K(O(at)x - y, t)\, dt \tag{4.1}$$

で与えられる. ここに, 2×2 行列

$$K(x,t) = G(x,t)\mathbb{I} + H(x,t)$$

は $a = 0$ のときの非定常 Stokes 方程式の基本解である. すなわち,

$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-|x|^2/4t}$$

は 2 次元熱方程式の基本解, また

$$H(x,t) = \int_t^\infty \nabla^2 G(x,s)\, ds = \int_t^\infty G(x,s) \left(\frac{x \otimes x}{4s^2} - \frac{\mathbb{I}}{2s} \right) ds$$

である. 基本解の圧力部分は, 注意 3.1 *(1)* で述べたように, $a = 0$ の場合と同じく (2.4) で与えられる $Q(x-y)$ である.

線型問題の漸近解析に基本解が深く関わるのは当然であるが, 変数係数の移流作用素 $x^{\perp}\cdot\nabla$ を含むために基本解は独立 2 変数 x, y をもつので, 定数係数の場合と違って基本解自体の漸近展開を要する (補題 4.1). また, (4.1) の積分表示は, $a \neq 0$ のとき, その振動によって (絶対収束はしないが) 収束することに注意する. $a = 0$ のときには, この表示は破綻する. 熱核 G の部分だけで述べると,

$$\int_0^{\infty}\left(G(x,t) - \frac{e^{-1/4t}}{4\pi t}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|} \tag{4.2}$$

のように発散因子を引き抜いて積分することではじめて, 2 次元 Laplace 作用素 $-\Delta$ の基本解を回復できる (Stokes 基本解の場合は [14] を参照). このような方法をしばしば centering と呼ぶ.

さて, 本稿で最も重要なことは, 基本解 $\Gamma_a(x,y)$ の次のような漸近展開である.

補題 4.1 $R > 0$ を任意に固定する. $|y| \leq R$, $|x| \to \infty$ のとき,

$$\Gamma_a(x,y) = \frac{x^{\perp}\otimes y^{\perp}}{4\pi|x|^2} + O(|x|^{-2}). \tag{4.3}$$

注意 4.1 漸近展開 (3.7) の第 1 項の回転の様相 $x^{\perp}/|x|^2$ は, (4.3) の第 1 項から来ている. 注意 3.1 *(4)* で述べた (3.7) の剰余項の $a \neq 0$ についての依存は, (4.3) の剰余項の係数が $(1+\frac{1}{|a|})$ を伴うことによる. また, 注意 3.1 *(2)* で述べたように外力の台が有界でないと定理 3.1 の証明が働かない事情は, 補題 4.1 の形での漸近展開しか得られていないためである. 台が有界でない外力を扱うには, 両変数いずれも $|x|$, $|y| \to \infty$ のときの基本解の漸近挙動を詳細に調べる必要がある.

補題 4.1 を証明するために, ある $\theta \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned} &e^{-|O(at)x-y|^2/4t} \\ &= e^{-|x|^2/4t} + \frac{(O(at)x)\cdot y}{2t}\,e^{-|x|^2/4t} \\ &\quad + \frac{1}{2}y^T\,\frac{(O(at)x-\theta y)\otimes(O(at)x-\theta y) - 2t\,\mathbb{I}}{4t^2}\,y\,e^{-|O(at)x-\theta y|^2/4t} \end{aligned} \tag{4.4}$$

が成り立つことを用いる. これは変数 y に関する Taylor の公式である. (4.1) の $G(O(at)x-y,t)$ を扱うときに (4.4) を用い, $H(O(at)x-y,t)$ を扱うときは $\exp(-|O(at)x-y|^2/4s)$ を同様に展開する. (4.4) の第 3 項に対応する部

分は (振動を無視しても) $|x|^{-2}$ の速さで減衰する. (4.4) の第1項に対応する部分は, 振動の効果

$$\left|\int_0^\infty e^{iat}\, G(x,t)\, dt\right| \le \frac{C_m}{(|a||x|^2)^m} \tag{4.5}$$

によって速く減衰する. ここで, $m \in \mathbb{N}$ は任意に取れるが, われわれの目的のためには $m=1$ で十分である. 障害物が回転する場合と静止の場合の違いは, 端的には (4.5) と (4.2) の対照に集約されている, と言ってもよい. (4.4) の第2項に対応する部分からは, 振動しない項

$$\frac{1}{4\pi|x|^2}\begin{pmatrix} x\cdot y & x^\perp\cdot y \\ -x^\perp\cdot y & x\cdot y \end{pmatrix}$$

と振動する項の両方が現れ, 前者は (4.3) の第1項の一部となり (これと H から来る非振動項 $-(x\otimes y)/4\pi|x|^2$ を併せて (4.3) の第1項を形成する), 後者は (4.3) の剰余項へ入る. 以上が基本解の減衰構造の概要である.

定理 3.1 の証明の概要. cut-off によって全平面 $\mathbb{R}^2$ 上で満たす方程式 (4.6) を求め, 補題 4.1 の基本解評価 $|\Gamma_a(x,y)| \le C_R/|x|$ ($|y| \le R$, $|x| \ge 2R$) を用いて, まず主張 *1* (decay) を導く. これが得られると, 主張 *2* (energy balance) のみならず, $\{u,p\}$ の基本解 $\Gamma_a(x,y)$ による potential 表現を正当化できるので, 漸近展開 (4.3) を使って主張 *3* (asymptotic representation) を示す, というのがあらすじである. potential 表現を導くには, $Lu = \Delta u + a\left(y^\perp\cdot\nabla u - u^\perp\right)$ とその共役 $L^*v = \Delta v - a\left(y^\perp\cdot\nabla v - v^\perp\right)$ の間で成り立つ等式

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R} [v\cdot(Lu-\nabla p) - u\cdot(L^*v+\nabla q)]\, dy \\
&= \int_{\partial\Omega_R} [v\cdot(\nu\cdot T(u,p)) - u\cdot(\nu\cdot T(v,-q))]\, d\sigma_y + a\int_{\partial\Omega}(\nu\cdot y^\perp)(u\cdot v)\, d\sigma_y
\end{aligned}$$

において $v(y) = \Gamma_{-a,k}(y,x)$, $q(y) = -Q_k(y-x)$ を取り, $R\to\infty$ とすればよい. ここで, $\Gamma_{-a}(y,x)$, $-Q(y-x)$ は共役問題の基本解で, その第 k 列ベクトルと第 k 成分をそれぞれ取った ($k=1, 2$). また, $\Gamma_{-a}(y,x)^T = \Gamma_a(x,y)$ に注意する. しかし, 実は potential 表現を用いなくても cut-off だけで (3.7) を示すことが可能である. 以下で, それを述べよう. $\{u,p\}$ の境界 $\partial\Omega$ 上での情報が (4.6) の右辺 g へ移行するのである. もっとも, (3.7) の係数 α の出処や注意 3.1 *(4)* で述べた net force N を係数にもつ項の行先などを (最後まで計算をやらずに) 読み取るには, potential 表現を用いる方法のほうが見通しはよい.

さて, cut-off 関数を掛けた後で solenoidal 条件を回復させておくと便利である (そうしないといけないわけではなく, 非同次な divergence のまま進む

道もある). その回復を台が有界な関数による補正ですませるには, 境界 $\partial\Omega$ での流量 (flux) をゼロにしなくてはならない. そのために, まず flux carrier

$$w(x) = \beta \nabla \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)$$

を用意する. ただし, $\beta = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u \, d\sigma$ は与えられた解 u の流量であり, 点 $x_0 \in \mathrm{int}\ (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ は任意に固定してある. このとき,

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot w \, d\sigma = \beta, \qquad \mathrm{div}\ w = 0, \qquad \Delta w = 0, \qquad (x - x_0)^\perp \cdot \nabla w = w^\perp$$

より, $\widetilde{u} = u - w$ と $\widetilde{p} = p - a\, x_0^\perp \cdot w$ も (3.5) を満たし, $\int_{\partial\Omega} \nu \cdot \widetilde{u} \, d\sigma = 0$ となる. まず,

$$w(x) = \frac{-\beta x}{2\pi |x|^2} + O(|x|^{-2}) \qquad (|x| \to \infty)$$

により, (3.7) の第 1 項の一部が理解される.

$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega \subset B_{R-3}$ となるように正数 R を固定して, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; [0,1])$ を $\psi(x) = 0\, (|x| \le R-2)$ かつ $\psi(x) = 1\, (|x| \ge R-1)$ が満たされるように取る. 円環 $A = \{x \in \mathbb{R}^2;\ R - 3 < |x| < R\}$ における Bogovskiĭ作用素を B として ([2], [3], [10] 参照),

$$v = \psi \widetilde{u} - B[\widetilde{u} \cdot \nabla \psi], \qquad q = \psi \widetilde{p}$$

とおく. ここで, $\int_{\partial\Omega} \nu \cdot \widetilde{u} \, d\sigma = 0$ より $\int_A \widetilde{u} \cdot \nabla \psi \, dx = 0$ が従うことに注意する. 台が A に含まれるある関数 g があって, $\{v, q\}$ は全平面で

$$-\Delta v - a \left(x^\perp \cdot \nabla v - v^\perp \right) + \nabla q = g, \qquad \mathrm{div}\ v = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 \tag{4.6}$$

を満たす. ここで, g はもちろん明示できるが書かない. g の具体形は必要でなく, 方程式 (4.6) の構造だけを用いる. 仮定 $\nabla u \in L^r(\Omega)$ と $\nabla w \in L^{2,\infty}(\Omega)$ によって $\nabla v \in L^r(\mathbb{R}^2) + L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ であるから, [5, Proposition 1.2.1] より $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ である. 圧力のほうは, $(4.6)_1$ より $\nabla q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ が分かるので, v と同様に $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ である. また, (4.6) で $g = 0$ とした同次方程式の $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ の範囲での解を考えると, 速度と圧力の Fourier 変換の台はいずれも $\{0\}$ に集中しているから, 適当な多項式 $P_v(x)$, $P_q(x)$ が存在して,

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_a(x,y) g(y) \, dy + P_v(x), \\ q(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} Q(x-y) g(y) \, dy + P_q(x) \end{aligned} \tag{4.7}$$

を得るが, $\nabla v \in L^r(\mathbb{R}^2) + L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ より $P_v(x)$ は定数ベクトル u_∞ に限る. $(4.7)_1$ に漸近展開 (4.3) を代入すれば v の (従って $\widetilde{u}$ の) 第1項が得られ, その係数は (3.4) と (4.6) を用いて

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{\mathbb{R}^2} y^\perp \cdot g(y)\,dy \\ &= -\int_A y^\perp \cdot \mathrm{div}\; S(v,q)\,dy \\ &= \int_{\partial\Omega} y^\perp \cdot (\nu \cdot S(\widetilde{u},\widetilde{p}))\,d\sigma_y + 2a\int_{\Omega_R} y \cdot (\widetilde{u} - v)\,dy\end{aligned}$$

を計算すればよい. 圧力については, 元の方程式 (3.5) へ戻って $|x| \to \infty$ とすれば, $\nabla P_q(x) = -au_\infty^\perp$ でなくてはならない. □

定理 3.2 の証明の概要. はじめに, Leray クラスの解 $\{u,p\}$ の内で $u \to 0$, $p \to 0$ $(|x| \to \infty)$ を満たすものが高々一つであることは, energy 等式 (3.6) から従う. さて, Leray の方法に従って標準的に解を作ったのでは, $u \to 0$ $(|x| \to \infty)$ を示すことができない. Leray クラスに属することから定理 3.1 の結論を得るが, 定数ベクトル u_∞ を除けないのである. そこで, 無限遠での挙動が必然的に統制されうるような解を作ろう. まず, 境界条件を消すために, $x^\perp = \nabla^\perp(|x|^2/2)$ に注意して, 補助関数

$$w(x) = \frac{a}{2}\nabla^\perp\left(\zeta(|x|)|x|^2\right) = \left\{\frac{|x|}{2}\zeta'(|x|) + \zeta(|x|)\right\}(ax^\perp) \tag{4.8}$$

を用意する. ただし, $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega \subset B_{R-3}$ となるように正数 R を固定して, $\zeta \in C^\infty([0,\infty);[0,1])$ を $\zeta(r) = 1\,(r \le R-2)$ かつ $\zeta(r) = 0\,(r \ge R-1)$ が満たされるように取った. このとき,

$$w|_{\partial\Omega} = ax^\perp, \quad \mathrm{div}\; w = 0, \quad x^\perp \cdot \nabla w - w^\perp = \mathrm{div}\;(w \otimes x^\perp - x^\perp \otimes w) = 0$$

となる. 未知関数を $\widetilde{u} = u - w$ として,

$$\begin{aligned} -\Delta\widetilde{u} - a\left(x^\perp \cdot \nabla\widetilde{u} - \widetilde{u}^\perp\right) + \nabla p = \Delta w, \qquad &\mathrm{div}\;\widetilde{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega \\ \widetilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \widetilde{u} \to 0 \quad &\text{as } |x| \to \infty \end{aligned} \tag{4.9}$$

を解く. Leray クラスの解 $\widetilde{u}$ が得られると, $a\left(x^\perp \cdot \nabla\widetilde{u} - \widetilde{u}^\perp\right)$ を右辺へ回して Stokes 方程式に対する正則性理論を繰り返し使えば, $w \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ より $\widetilde{u}$ は (従って $u = \widetilde{u} + w$ も) 滑らかとなる. Finn-Smith [8] が行ったように, $\varepsilon > 0$ として, 無限遠で正則化した近似方程式

$$\varepsilon u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon - a\left(x^\perp \cdot \nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon^\perp\right) + \nabla p_\varepsilon = \Delta w, \qquad \mathrm{div}\; u_\varepsilon = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

を境界条件 $u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0$ のもとで考える. 各 $\varepsilon>0$ に対して, a priori 評価

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\le C|a|^2 \tag{4.10}$$

により, $H^1_0(\Omega)$ に属する解 u_ε の存在が示される. 圧力 $p_\varepsilon\in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ は, $\int_{\Omega_R}p_\varepsilon\,dx=0$ となるように選ぶ. 定理 3.1 の証明で行ったように, 同じ cut-off 関数 ψ を用いて,

$$v_\varepsilon=\psi u_\varepsilon-B[u_\varepsilon\cdot\nabla\psi],\qquad q_\varepsilon=\psi p_\varepsilon$$

とおくと, $\{v_\varepsilon,q_\varepsilon\}$ は

$$\varepsilon v_\varepsilon-\Delta v_\varepsilon-a\left(x^\perp\cdot\nabla v_\varepsilon-v_\varepsilon^\perp\right)+\nabla q_\varepsilon=\psi\Delta w+g_\varepsilon,\quad \mathrm{div}\ v_\varepsilon=0\quad \text{in }\mathbb{R}^2$$

を満たす. ただし,

$$\begin{aligned}g_\varepsilon=&-\varepsilon B[u_\varepsilon\cdot\nabla\psi]-2\nabla\psi\cdot\nabla u_\varepsilon-(\Delta\psi+ax^\perp\cdot\nabla\psi)u_\varepsilon+\Delta B[u_\varepsilon\cdot\nabla\psi]\\&+ax^\perp\cdot\nabla B[u_\varepsilon\cdot\nabla\psi]-aB[u_\varepsilon\cdot\nabla\psi]^\perp+(\nabla\psi)p_\varepsilon.\end{aligned}$$

作用素 $\varepsilon u-\Delta u-a\left(x^\perp\cdot\nabla u-u^\perp\right)-\nabla p$ の基本解

$$\Gamma_a^{(\varepsilon)}(x,y)=\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}O(at)^T K(O(at)x-y,t)\,dt$$

について, 補題 4.1 の証明と同様に, 任意の $R>0$ に対して $\varepsilon>0$ に無関係に $C_R>0$ を取れて,

$$|\Gamma_a^{(\varepsilon)}(x,y)|\le\frac{C_R}{|x|}\qquad(|y|\le R,\ |x|\ge 2R) \tag{4.11}$$

を得る. (4.7) と同じく

$$v_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma_a^{(\varepsilon)}(x,y)\,(\psi\Delta w+g_\varepsilon)\,(y)\,dy$$

を得るが, $u_\varepsilon\in L^2(\Omega)$ より定数ベクトルは排除される点が大切で, 無限遠での正則化の効果である. (4.10) と $\int_{\Omega_R}p_\varepsilon\,dx=0$ より,

$$\int_A|g_\varepsilon(y)|\,dy\le C_R\left(\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}+\|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}\right)\le C_R\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\le C_R|a|$$

を得るので, これと (4.8), (4.11) によって,

$$|u_\varepsilon(x)|=|v_\varepsilon(x)|\le\frac{C_R|a|}{|x|}\qquad(|x|\ge 2R) \tag{4.12}$$

となる. ここで, $C_R > 0$ は $\varepsilon > 0$ に依存しない. $(2,\infty) \ni s$ を任意に固定するとき,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^s(\Omega_{2R})} \leq C_R \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{2R})} \leq C_R \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_R |a|$$

と (4.12) を併せて,

$$u_\varepsilon \in L^s(\Omega), \qquad \|u_\varepsilon\|_{L^s(\Omega)} \leq C\,|a|$$

を得る. 以上より, $\nabla\widetilde{u} \in L^2(\Omega)$ となる $\widetilde{u} \in L^s(\Omega)$ が存在して, 適当な部分列に沿い $\varepsilon \to 0$ とするとき, u_ε は $\widetilde{u}$ に $L^s(\Omega)$ で弱収束, ∇u_ε は $\nabla\widetilde{u}$ に $L^2(\Omega)$ で弱収束, 任意の $\rho \geq R$ に対して u_ε は $\widetilde{u}$ に $L^2(\Omega_\rho)$ で強収束する. さらに, 圧力 $p \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ も存在して, $\{\widetilde{u}, p\}$ は (4.9) の解となる. 従って, $u = \widetilde{u} + w$ と p は (3.5), (3.3) の解で, これに定理 3.1 を適用すると, $u \in L^s(\Omega)$ より $u_\infty = 0$ としてその定理の結論が成り立つ. また, 圧力については, $p_\infty = 0$ の解を選ぶ. 最後に, 境界条件 $u|_{\partial\Omega} = ax^\perp$ より

$$\beta = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u\, d\sigma = 0, \qquad \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot y^\perp)(y^\perp \cdot u)\, d\sigma_y = a \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot y^\perp)|y|^2\, d\sigma_y = 0$$

となるので, (3.7) から (3.8) が従う. □

References

[1] C. J. Amick, On Leray's problem of steady Navier-Stokes flow past a body in the plane, *Acta Math.* **161** (1988), 71–130.

[2] M. E. Bogovskiĭ, Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium, *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 1094–1098.

[3] W. Borchers and H. Sohr, On the equations rot $v = g$ and div $u = f$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 67–87.

[4] I-D. Chang and R. Finn, On the solutions of a class of equations occurring in continuum mechanics, with application to the Stokes paradox, *Arch. Rational Mech. Anal.* **7** (1961), 388–401.

[5] J.-Y. Chemin, Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque* **230**, Société Mathématique de France, 1995.

[6] R. Farwig and T. Hishida, Asymptotic profile of steady Stokes flow around a rotating obstacle, *Manuscripta Math.* **136** (2011), 315–338.

[7] R. Farwig and T. Hishida, Leading term at infinity of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, *Math. Nachr.* **284** (2011), 2065–2077.

[8] R. Finn and D. R. Smith, On the linearized hydrodynamical equations in two dimensions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** (1967), 1–25.

[9] R. Finn and D. R. Smith, On the stationary solution of the Navier-Stokes equations in two dimensions, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **25** (1967), 26–39.

[10] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Vol. I: *Linerised Steady Problems*, Vol. II: *Nonlinear Steady Problems*, Springer, New York, 1994.

[11] G. P. Galdi, Mathematical questions relating to the plane steady motion of a Navier-Stokes fluid past a body, *Recent Topics on Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid*, 117–160, Eds. H. Kozono and Y. Shibata, *Lecture Notes in Num. Appl. Anal.* **16**, Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[12] D. Gilbarg and H. F. Weinberger, Asymptotic properties of Leray's solution of the stationary two-dimensional Navier-Stokes equations, *Russian Math. Surveys* **29** (1974), 109–123.

[13] D. Gilbarg and H. F. Weinberger, Asymptotic properties of steady plane solutions of the Navier-Stokes equations with bounded Dirichlet integral, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (4) **5** (1978), 381–404.

[14] R. B. Guenther and E. A. Thomann, Fundamental solutions of Stokes and Oseen problem in two spatial dimensions, *J. Math. Fluid Mech.* **9** (2007), 489–505.

[15] T. Hishida, An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle, *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** (1999), 307–348.

[16] H. Kozono and H. Sohr, On a new class of generalized solutions for the Stokes equations in exterior domains, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **19** (1992), 155–181.

[17] J. Leray, Etude de diverses equations integrales non lineaires et de quelques problemes que pose l'Hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.* **12** (1933), 1–82.

[18] 岡本 久, ナヴイエ-ストークス方程式の数理, 東京大学出版会, 2009.