数理解析研究所講究録
第 1783 巻 2012 年 61-69

極小有界等質領域上の Bergman 空間における合成作用素

名古屋大学 多元数理科学研究科 山路哲史 (Satoshi Yamaji)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概 要

極小有界等質領域上の荷重 Bergman 空間における有界な合成作用素がコンパクトになるための必要十分条件を Bergman 核の境界挙動を用いて表す.

1 序

$D\subset\mathbb{C}^{n}$ を有界領域とし, φ を D から D への正則写像とする. 合成作用素 C_{φ} とは, $C_{\varphi}f:=f\circ\varphi$ で定義される線形作用素である. この作用素を極小有界等質領域上の荷重 Bergman 空間において考察する.

以下, $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}^{n}$ を極小有界等質領域とする (定義は第 2 章を参照. 例えば単位円板や単位球, Harish-Chandra 実現された有界対称領域は極小有界等質領域である). dV を $\mathbb{C}^{n}$ の Lebesgue 測度, dV に関して二乗可積分かつ正則な関数からなる空間を $L_{a}^{2}(\mathcal{U},dV)$, $K_{\mathcal{U}}(z,w)$ を $\mathcal{U}$ の Bergman 核とする. また, $\beta\in\mathbb{R}$ に対し, $dV_{\beta}(z):=K_{\mathcal{U}}(z,z)^{-\beta}dV(z)$ とし, $0<p<\infty$ において荷重 Bergman 空間 $L_{a}^{p}(\mathcal{U},dV_{\beta}):=L^{p}(\mathcal{U},dV_{\beta})\cap\mathcal{O}(\mathcal{U})$ を考える. このとき, 次を満たす $\varepsilon_{\min}$ が存在することが知られている ; $\beta>\varepsilon_{\min}$ ならばすべての p で $L_{a}^{p}(\mathcal{U},dV_{\beta})\neq\{0\}$ である. 例えば, 単位円板 $\mathbb{D}$ における $\varepsilon_{\min}$ は $-\frac{1}{2}$, 単位球 $\mathbb{B}^{n}$ における $\varepsilon_{\min}$ は $-\frac{1}{n+1}$ ととれる.

荷重 Bergman 空間 $L_{a}^{p}(\mathcal{U},dV_{\beta})$ における有界な合成作用素がコンパクト作用素になるための条件について, $\mathcal{U}$ が単位球の場合には Zhu による結果 [12, Theorem 4.1] が知られている. また, 2011 年には Lv, Hu によってこの結果は Harish-Chandra 実現された有界対称領域へと拡張された [6, Theorem]. 今回得られた結果はこれらの結果を含むものである.

定理 A ([9, Theorem A]). ある $q > 0$ と $\beta_0 > \varepsilon_{\min}$ に対し，C_φ は $L^q_a(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素であるとする．このとき，以下は同値である．

(1) 任意の $p > 0$ と $\beta > \beta_0 + \varepsilon_{\mathcal{U}}$ に対し，C_φ は $L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である．

(2) $\displaystyle\lim_{z\to\partial\mathcal{U}} \frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)} = 0.$

ここで $\varepsilon_{\mathcal{U}}$ は式 (4.1) で定義される $\mathcal{U}$ のみによる定数であり，例えば単位球 $\mathbb{B}^n$ に対しては $\varepsilon_{\mathbb{B}^n} = 0$ である．

単位円板上の荷重 Bergman 空間における合成作用素は常に有界であることが知られている．したがって，$\mathcal{U}$ として単位円板を考える場合には定理 A の仮定は必要ない．しかしながら，多変数の場合，有界作用素でない合成作用素が存在する (第 3 章を参照)．一般に，合成作用素が有界になるための条件は知られていない．そのため，合成作用素が有界である事を仮定した上で，その作用素がいつコンパクトになるかを考察している．また，Zhu や Lv, Hu の結果と同様，この C_φ の有界性に関する仮定は (2) $\Longrightarrow$ (1) を示す際にのみ用いている．

2 極小有界等質領域上の Bergman 空間

2.1 極小有界等質領域

$D \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域とし，$t \in D$ とする．このとき，すべての $z \in D$ で

$$K_D(z,t) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)}$$

が成立するとき，D は中心 t の極小領域であるという．例えば，単位円板 $\mathbb{D}$，単位球 $\mathbb{B}^n$ の Bergman 核はそれぞれ

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{D}}(z,w) &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}, \\ K_{\mathbb{B}^n}(z,w) &= \frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1}} \end{aligned}$$

であることが知られている．したがって，$\mathbb{D}$ および $\mathbb{B}^n$ は 0 を中心とする極小領域である．また，Harish-Chandra 実現された有界対称領域，及びそれの等質領域への拡張にあたる有界等質代表領域も 0 を中心とする極小領域であることが知られている ([4, Proposition 3.8])．任意の有界等質領域は有界等質代表領域と正則同値である．これより，すべての有界等質領域はある極小領域と正則同値である．

極小有界等質領域の Bergman 核は次の評価式を持つ．この結果は Carleson 測度や平均関数に関する考察を行う際に非常に重要なものである．なお，定理 2.1 は伊師英之氏との共同研究により得られたものである．

定理 **2.1 ([5, Theorem A]).** 任意の $r>0$ に対し，$C_r>0$ を次が満たすようにとれる：$d_{\mathcal{U}}(z,a)\le r$ を満たすすべての $z,a\in\mathcal{U}$ に対し，

$$C_r^{-1}\le\left|\frac{K_{\mathcal{U}}(z,a)}{K_{\mathcal{U}}(a,a)}\right|\le C_r$$

が成立する．ここで，$d_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ の Bergman 距離である．

$K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}$ を $L_a^2(\mathcal{U},dV_\beta)$ の再生核とする．このとき，ある定数 C_β を用いて

$$K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,w)=C_\beta K_{\mathcal{U}}(z,w)^{1+\beta}$$

とかける事が知られている．各 $z\in\mathcal{U}$ に対し，z で正規化した再生核 $k_z^{(\beta)}$ を

$$k_z^{(\beta)}(w):=\frac{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(w,z)}{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{C_\beta}\left(\frac{K_{\mathcal{U}}(w,z)}{K_{\mathcal{U}}(z,z)^{\frac{1}{2}}}\right)^{1+\beta}$$

で定義する．定理 2.1 をもとに得られる極小有界等質領域の Bergman 核の性質 ([5, Proposition 6.1]) を用いると，$k_z^{(\beta)}$ は次の性質を持つことがわかる．

命題 **2.2 ([10, Proposition 2.2]).**

(1) $L_a^2(\mathcal{U},dV_\beta)$ 内の関数列 $\{k_a^{(\beta)}\}$ は $a\to\partial\mathcal{U}$ としたとき，0 に弱収束する．

(2) 関数列 $\{k_a^{(\beta)}\}$ は $a\to\partial\mathcal{U}$ としたとき，0 に広義一様収束する．

2.2 Berezin 変換，平均関数，Carleson 測度

ここでは Bergman 空間上の合成作用素に関する考察を行う上で有用な Berezin 変換，平均関数，Carleson 測度についての定義と性質を述べる．

$\mathcal{U}$ 上の正 Borel 測度 μ に対し，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widetilde{\mu}$ を

$$\widetilde{\mu}(z):=\int_{\mathcal{U}}|k_z^{(\beta)}(w)|^2\,d\mu(w)$$

で定義する．$\widetilde{\mu}(z)$ は測度 μ の Berezin 変換と呼ばれる．また，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widehat{\mu}$ を

$$\widehat{\mu}(z):=\frac{\mu(B(z,r))}{\mathrm{Vol}_\beta\,(B(z,r))}$$

で定義する．ここで，$B(z,r)$ は中心 z，半径 r の Bergman 円板とし，Borel 集合 $E\subset\mathcal{U}$ に対し，

$$\mathrm{Vol}_\beta\,(E):=\int_E dV_\beta(w)$$

とする．$\widehat{\mu}(z)$ は測度 μ の平均関数と呼ばれる．

$p>0$ に対し，次を満たす正の定数 M が存在するとき，μ は $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に関する Carleson 測度であるという：すべての $f \in L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し，

$$\int_{\mathcal{U}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \leq M \int_{\mathcal{U}} |f(z)|^p \, dV_\beta(z)$$

が成立する．μ が $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度であることは，$L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta) \subset L^p(\mathcal{U}, d\mu)$ で包含写像

$$i_p : L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta) \longrightarrow L^p(\mathcal{U}, d\mu)$$

が有界作用素であることと同値である．

さらに，$L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度 μ が vanishing Carleson 測度であるとは，0 に広義一様収束する $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 内の任意の有界列 $\{f_k\}$ に対し

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{U}} |f_k(w)|^p \, d\mu(w) = 0$$

が成立するときをいう．

定理 2.1 を用い，平均関数の性質を考察する事で μ が Carleson 測度，vanishing Carleson 測度であることは p によらないということがわかる．さらに，次の結果も得られる．

定理 2.3 ([9, Theorem 3.1]). μ を正の Borel 測度とする．このとき，次は同値である．

(i) μ は Carleson 測度である．
(ii) $\widetilde{\mu}$ は $\mathcal{U}$ 上の有界関数である．
(iii) $\widehat{\mu}$ は $\mathcal{U}$ 上の有界関数である．

定理 2.4 ([9, Theorem 3.3]). μ を有限な正の Borel 測度とする．このとき，次は同値である．

(i) μ は vanishing Carleson 測度である．
(ii) $z \to \partial\mathcal{U}$ のとき，$\widetilde{\mu}(z) \to 0$.
(iii) $z \to \partial\mathcal{U}$ のとき，$\widehat{\mu}(z) \to 0$.

3 合成作用素

3.1 非有界な合成作用素

はじめに，有界でない合成作用素の例を紹介する．

例 3.1 (有界でない合成作用素).
$\mathcal{U}$ として二重円板 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ をとる (これは中心が $(0,0)$ の極小有界等質領域である)．正則写像 φ を $\varphi(z_1, z_2) = (z_1, z_1)$ で定義する．このとき，合成作用素 C_φ は $L_a^2(\mathcal{U}, dV)$ 上で有界ではない．

証明. $f_n(z) = z_1^n z_2^n$ とする. このとき,

$$\|f_n\|_2^2 = \left(\int_{\mathbb{D}} |z_1|^{2n}\, dV(z_1)\right)\left(\int_{\mathbb{D}} |z_2|^{2n}\, dV(z_2)\right) = \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^2.$$

一方,

$$\|C_\varphi f_n\|_2^2 = \left(\int_{\mathbb{D}} |z_1|^{4n}\, dV(z_1)\right)\left(\int_{\mathbb{D}} dV(z_2)\right) = \frac{\pi^2}{2n+1}.$$

したがって,

$$\frac{\|C_\varphi f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

より, C_φ は有界作用素ではない. □

3.2 有界性から得られる性質

次に, 合成作用素の性質を述べる ([11, section 11], [12] を参照). C_φ が $L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素と仮定する. このとき, $f \in L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対して

$$C_\varphi^* f(w) = \langle C_\varphi^* f, K_w^{(\beta)} \rangle_{L^2(dV_\beta)} = \left\langle f, C_\varphi K_w^{(\beta)} \right\rangle_{L^2(dV_\beta)} \tag{3.1}$$

が成立する. したがって, 特に f として $k_a^{(\beta)}$ をとると

$$\begin{aligned} C_\varphi^* k_z^{(\beta)}(w) &= \left\langle k_z^{(\beta)}, C_\varphi K_w^{(\beta)} \right\rangle_{L^2(dV_\beta)} = K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)^{-\frac{1}{2}}\, \overline{\langle C_\varphi K_w^{(\beta)}, K_z^{(\beta)} \rangle}_{L^2(dV_\beta)} \\ &= K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)^{-\frac{1}{2}}\, \overline{C_\varphi K_w^{(\beta)}(z)} = \frac{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(w, \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

となるため,

$$\left\|C_\varphi^* k_z^{(\beta)}\right\|_{L^2(dV_\beta)}^2 = \frac{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(\varphi(z), \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)} = \left(\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}\right)^{1+\beta}. \tag{3.2}$$

となる. C_φ^* も有界であるから

$$K_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(z)) \le C K_{\mathcal{U}}(z,z) \tag{3.3}$$

が得られる. 式 (3.3) は定理 3.2 を示す際などに用いる.

また, 式 (3.1) から

$$C_\varphi C_\varphi^* f(w) = \langle f, C_\varphi K_{\varphi(w)}^{(\beta)} \rangle_{L^2(dV_\beta)} = \int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(\varphi(w), \varphi(u)) f(u)\, dV_\beta(u) \tag{3.4}$$

が得られる. Hilbert 空間の一般論より C_φ がコンパクトである事は $C_\varphi C_\varphi^*$ がコンパクトである事と同値である. 主定理を証明する際には $C_\varphi C_\varphi^*$ が (3.4) で得られる積分作用素であることを用い, そのコンパクト性を考察する.

3.3 Carleson 測度との関係

最後に，合成作用素と Carleson 測度の関係を述べる．測度 $\mu_{\varphi,\beta}$ を

$$\mu_{\varphi,\beta}(E) := \mathrm{Vol}_\beta\left(\varphi^{-1}(E)\right)$$

で定義する． このとき，C_φ が $L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素であることは

$$\int_{\mathcal{U}} |f(w)|^p \, d\mu_{\varphi,\beta}(w) \le C \int_{\mathcal{U}} |f(w)|^p \, dV_\beta(w) \qquad ({}^\forall f \in L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta))$$

が成立する事と同値である．これは $\mu_{\varphi,\beta}$ が $L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度である事を意味する．Carleson 測度，vanishing Carleson 測度の性質を用いると合成作用素の有界性，コンパクト性に関して次が得られる．

定理 3.2 ([9, Theorem B]). ある $q > 0$ と $\beta_0 > \varepsilon_{\min}$ で C_φ が $L^q_a(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素（コンパクト作用素）であると仮定する．このとき，すべての $p > 0$ と $\beta \ge \beta_0$ で C_φ は $L^q_a(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素（コンパクト作用素）となる．

4 主定理の証明

ここでは主定理 (定理 A) の証明を行う．まずは証明の際に重要な役割を果たす積分公式に関して述べる．$\mathcal{D}$ を $\mathcal{U}$ と正則同値な Siegel 領域とする．$n_j \ge 0, q_j \ge 0, d_j \le 0$ を [3] や [1] で定義された量とする ([9] も参照).

$$\varepsilon_{\mathcal{U}} := \max\left\{ \frac{n_j}{2(-2d_j + q_j)} \,\middle|\, 1 \le j \le l \right\} \tag{4.1}$$

に対し，Békollé, Kagou は次の積分等式を示した．

補題 4.1 ([1, Corollary II.4]). $\beta > \varepsilon_{\min}, \alpha > \beta + \varepsilon_{\mathcal{U}}$ のとき，

$$\int_{\mathcal{D}} |K_{\mathcal{D}}(\zeta, \zeta')|^{1+\alpha} K_{\mathcal{D}}(\zeta', \zeta')^{-\beta} \, dV(\zeta') = C K_{\mathcal{D}}(\zeta, \zeta)^{\alpha-\beta}$$

が成立する．

Φ を $\mathcal{U}$ から $\mathcal{D}$ への双正則写像とする．等長写像

$$L^2_a(\mathcal{D}, K_{\mathcal{D}}(\zeta, \zeta)^{-\beta} dV(\zeta)) \ni f \longmapsto \det J(\Phi, \cdot)^{1+\beta} f \circ \Phi \in L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$$

を用いて，$\mathcal{D}$ 上の積分公式を $\mathcal{U}$ へと変換することで次が得られる．

補題 4.2. $\beta > \varepsilon_{\min}, \alpha > \beta + \varepsilon_{\mathcal{U}}$ のとき，

$$\int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(z, z')|^{1+\alpha} |\det J(\Phi, z')|^{1+2\beta-\alpha} \, dV_\beta(z') = C K_{\mathcal{U}}(z, z)^{\alpha-\beta} |\det J(\Phi, z)|^{1+2\beta-\alpha}$$

が成立する．

補題 4.2 を用いて主定理の証明を行う．領域 $\mathcal{U}$ のみによる定数 $\varepsilon_{\mathcal{U}}$ は補題 4.2 を用いる際に必要になるものである．

定理 4.3 (定理 **A**)**.** ある $q>0$ と $\beta_0>\varepsilon_{\min}$ に対し，C_φ は $L_a^q(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素であるとする．このとき，以下は同値である．
(*i*) 任意の $p>0$ と $\beta>\beta_0+\varepsilon_{\mathcal{U}}$ に対し，C_φ は $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である．
(*ii*) $\displaystyle\lim_{z\to\partial\mathcal{U}} \frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}=0.$

証明. $p=q=2$ としてよい．まず，(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) を示す．C_φ を $L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素と仮定する．このとき，C_φ^* も $L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である．$\{k_z^{(\beta)}\}$ は $z\to\partial\mathcal{U}$ としたとき，$\mathcal{U}$ 上で 0 に弱収束する．したがって $\|C_\varphi^* k_z^{(\beta)}\|_{L^2(dV_\beta)}\to 0$ を得る．ここで、(3.2) から

$$\left\|C_\varphi^* k_z^{(\beta)}\right\|^2_{L^2(dV_\beta)}=\left(\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}\right)^{1+\beta}$$

だったので (*ii*) が成立する．
次に (*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*) を示す．$f\in L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し，

$$Sf(z):=\int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}\left(\varphi(z),\varphi(w)\right) f(w)\, dV_\beta(w)$$

とする．仮定より C_φ は $L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素となるので (3.4) より $C_\varphi C_\varphi^*=S$ を得る．したがって，$f\in L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し，

$$S^+f(z):=\int_{\mathcal{U}}\left|K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}\left(\varphi(z),\varphi(w)\right)\right| f(w)\, dV_\beta(w)$$

とおき，S^+ が $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素であることを示せば良い．$r>0$ に対し，$\mathcal{U}_r:=\{z\in\mathcal{U}\mid \operatorname{dist}(z,\partial\mathcal{U})<r\}$ とする．

$$\begin{aligned}
K_{1,r}^+(z,w)&:=\chi_{\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}_r}(w)\left|K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}\left(\varphi(z),\varphi(w)\right)\right|,\\
K_{2,r}^+(z,w)&:=\chi_{\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}_r}(z)\,\chi_{\mathcal{U}_r}(w)\left|K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}\left(\varphi(z),\varphi(w)\right)\right|,\\
K_{3,r}^+(z,w)&:=\chi_{\mathcal{U}_r}(z)\,\chi_{\mathcal{U}_r}(w)\left|K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}\left(\varphi(z),\varphi(w)\right)\right|
\end{aligned}$$

に対し，$K_{j,r}^+$ を積分核とする $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の作用素を $S_{j,r}^+$ とする．このとき，

$$S^+=S_{1,r}^++S_{2,r}^++S_{3,r}^+$$

となる．ここで，補題 4.2 を用いて計算すると

$$h(z):=K_{\mathcal{U}}(z,z)^{\beta-\beta_0}\left|\det J(\Phi,\varphi(z))\right|^{1+2\beta_0-\beta}$$

は

$$\int_{\mathcal{U}} K^{+}_{3,r}(z,w)h(w)\,dV_\beta(w) \le C\,\chi_{\mathcal{U}_r}(z)\left(\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}\right)^{\beta-\beta_0} h(z)$$

を満たすことがわかる．したがって，Schur の定理より $S^{+}_{3,r}$ は $L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素であり，そのノルムは $CM(r)$ 以下である．ただし，

$$M(r) := \sup_{z\in\mathcal{U}_r}\left\{\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}\right\}^{\beta-\beta_0}$$

とおいた．ここで，条件 (ii) から $r\to 0$ のとき $M(r)\to 0$ となる．したがって，$\|S^{+} - S^{+}_{1,r} - S^{+}_{2,r}\| \to 0$ が成立し，$S^{+}_{1,r}$ と $S^{+}_{2,r}$ は $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素なので S^{+} も $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である． □

参考文献

[1] D. Békollé, A. T. Kagou, *Reproducing properties and L^p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of type II.*, Studia. Math. **115**, (1995), 219–239.

[2] C. Cowen, B. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic function*, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19-4**, (1964), 1–89.

[4] H. Ishi, C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain*, Kyushu J. Math. **64**, (2010), 35–47.

[5] H. Ishi, S. Yamaji, *Some estimates of the Bergman kernel of minimal bounded homogeneous domains*, J. Lie Theory, **21** (2011), 755–769.

[6] X. Lv, Z. Hu, *Compact composition operators on weighted Bergman spaces on bounded symmetric domains*, Acta Math. Scientia, **31B**(2), (2011), 468–476.

[7] M. Maschler, *Minimal domains and their Bergman kernel function*, Pacific J. Math. **6**, (1956), 501–516.

[8] S. Yamaji, *Positive Toeplitz operators on the Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain*, to appear in Hokkaido Math. J.

[9] S. Yamaji, *Composition operators on the Bergman spaces of a minimal bounded homogeneous domain*, preprint, arXiv:1105.1416.

[10] S. Yamaji, *Essential norm estimates for positive Toeplitz operators on the weighted Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain*, preprint, arXiv:1109.4500.

[11] K. H. Zhu, *Operator theory in function spaces, second edition*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs Vol.**138**, 2007.

[12] K. H. Zhu, *Compact composition operators on weighted Bergman spaces of the unit ball*, Houston J. Math., **33**, (2007), 273–283.