数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 135-139

On a perfect isometry between principal blocks of nite groups

熊本大学大学院自然科学研究科 (理学系)　渡邉アツミ (Atumi WATANABE)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kumamoto University

1 問題

$(K, \mathcal{O}, k)$ を十分大きな p-モジュラー系, G を有限群とする. G の p-正則元の全体 $G_{p'}$ で生成される G の正規部分群は $O^p(G)$ に一致する. P を G の Sylow p-部分群とする. P の部分群

$$Q := \langle\ [\ T,\ O^p(N_G(T))\ ]\ |\ T \quad P\ \rangle$$

は G の p-超焦点部分群と呼ばれる.

$$Q = P \cap O^p(G)$$

が成り立つ (Puig [7], 証明は [3], 定理 1.33 参照).

Rouquier 予想 (主ブロックの場合) ([8], A.2) Q が可換であるならば G の主ブロック $b(G)$ と $b(N_G(Q))$ は導来同値である.

一般のブロックに対する Rouquier 予想については [12] を参照されたい. [11], §2 より, $Q \quad Z(P)$ ならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ は導来同値であることが予想される. 故に次が予想される.

問題 $Q \quad Z(P)$ ならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ の間に perfect isomety が存在する.

定理 ([11], 定理 3) $Q \quad Z(P)$ かつ Q が巡回群であるならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ の間に isotypy が存在する.

・ Z_p-定理を用いると, $b(G)$ と $b(N_G(P))$ は Rickard equivalent が示される. 上の定理はこの事実を使わずに証明する.
・ P が可換である場合は既に証明されている ([10]).
・ 上の定理の証明では Puig-Usami の方法 [6], §3 を用いる.

2 Perfect isometry と isotypy

[2] で導入されたブロックの perfect isometry と isotypy の定義を述べる. なおブロックの理論に関する用語と記号は [5], [9] に従う. e を有限群 G のブロック, f を有限群 H のブ

ロックとする. ブロックは $\mathcal{O}$ 上の群環のブロック冪等元を指す. $(KHf)^o$ を KHf の反対環とする. $KGe \quad _K (KHf)^o$ の一般指標 μ は次の２条件を満たすとする：

(1) 任意の $(g,h) \in G \quad H$ に対して $\dfrac{\mu(g,h)}{|C_G(g)|}, \dfrac{\mu(g,h)}{|C_H(h)|} \in \mathcal{O}$.

(2) $\mu(g,h) \neq 0$ ならば g と h は共に p-正則であるか p-非正則である.

$$\mu = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(f)} I \ (\zeta) \quad \zeta, \ I \ (\zeta) \in \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(e)$$

と書くとき, $\mathbf{Z}$-線形写像

$$I \ : R_K(H,f) := \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(f) \to R_K(G,e) \ (\zeta \mapsto I \ (\zeta))$$

が全単射の isometry であるならば, I を μ が与える f から e への **perfect isometry** という. このとき任意の $\zeta \in \mathrm{Irr}(f)$ に対して

$$\exists_1 \chi \in \mathrm{Irr}(e) \ \ s.\,t. \ \ I \ (\zeta) = \quad \chi.$$

e と f は共通の不足群 P をもつとする. (P, e_P) を極大 b-Brauer pair, (P, f_P) を極大 f-Brauer とする. 各 $u \in P$ に対して e- Brauer 元 $(u, e_u) \in (P, e_P)$, f-Brauer 元 $(u, f_u) \in (P, f_P)$ とする. ここで次の２条件を仮定する.

(1) e と f の Brauer 圏は等しい, つまり $\mathcal{F}_{(P,e_P)}(G,e) = \mathcal{F}_{(P,f_P)}(H,f)$.

(2) P の各元 u に対して

$$I^{\langle u \rangle} \quad d_H^{(u,f_u)} = d_G^{(u,e_u)} \quad I^{\langle 1 \rangle}$$

を満たす perfect isometry

$$I^{\langle u \rangle} : R_K(C_H(u), f_u) \to R_K(C_G(u), e_u)$$

が存在する. 但し $I^{\langle u \rangle}$ は $K \quad _{\mathbf{Z}} R_K(C_H(u), f_u)$ から $K \quad _{\mathbf{Z}} R_K(C_G(u), e_u)$ への写像と見ている. また $d_G^{(u,e_u)}$ は分解写像 (cf. [2]) である. このとき $I = I^{\langle 1 \rangle}$ を $\{I^{\langle u \rangle}\}_{\langle u \rangle \quad P}$ を local system とする f から e への **isotypy** という.

3 定理の証明の流れ

[11], §4 に従って**定理**の証明の流れをたどる.

$$b := b(G), \ b_0 := b(N_G(P)), \ H := O^{p'}(G).$$

仮定から $Q \quad Z(P)$ で Q は H の巡回 Sylow p-部分群である.

$$E = (N_H(P)C_G(P))/C_G(P)$$

とおく. E は $N_G(P)/C_G(P)$ における正規 p-補群である.

1) ([11], 定理 1) G と $N_G(P)$ の Frobenius 圏は同じ, つまり $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$.
2) ([11], 命題 2) $P = Q \quad R$, $R = C_P(E)$.
3) ([11], 命題 3) $E = N_H(Q)/C_H(Q)$.

$$e := |E|,\ m := \frac{|Q| \quad 1}{e}.$$

$\mathcal{M}$ を Q の非自明な 1 次指標の E-軌道の完全代表系とする.

$$:= \sum_{x \in E} \mu^x \quad (\mu \in \mathcal{M}).$$

[4] より

$$\mathrm{Irr}(b(H)) = \{\chi_1 = 1_H, \chi_2, \quad , \chi_e;\ \chi \quad (\mu \in \mathcal{M})\}$$

と記述される, 但し

$$\begin{cases} \chi_j(\quad \rho) = \epsilon_j, \\ \chi \ (\quad \rho) = \epsilon \quad (\ ), \\ ((\quad (\neq 1) \in Q,\ \rho \in (C_H(\quad))_{p'})\ ;\ \epsilon_1 = 1,\ \epsilon_j = \quad 1\ (j \quad 2),\ \epsilon = \quad 1) \end{cases}$$

なお $m = 1$ のとき χ は χ_i と区別しない.

4) ([11], 命題 3) $b(H)$ のすべての既約指標は G へ拡張可能である.

を P の指標と見るとき, $N_G(P)$-安定である, 故に G-安定である. 指標の construction ([1]) 1_G は次を満たす:

$$1_G \qquad = (e \quad 1)1_G \quad \sum_{j=2}^{e} \epsilon_j \hat{\chi_j} + \epsilon \hat{\chi} \quad (\mu \in \mathcal{M})$$

を満たす χ_j の拡張 $\hat{\chi_j}$ と χ の拡張 $\hat{\chi}$ が存在する ([11], (7)). 以上から

5)

$$\mathrm{Irr}(b) = \{\hat{\chi_j}\lambda,\ \hat{\chi}\ \lambda' \mid 1 \quad j \quad e;\ \mu \in \mathcal{M}; \lambda, \lambda' \in \mathrm{Irr}(R)\}.$$

$$L := N_G(P)/O_{p'}(C_G(P)) = (Q \rtimes E) \quad R$$

とおく. $\mathcal{O}N_G(P)b_0 = \mathcal{O}L$ である. b と $b(L)$ の間に isotypy が存在することを示せばよい. $\mathrm{Irr}(b(L)) = \{\hat{\zeta_j}\lambda,\ \hat{\zeta}\ \lambda' \mid 1 \quad j \quad e;\ \mu \in \mathcal{M}; \lambda, \lambda' \in \mathrm{Irr}(R)\}$, 但し $\hat{\zeta_j}$, $\hat{\zeta}$ は $1_L \qquad = (e \quad 1)1_L \quad \sum_{j=2}^{e} \hat{\zeta_j} + \hat{\zeta} \quad (\mu \in \mathcal{M})$ を満たす.

6) ([11], 命題 5) P は可換と仮定する. $\chi_2, \quad , \chi_e$ を適当に並べ替えることにより ($m = 1$ のときは $\chi_2, \quad , \chi_e, \chi$ を適当に並べ替えることにより) bijective isometry

$$\hat{I} : \mathcal{R}_K(L, b(L)) \to \mathcal{R}_K(G, b) \quad (\hat{I}(\hat{\zeta_j}\lambda) = \epsilon_j \hat{\chi_j}\lambda,\ \ \hat{I}(\hat{\zeta}\ \lambda) = \epsilon \hat{\chi}\ \lambda)$$

は isotypy である ([6] を用いる).

$$b_v := b(C_G(v)) \quad (v \in P).$$

を R の任意の元とする. 仮定から $C_G(\ ) = C_H(\ )C_R(\ )$ で, $C_G(\ )$ は Sylow p-部分群 $C_P(\ )$ と p-超焦点部分群 Q を持つことが示せる. 従って $\mathrm{Irr}(b\ )$ は

$$\mathrm{Irr}(b\ ) = \{\hat{\chi}_j\lambda \mid 1 \quad j \quad e,\ \lambda \in \mathrm{Irr}(C_G(\ )/C_H(\ ))\}$$
$$\cup \{\hat{\chi}\ \lambda \mid \mu \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathrm{Irr}(C_G(\ )/C_H(\ ))\},$$

但し $\hat{\chi}_j, \hat{\chi}\ \in \mathrm{Irr}(b\ )$ はそれぞれ $\chi_j, \chi\ \in \mathrm{Irr}(b(C_H(\ )))$ の $C_G(\ )$ への拡張で

$$1_{C_G(\ )} \qquad = (e \quad 1)1_{C_G(\ )} \quad \sum_{j=2}^{e} \epsilon_j\hat{\chi}_j + \epsilon\ \hat{\chi}\ ,\ \epsilon_j,\ \epsilon\ =\ \ 1$$

を満たす. $G\ = \langle O^p(G),\ \rangle = \langle H,\ \rangle$ とおく. $\hat{\chi}_j|_{C_{G_\sigma(\sigma)}}, \hat{\chi}\ |_{C_{G_\sigma}(\ )}$ は既約で

$$1_{C_{G_\sigma}(\ )} \qquad = (e \quad 1)1_{C_{G_\sigma}(\ )} \quad \sum_{j=2}^{e} \epsilon_j\hat{\chi}_j|_{C_{G_\sigma}(\ )} + \epsilon\ \hat{\chi}\ |_{C_{G_\sigma}(\ )}.$$

G に 6) とその証明を適用して次を得る.

7) ([11], 系 2) $\in R$ とする. $\chi_2, \quad ,\chi_e$ を適当に並べ替えることにより ($m=1$ のときは $\chi_2, \quad ,\chi_e, \chi$ を適当に並べ替えることにより) 次が成り立つ.

$$\hat{\chi}_j(\quad \rho) = \epsilon_j,\ \hat{\chi}\ (\quad \rho) = \epsilon \quad (\ ) \quad (\forall \ (\neq 1) \in Q;\ \forall\rho \in C_G(\quad)_{p'}),$$

$$\hat{\chi}_j(\ \rho) = \epsilon_j\epsilon_j\hat{\chi}_j(\rho),\ \ \hat{\chi}\ (\ \rho) = \epsilon\epsilon\ \hat{\chi}\ (\rho) \quad (\forall\rho \in C_G(\ )_{p'}).$$

8) ([11], 命題 6) 定理の仮定と以上の記号の下, bijective isometry

$$\hat{I} : \mathcal{R}_K(L, b(L)) \to \mathcal{R}_K(G, b)$$
$$(\ \hat{I}(\hat{\zeta}_j\lambda) = \epsilon_j\hat{\chi}_j\lambda,\ \ \hat{I}(\hat{\zeta}\ \lambda) = \epsilon\hat{\chi}\ \lambda\ )$$

は perfect isometry である.

$\in R$ に対して, perfect isometry $\hat{I}_{\langle\ \rangle} : \mathcal{R}_K(C_L(\ ), b(C_L(\ ))) \to \mathcal{R}_K(C_G(\ ), b\ )$ を

$$\hat{I}_{\langle\ \rangle}(\hat{\zeta}_j\lambda) = \epsilon_j\hat{\chi}_j\lambda,\ \ \hat{I}_{\langle\ \rangle}(\hat{\zeta}\ \lambda) = \epsilon\ \hat{\chi}\ \lambda$$

とする. 但し χ_j の番号付けは 7) に従う. 一方 $\in P \backslash R$ とする. このとき $C_L(\ ) = C_P(\ )$, $C_G(\ ) = C_H(\ )C_R(\ )$. 仮定から $C_G(\ )$ は p-冪零である.

$$\hat{I}\ \ : \mathcal{R}_K(C_L(\ ), b(C_L(\ ))) \to \mathcal{R}_K(C_G(\ ), b\ )$$

を自明な perfect isometry とする.

9) $\hat{I}$ は $\{\hat{I}_{\langle v\rangle}\}_{\langle v\rangle \quad P}$ を local system とする isotypy である.

参考文献

[1] M. Broue and L. Puig, Characters and local structure in G-algebras, J. Algebra, **63**(1980), 306-317.

[2] M. Broue, Isometries parfaites, types de blocs, categories derivees, *Asterisque*, **181-182**(1990), 61-92.

[3] D. A. Craven, "The theory of fusion systems, " Cambridge studies in Advanced mathematics, **131**, 2011.

[4] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, Ann. Math. **84**(1966), 20-48.

[5] H. Nagao and Y. Tsushima, " Representation theory of nite groups", Academic Press, 1989.

[6] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, J. Algebra **160** (1993), 192-225.

[7] L. Puig, The hyperfocal subalgebra of a block, Invent. math., **141**(2000), 365-397.

[8] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of nite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101-146, de Gruyter, Berlin, 2001.

[9] J. Thevenaz, "G-algebras and modular representation theory", Clarendon Press, Oxford, 1955.

[10] A. Watanabe, On perfect isometries for blocks with abelian defect groups and with cyclic hyperfocal subgroups, Kumamoto J. Math., **18**(2005), 85-92.

[11] A. Watanabe, On blocks of nite groups with central hyperfocal subgroups, 2011.

[12] 渡邉アツミ, 有限群のブロックの超焦点部分群と超焦点部分代数, 代数学シンポジウム (岡山, 2011) 報告.