システム制御情報学会論文誌，Vol. 24, No. 3, pp. 54–60, 2011

論　文

パラメトリック振子の周期回転への始動制御*

横井　裕一†・引原　隆士†

Start Control of Parametric Pendulum into Periodic Rotation*

Yuichi YOKOI† and Takashi HIKIHARA†

Parametrically excited pendulum inherently demonstrates a conversion from forcing vibration to rotational motion. The onset of periodic rotation strongly depends on the initial condition. We propose a control method to start up a parametric pendulum into periodic rotation based on an external force input with time delay. The feasibility of proposed method is verified numerically and experimentally. This paper advocates that the proposed method is suitable for crossing over a separatrix which governs the dynamics from initial conditions.

1. はじめに

単純な原理で興味深い現象が生じる非線形力学系の一つにパラメトリック振子がある．このパラメトリック振子は，振子本来の構造から鉛直下向きでの静止，周期的な振動および回転を生じるだけでなく，カオスの発生なども報告されている [1–4]．このカオスの発生に周期回転が深く関わっていることが明らかになり [5]，基礎的な現象である周期回転にも関心が集まっている．数値的，解析的な研究により，周期回転の発生パラメータや解析解などが検討されている [6–8]．パラメトリック振子には，周期的に回転することで，1 次元方向の励振を回転方向の運動に変換する特徴がある．生じた周期回転により発電機を駆動できることから，自然界における多様な振動が有するエネルギーをパラメトリック振子を介して電気エネルギーとして回収するエネルギースキャベンジングへの応用が期待でき，工学的にも興味深い．このような応用可能性を秘めたパラメトリック振子の周期回転の発現は，その非線形性から初期状態に強く影響されるため，何らかの制御が必要となる．

パラメトリック振子の持続する周期回転の生成は，状態空間を分離するセパラトリクスを制御によりいかに越えるかという問題になる．トルク制御によって周期回転を始動した後は，エネルギーを取り出す観点からトルク制御は停止することが望ましい．本論文では，このトルク制御に，カオス制御 [9] の一手法として提案されている遅れ要素を含む外力制御 [10] が適していることを示す．カオス制御はカオスアトラクタ内に埋め込まれた不安定周期軌道の安定化を意味し [9]，ある状態が各不安定周期軌道へ長時間のうちに必ず接近する位相的推移性，および安定化のための摂動に対する鋭敏性というカオスの特性に基づいている [9,11,12]．一方，ここで対象とするパラメトリック振子の周期回転に同じ特性は現れない．しかしながら，位相的推移性の代わりに，状態空間の周期的な構造を利用し駆動トルクを制御することで状態を周期回転へ接近させることが可能となる．そして，制御目標が安定な周期軌道であることから，鋭敏性は不要となる．したがって，カオス特有の性質が現れないパラメトリック振子に対しても外力制御は機能する．必要な目標軌道を駆動成分と時間遅れ状態量で実現すると，外力制御の性質から，制御達成と同時に駆動トルクが消滅する．また時間遅れ状態量を用いる同制御は，時間遅れフィードバック制御 [10] の性質も併せ持っており，制御対象の数理モデルを必要としない [13,14]．

本論文では，パラメトリック振子の周期回転を始動する制御として外力制御ならびに時間遅れフィードバック制御に基づく新たな方法を提案する．以下，その可能性と有効性を数値的，実験的に述べる．

* 原稿受付　2010 年 6 月 16 日
† 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyoto-Daigaku-Katsura, Nishikyo ward, Kyoto city, Kyoto 615-8510, JAPAN
Key Words: parametric pendulum, rotation, separatrix, start control, time delay.

2. 始動制御

提案する始動制御の原理を述べる．制御目標となるパラメトリック振子の周期回転とその初期状態依存性を説明し，制御系を導入する．

2.1 パラメトリック振子の周期回転

対象とするパラメトリック振子は，以下の無次元化された連立微分方程式で記述される．

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\gamma v-\bigl(1+p\cos\omega t\bigr)\sin\theta \tag{1b}$$

ただし，$\theta(t)$ および $v(t)$ はそれぞれ角変位，角速度を表す時間 t の変数，γ は減衰係数である．$p\cos\omega t$ は振幅 p，角周波数 ω のパラメトリック励振を意味する．

このパラメトリック振子の周期定常状態は，自然数 n と整数 r を用いて，

$$\theta(t):=\theta(t-nT)+2\pi r \tag{2}$$

と定義でき，これにより分類できる．ここで T はパラメトリック励振の周期である．(2) 式は周期 nT で r 回転する周期定常状態を表しており，$r>0$ は角変位 θ が増加する方向，$r<0$ は減少する方向の回転を意味する．$r=0$ は周期 nT の振動に対応する．本論文では，$r\neq 0$ に対して回転 (n,r)[5]，$r=0$ に対して振動 $(n,0)$ と表記する．議論と表示の便宜のため，時間と空間の周期性に関して以下の通り定める．角変位 θ が (1) 式の $\sin\theta$ より周期 2π の周期性を有することから，$\hat{\theta}\equiv\theta\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $\hat{\theta}\in(-\pi,\pi]$ とする．またストロボ点を，パラメトリック励振の位相が $\omega t=2\pi m$ (m は整数) となる時刻に採る．

(1) 式の各パラメータを，回転 (1,1) が存在する

$$\gamma=0.1,\quad p=0.5,\quad \omega=2 \tag{3}$$

に設定する [5]．この場合，パラメトリック振子 (1) には回転 (1,1)，回転 (1,−1)，振動 (2,0) が共存する．各定常状態の初期状態平面 $(\theta_0,v_0)=(\theta(0),\omega(0))$ における引力圏を Fig. 1 に示す．ここでは，初期状態平面を 400×400 の格子に区切り，各格子点を初期状態として数値積分している．ただし本論文中の数値積分は 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて行っている．図中の S(1,±1) および S(2,0) は回転 (1,±1)，振動 (2,0) に対応するストロボ点の離散空間上の不動点あるいは周期点を表しており，各点を包含する色分けされた初期状態領域が対応する定常状態の引力圏に相当する．(1) 式が $(\theta,v)\mapsto(-\theta,-v)$ の変換に関して可換であることに対応して，Fig. 1 で示される初期状態領域も原点対称となる．ゆえに本論文で対象とする周期回転として，回転 (1,1) あるいは回転 (1,−1) の一方のみを検討すればよいことがわかる．

周期回転を始動するために必要な制御について述べる．

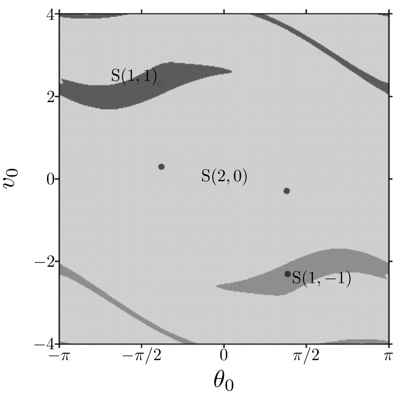


Fig. 1 Domain of attraction for the parametric pendulum (1) at $\gamma=0.1$, $p=0.5$, and $\omega=2$

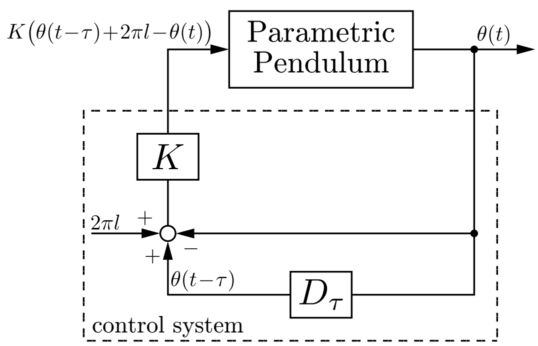


Fig. 2 Block diagram of the proposed control for a periodic rotation of parametric pendulum

Fig. 1 では，回転 (1,1) の引力圏は角速度が大きい領域の部分集合として現れる．このことから，角速度を増加させるだけでなく，状態を引力圏内に推移させる制御が必要となる．またパラメータにより引力圏の領域も変化するため，引力圏の十分条件を陽に導くことは困難である．したがって，パラメトリック振子の周期回転を始動するには，角速度を増加させ，目標軌道の情報を用いずに状態を周期回転に接近あるいは収束させる制御が必要である．

2.2 始動制御とその原理

本節では，パラメトリック振子の周期回転を始動するための制御手法を提案する．そのブロック線図を Fig. 2 に示す．ある時刻 t において，遅延ブロック D_τ は入力となる角変位 $\theta(t)$ に対して時間 τ だけ遅れた角変位 $\theta(t-\tau)$ を出力する．ブロック K は制御ゲインである．制御ループは，時間遅れ状態量 $\theta(t-\tau)$ と定数 $2\pi l$ の和を目標軌道とする外力制御を構成する．制御入力 $u(t)$ は回転方向のトルクとしてパラメトリック振子に作用する．制御を含む系全体の方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v \tag{4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\gamma v-\bigl(1+p\cos\omega t\bigr)\sin\theta+u(t) \tag{4b}$$

$$u(t)=K\bigl(\theta(t-\tau)+2\pi l-\theta(t)\bigr) \tag{4c}$$

となる．制御パラメータは制御ゲイン K，遅延時間 τ，回転数 l である．ただし，l は整数である．

提案する始動制御の原理を説明する．ある回転 (n,r) を始動することを考える．制御パラメータである遅延時間を $\tau=nT$，回転数を $l=r$ とし，適切に制御ゲイン $K>0$ を設定する．$K<0$ では，目標とする周期回転とは逆回転方向の制御トルクが発生するため，想定する始動制御は期待できない．ここでは，平易な理解のため系 (4) の時間に関する周期性を利用して，連続制御をストロボ点の離散空間で議論する．$K>0$ の始動制御は制御入力 $|u(t)|$ が減少する方向に作用する．ゆえにある小さな正数 ε に対して，状態点が $|u(t)|>\varepsilon$ となる状態空間に存在するとき，制御は状態点を $|u(t)|<\varepsilon$ となる状態空間に移す縮小写像となる．この状態空間内では $\theta(t)=\theta(t-nT)+2\pi r\pm\varepsilon/K$ というほとんど周期的な回転状態になる．また $|u(t)|<\varepsilon$ であるため，パラメトリック振子本来の引力圏に従って状態点は時間発展する．このとき状態点が回転 (n,r) の近傍に存在すれば，時間遅れフィードバック制御の原理 [15,16] から状態点は回転 (n,r) に収束する．一方，その近傍に存在しない場合，状態点は $|u(t)|<\varepsilon$ の状態空間に留まることができず，$|u(t)|>\varepsilon$ の状態空間に移る．状態点が回転 (n,r) に接近するまで同様の現象が繰り返される．このようにして，提案した制御ループは状態点を周期回転の近傍へ移す状態空間を構成する．さらに周期回転への収束に伴い制御入力 $u(t)$ が消える．この提案手法では，目標軌道を構成する定数 $2\pi l$ が目標回転方向の駆動要素にもなっている．実際の連続系ではこの制御が連続的になされる．

3.　数値的検討

提案した始動制御の達成可能性を数値的に検討する．以下では (3) 式と，回転 $(1,\pm1)$，振動 $(4,0)$ および鉛直下向きでの静止状態が現れる

$$\gamma=0.1,\quad p=1,\quad \omega=3 \tag{5}$$

のパラメータ設定に対して，パラメトリック振子 (1) の回転 $(1,1)$ を始動する．(5) 式における系 (1) の引力圏を Fig. 4(b1) に示す．制御パラメータである遅延時間を $\tau=T=2\pi/\omega$，回転数を $l=r=1$ に固定する．

3.1　系の振舞い

制御を加えたパラメトリック振子 (4) の状態空間は，遅れ要素を含むことにより無限次元となる．各パラメータ設定に対して，ある定常状態から時刻 $t=5T$ で制御を開始した場合の系 (4) の振舞いを Fig. 3 に示す．ここでは，制御の初期状態を表す関数を $s\in(4T,5T]$ を用いて $(\theta(s),v(5T))$ で与えている．$e(t)$ はパラメトリック励振 $p\cos\omega t$，丸記号 $\odot$ はストロボ点を表している．

パラメータ設定 (3) において制御ゲインを $K=0.1$ とした場合の系の振舞いを Fig. 3(a) に示す．始動制御の

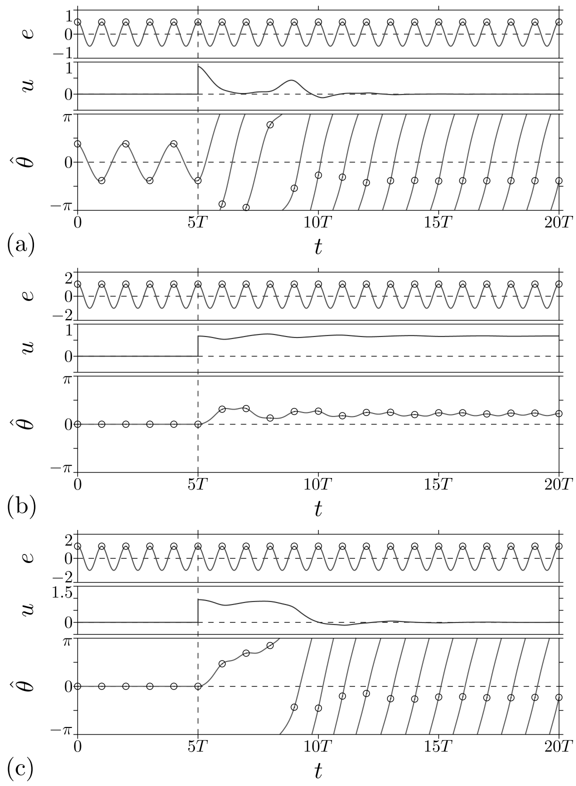
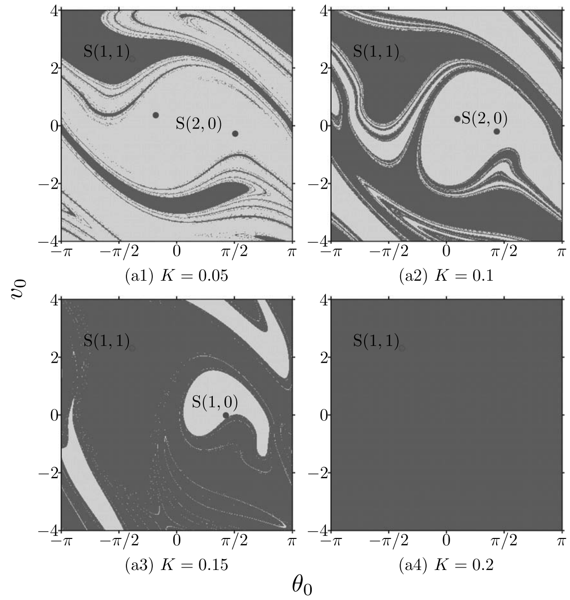


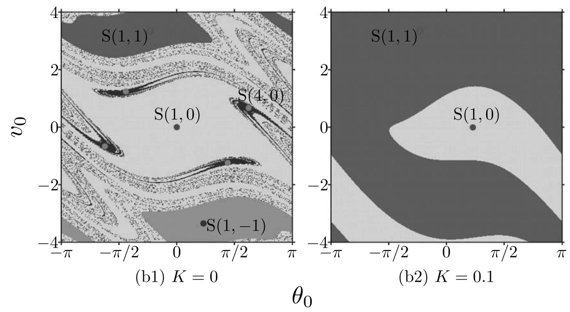
Fig. 3　Transient behavior of the controlled parametric pendulum (4) at (a) $(p,\omega,K)=(0.5,2,0.1)$, (b) $(1,3,0.1)$, and (c) $(1,3,0.15)$, where $\gamma=0.1$

開始直後，制御入力 $u(t)$ が駆動源として作用し，角変位 $\hat{\theta}(t)$ は急激に増大し始める．時刻 $t=13T$ 付近で $\hat{\theta}(t)$ が周期的になるのに伴い $u(t)$ も 0 に収束する．このことから，想定した始動制御が達成されていると判断できる．ここで $\hat{\theta}(t)$ の周期性はストロボ点列が収束することで確認できる．つぎに，パラメータ設定 (5) において $K=0.1$ とした場合の振舞いを Fig. 3(b) に示す．このとき，提案手法では回転 $(1,1)$ を始動できない．$\hat{\theta}(t)$ は $\pi/2$ を越えず，周期的な振動を示す．また $u(t)$ は 0 にならず，常にトルクが入っている．Fig. 3(c) に少しゲインを上げた $K=0.15$ の場合を示す．制御開始後，角変位 $\hat{\theta}(t)$ は徐々に増大し，$\hat{\theta}(t)=\pi$ に到達すると加速し周期回転に至る．この場合に比べ，$K=0.1$ の場合は明らかに制御ゲイン K の不足により回転の起動に至っていない．

以下では，状態の推移に着目して始動制御の達成可能性を検討する．Fig. 3(b) の場合，制御入力が $|u(t)|<\varepsilon$ となる値を示しておらず，状態は回転 $(1,1)$ に接近していない．Fig. 3(a)，(c) の場合は，制御入力が収束するまでに $u(t)=0$ となる状態が確認できる．これは状態が $|u(t)|<\varepsilon$ と $|u(t)|>\varepsilon$ に対応するそれぞれの状態空間を推移した後，回転 $(1,1)$ に接近して収束したことを意味する．ゆえに，$|u(t)|<\varepsilon$ という状態の出現が周期回転への接近，すなわち始動制御達成の必要条件といえる．ただし，この条件が回転 $(1,1)$ の近傍ではなく，$\theta(t)=\theta(t-T)+2\pi\pm\varepsilon/K$ というほぼ周期的な回転状態



(a) $p=0.5$, $\omega=2$



(b) $p=1$, $\omega=3$

Fig. 4 Domain of attraction for the controlled parametric pendulum (4). The damping γ is fixed at 0.1.

であることに注意する．Fig. 3では制御ゲインKあるいは初期状態が同一であるため，その両者が始動制御における駆動源の性能に反映されている．

3.2 引力圏

周期回転への推移は，制御入力とパラメトリック振子本来の引力圏により生じる．制御入力$u(t)$は制御ゲインKにもよるが，現時刻および時間遅れの角変位$\theta(t)$と$\theta(t-\tau)$で構成されるため，この推移は初期状態にも影響を受ける．すなわち，始動制御により周期回転の引力圏が調整される．系(4)における回転(1,1)の引力圏の変化をつぎに検討する．

時間遅れの初期状態を表す関数をパラメトリック振子(1)本来の軌道に設定し，時刻$t=0$で制御を開始したときの状態平面(θ_0,v_0)に対して，パラメータ設定(3)で制御ゲインKが0.05，0.1，0.15，0.2の場合の引力圏をFig. 4(a)に示す．制御ゲインKの増大に伴い，回転(1,1)に対する引力圏は拡大する．$K=0.05$の場合，引力圏は回転(1,1)の不動点S(1,1)から点$(\pm\pi,0)$を含むように拡がっている．点$(\pm\pi,0)$は振子が鉛直上向きで静止する状態に相当する．非減衰自由振子であれば振動と回転の中間のエネルギー値を有するため，最小のエネルギーの増加で回転へ移行する状態の一つである．Fig. 1ではこの状態点は振動(2,0)の引力圏に包含されていることから，パラメトリック励振によるエネルギーの増加はない．これらを考慮すると，点$(\pm\pi,0)$は小さい制御入力トルクによるわずかなエネルギー供給で回転を生成可能な状態である．このように，回転を生成可能な状態は回転(1,1)の引力圏となる可能性がある．しかし，Fig. 4(a1)，(a2)，(a3)には回転に充分な角速度を持ちながら引力圏に包含されない状態が確認できる．これは，$|u(t)|<\varepsilon$という状態への推移が始動制御達成の十分条件にならない理由の一つである．Kが小さい場合には，始動可能性は初期状態に依存する．逆に$K=0.2$の場合には，回転(1,1)がFig. 4(a4)で示される状態平面における唯一のアトラクタになっており，提案手法により常に回転(1,1)を始動できる．つぎに，パラメータ設定(5)で制御ゲインKが0，0.1の場合の引力圏をFig. 4(b)に示す．Fig. 4(a)と同様，制御ゲインの増大に伴い目標とする回転(1,1)の引力圏は拡大する．$K=0.2$の場合にはFig. 4(a4)のように回転(1,1)が唯一のアトラクタになる．

3.3 制御ゲインに関する分岐現象

制御ゲインは周期回転への推移に影響するため，始動制御の達成可能性を左右する制御パラメータである．一方，時間遅れフィードバック制御では不安定周期軌道の安定化が制御ゲインに依存する[10,15,16]ため，同制御に基づく提案手法にもこの特徴が現れる可能性がある．ゆえに，制御ゲインに関わるこの二つの性質を理解することは重要である．制御ゲインKに関する分岐図をFig. 5に示す．ただし縦軸Θは，ストロボ点の離散空間上の不動点あるいは周期点を表す$\hat{\theta}$と，その回転数rを用いた$\Theta:=\hat{\theta}+2\pi r$で定義できる．周期$nT$の軌道の探索では，整数$i=0,\cdots,n-1$を用いて，無限次元系(4)を$(\theta^i(t),v^i(t)):=(\theta(t-iT),v(t-iT))$で表される$2n$次元系に変換し，シューティング法を用いている．さらに周期軌道の安定性において，時間遅れに対応する関数空間を128次元の離散空間で近似することにより特性乗数を求めている[17]．

Fig. 5(a)はパラメータ設定(3)の分岐図である．制御ゲインが$K=0$のとき，七つの不動点と一組の周期点が存在する．完全安定および正不安定な回転$(1,\pm1)$に対応する不動点列S$(1,\pm1)$，D$(1,\pm1)$，正不安定と逆不安定な振動(1,0)を表すD(1,0)，I(1,0)，完全安定な振動(2,0)に対応する一組のS(2,0)である．$K=0$は制御導入前のパラメトリック振子(1)の固有の系に相当するから，完全安定な不動点S$(1,\pm1)$，周期点S(2,0)がFig. 1と一致する．制御ゲインKを準静的に増加させると，S$(1,-1)$およびD$(1,-1)$がサドルノード分岐SN$(1,-1)$により対消滅する．このSN$(1,-1)$後の引力

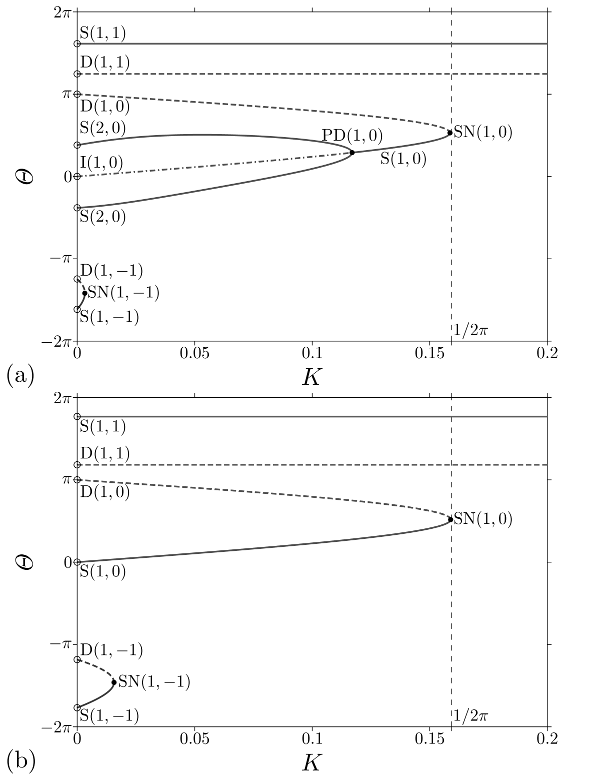


Fig. 5 Bifurcation diagram with respect to the control gain K in the controlled parametric pendulum (4) at (a) $(p,\omega)=(0.5,2)$ and (b) (1,3), where $\gamma=0.1$

圏はFig. 4(a1) および (a2) のように変化する．続いて周期倍分岐PD(1,0) が発生し，S(2,0) がI(1,0) とともに消え，代わりのアトラクタとして完全安定な振動 (1,0) のS(1,0) が生じる．そして $K=0.1586$ でサドルノード分岐SN(1,0) が生じ，S(1,0) およびD(1,0) が対消滅する．この間の引力圏をFig. 4(a3) に示した．このSN(1,0) に対する制御ゲインを K_0 と表記すると，K_0 は，$K \leq K_0$ において始動させたい回転 (1,1) と共存していた定常状態が分岐により消滅する閾値となる．実際に，Fig. 4(a4) はS(1,1) が唯一のアトラクタであることを表している．同様に，パラメータ設定 (5) の分岐図をFig. 5(b) に示す．この場合の周期点は十分小さな制御ゲイン K で消滅するため図では省略している．Fig. 4(b1) に現れる振動 (4,0) は $K=0.0010$ で周期倍分岐して振動 (8,0) が現れ，$K=0.0017$ でサドルノード分岐により消滅する．$K=0$ において静止状態S(1,0) が完全安定であり，振動 (2,0) が存在しないこと，そしてこれらに伴い周期倍分岐が発生しないことを除けば，Fig. 5(b) の分岐構造は (a) に類似している．また $K_0=0.1589$ であり，この間の引力圏をFig. 4(b2) に示した．

制御ゲイン $K>K_0$ の場合，Fig. 5ではS(1,1) が表す完全安定な回転 (1,1) のみが安定な不動点として存在することから，初期状態に影響されない回転 (1,1) の始動が期待できる．しかし実際には，閾値 K_0 に対して $K>K_0$ は始動制御の達成が初期状態に影響されないための必要十分条件ではない．この理由は，目標軌道の安定性とそれへの接近可能性が制御ゲインに伴い変化するからである．このように閾値 K_0 は十分条件にならないものの，初期状態に依存しないための必要条件であることから，有用である．系 (1) における任意のパラメータ設定に対して閾値 K_0 を決定することは困難であるが，簡単な考察により $K_0 \leq 1/2\pi$ であることが確かめられる．制御ゲイン $K>1/2\pi$ の場合，励振されていない振子に制御入力 $u(t)=2\pi K>1$ を加えると，その周期的なポテンシャル構造は崩れ，平衡状態は失われる．よって，パラメトリック励振によって平衡点から分岐発生する周期振動が存在せず，周期回転に収束する．一方，奇数制約 [15,16] により，D(1,1) の不安定性は任意の制御ゲイン K に対して不変である．

この数値結果は，提案手法により任意の初期状態に対して周期回転を始動可能な制御ゲイン K の存在を示している．また，(3)，(5) 式以外のパラメータ設定に対しても提案手法は有効であり，これらより，提案する始動制御が可能であることを確認することができた．

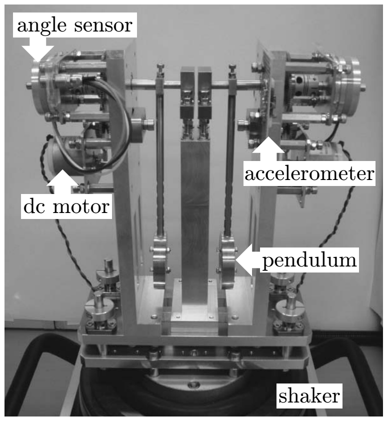


Fig. 6 Experimental setup of parametric pendulum

4. 実験的検証

本節では，提案手法の可能性を実験的に検証する．ここでは実験装置のパラメトリック振子に対して，鉛直下向きの静止状態からパラメトリック励振と等しい周波数の回転を始動し，(5) 式の場合における数値計算結果と定性的に一致することを示す．

4.1 実験装置

ここで用いる実験装置をFig. 6 に示す．装置は，バランスのため左右対称に2個の振子 (pendulum) が備え付けられた筐体を加振機 (shaker) の上に載せている．加振機で筐体を鉛直方向に励振するとパラメトリック励振が生じる．駆動部となる振子の仕様をTable 1 に示す．それぞれの振子の回転軸と直接接続した回転角度センサ (angle sensor) により振子の角変位を，加速度センサ (accelerometer) によりパラメトリック励振を測定する．制御入力トルクは，ギヤを介した直流モータ

Table 1 Size of the experimental pendulum

Pendulum	Mass	94.8 g
	Length	89.0 mm
Rod	Mass	39.6 g
	Length	180.0 mm
	Diameter	6.0 mm
Bob	Mass	50.6 g
	Diameter	50.0 mm
	Width	10.0 mm

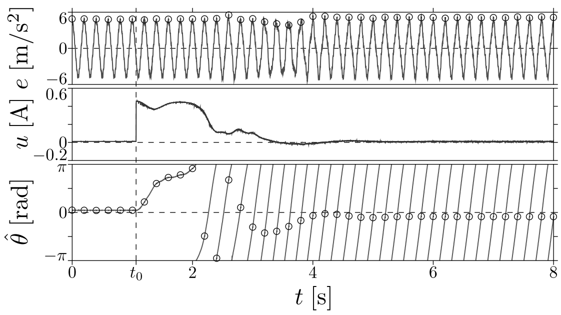


Fig. 7 Start control of the experimental pendulum

(dc motor) により与える．このとき振子の減衰係数は 7×10^{-5} kg·m^2/s 程度と見積もられる．回転角度センサで計測された角変位は対応する電圧値で出力され，A/D 変換を介して制御用計算機に取り込まれる．計算機は，Fig. 2 に示す始動制御に従い，制御入力に対応する電圧値を D/A 変換を介して出力する．この出力電圧は電圧制御電流源により電流に変換され，直流モータを駆動する．

4.2 周期回転の始動

鉛直下向きの静止状態からパラメトリック励振と等しい周波数の回転を始動するために，加振機によるパラメトリック励振を，振幅が 5.0 m/s^2，周波数が 5.0 Hz の正弦波に固定する．制御パラメータの一つである制御ゲインを 0.072 A/rad に調整する．これは制御入力トルクに対するゲインに換算すれば，0.013 N·m/rad である．

励振と等しい周期を持つ回転を始動する．遅延時間を 1/5.0 Hz = 0.2 s に設定する．鉛直下向きの静止状態を振子の初期状態として行った始動制御の実験結果を Fig. 7 に示す．制御開始と同時に振子は回転し始める．ストロボ点列に着目すれば，徐々に角度の変化量が増大することがわかる．開始後 4 秒程度で制御入力はなくなり，周期回転が現れる．また，この実験において制御ゲインは $K\approx0.15$ である．制御ゲイン $K=0.15$ で鉛直下向きの静止状態から始動する様子を示した Fig. 3(c) と Fig. 7 を比較すると，制御開始から $\hat{\theta}=\pi$ までは徐々に振子が振り上がり，その後大きく加速して周期回転に至るという振舞いと，制御入力の概形が一致している．これは，本実験装置が提案した始動制御を実現していることを意味する．したがって，この実験結果から，提案手法により励振と等しい周期を持つ回転を始動できることが確認できた．

5. おわりに

本論文では，パラメトリック振子の周期回転を始動する制御を提案し，その可能性を数値的，ならびに実験的に検討した．安定な状態の引力圏境界であるセパラトリクスを越える制御として，遅れ要素を含む提案手法は，原系の状態空間に新たな次元を加えることで目標状態に至る軌道の生成が可能であることを示している．提案手法の骨格を成す時間遅れフィードバック制御に対してその拡張あるいは一般化がすでに提案されている [12,18]．その考え方の本質は同じであることから，本論文では最も基本的な制御手法に検討を限定した．しかし，このことは拡張の可能性を否定するものではない．少なくとも，それらの方法が始動制御にも有効であることは容易に理解できる．またパラメトリック振子による自然エネルギーの回収応用において，パラメトリック励振に相当する自然界の振動が常に一定であることは期待できない．提案手法は，制御開始時における振動周波数の情報のみで回転を始動可能である．さらに，制御対象の厳密な数理モデルを必要としない [13,14] など，提案する始動制御法は実用性にも優れている．今後，これらの自然界の振動による励振を検討していきたい．

謝 辞

本研究に際し，有益な御助言を賜わりました東北大学電気通信研究所，山末耕平助教に深く感謝します．また，本研究の一部は文部科学省のグローバル COE プログラム (光・電子理工学の教育研究拠点形成) の支援を受けて遂行した．ここに謝意を表す．

参 考 文 献

[1] J. B. McLaughlin: Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum; *Journal of Statistical Physics*, Vol. 24, No. 2, pp. 375–388 (1981)

[2] R. W. Leven and B. P. Koch: Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum; *Physics Letters A*, Vol. 86, No. 2, pp. 71–74 (1981)

[3] B. P. Koch, R. W. Leven, B. Pompe and C. Wilke: Experimental evidence for chaotic behaviour of a parametrically forced pendulum; *Physics Letters A*, Vol. 96, No. 5, pp. 219–224 (1983)

[4] R. W. Leven, B. Pompe, C. Wilke and B. P. Koch: Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum; *Physica D*, Vol. 16, No. 3, pp. 371–384 (1985)

[5] M. J. Clifford and S. R. Bishop: Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum; *Physics Letters A*, Vol. 201, No. 2–3, pp. 191–196 (1995)

[6] X. Xu, M. Wiercigroch and M. P. Cartmell: Rotating orbits of a parametrically-excited pendulum; *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 23, No. 5, pp. 1537–1548 (2005)
[7] X. Xu and M. Wiercigroch: Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum; *Nonlinear Dynamics*, Vol. 47, No. 1–3, pp. 311–320 (2007)
[8] S. Lenci, E. Pavlovskaia, G. Rega and M. Wiercigroch: Rotating solutions and stability of parametric pendulum by perturbation method; *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, No. 1–2, pp. 243–259 (2008)
[9] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke: Controlling chaos; *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 11, pp. 1196–1199 (1990)
[10] K. Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback; *Physics Letters A*, Vol. 170, No. 6, pp. 421–428 (1992)
[11] H. G. Schuster (ed.): *Handbook of Chaos Control*, WILEY-VCH (1999)
[12] E. Schöll and H. G. Schuster (eds.): *Handbook of Chaos Control* (2nd edition), WILEY-VCH (2008)
[13] K. Pyragas and A. Tamaševičius: Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback; *Physics Letters A*, Vol. 180, No. 1–2, pp. 99–102 (1993)
[14] T. Hikihara and T. Kawagoshi: An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos; *Physics Letters A*, Vol. 211, No. 1, pp. 29–36 (1996)
[15] T. Ushio: Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems; *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 43, No. 9, pp. 815–816 (1996)
[16] H. Nakajima: On analytical properties of delayed feedback control of chaos; *Physics Letters A*, Vol. 232, No. 3–4, pp. 207–210 (1997)
[17] H. Ito and A. Kumamoto: Locating fold bifurcation points using subspace shooting; *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E81-A, No. 9, pp. 1791–1797 (1998)
[18] K. Pyragas: Control of chaos via extended delay feedback; *Physics Letters A*, Vol. 206, No. 5–6, pp. 323–330 (1995)

著者略歴

横井 裕一 (学生会員)

1984 年 1 月 3 日生．2008 年 3 月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了．同年 4 月同大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程に進学し，現在に至る．同期現象の研究に従事．電子情報通信学会の会員．

引原 隆士 (正会員)

1958 年 8 月 9 日生．1987 年 3 月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程研究指導認定退学．京都大学工学博士．関西大学を経て，1997 年 4 月京都大学助教授，2001 年 8 月同教授となり現在に至る．パワーエレクトロニクス，非線形力学の工学的応用，MEMS の研究，情報通信・エネルギー統合技術の研究開発などのプロジェクトに従事．電気学会，電子情報通信学会，APS，SIAM，IEEE などの会員．