

Fusion system と Scott 加群の Brauer 直既約性

東京理科大学理学部・刃刀直子

1 はじめに

有限群のモジュラー表現における重要な問題の一つに, Broué の可換不足群予想がある。 p -局所構造が等しく可換なシロー p -部分群をもつ 2 つの有限群の主ブロックは, 導来同値になるのではないかという予想である。 2 つの有限群のブロック間の森田同値, あるいは, 導来同値を考える際, p -部分群の中心化群のブロック間での森田同値や導来同値を張り合わせることで, もとのブロック間の安定同値を構成する方法がある。 このとき「張り合わせ」がうまくいくために, p -置換加群の Brauer 直既約性という性質が必要となる。 本稿ではまず, 可換な vertex をもつ Scott 加群の Brauer 直既約性に関する結果を紹介する。 また, 2 つのブロック間の森田同値や導来同値は, 非可換不足群をもつブロック間でも期待される場合がある。 そのため, 非可換な vertex をもつ Scott 加群の Brauer 直既約性に関しても考察した結果を紹介する。

2 記号と定義

まず, 記号を設定し, いくつかの基本事項について説明する。

G を有限群, p を素数とし, k を標数 p の代数的閉体とする。 $B_0(G)$ を kG の主ブロック (自明な加群を零化しない kG の両側イデアルとしての直既約因子) とする。 $H \leq G$, G の p -部分群 Q , kG -加群 U に対し, $U^G := \{u \in U \mid ug = gu, \forall g \in G\}$, $\text{Tr}_H^G : U^H \rightarrow U^G; u \mapsto \sum_{t \in H \backslash G} ut$ (トレース写像) とし, さらに, Q に関する U の Brauer construction を $U(Q) = U^Q / \sum_{R < Q} \text{Tr}_R^Q(U^R)$ と定める。 $U(Q)$ は $kN_G(Q)$ -加群である。

Brauer construction は一般の kG -加群に対して定義されるが, とくに置換加群の直和因子に対して良い性質をもつ。

Proposition 2.1 ([8] 参照) U を置換 kG -加群の直既約因子, P を U の vertex とする。 G の p -部分群 Q に対し,

$$U(Q) \neq 0 \iff x^{-1}Qx \leq P \ (\exists x \in G)$$

が成立する。

とくに, 置換加群の直既約因子の vertex は, Brauer construction が non-zero となる極大の p -

部分群であるということができる。

次に、置換加群の直既約因子のなかで、特別な加群を定義する。

Definition 2.2 (Alperin, Scott [6] 参照) $H \leq G$ とする。誘導加群 k_H^{1G} の直既約因子 S で $S/\text{rad}(S)$ の既約因子に自明な加群 k_G をもつ唯一のものを H に関する G の Scott 加群といい、 $\text{Scott}(G, H)$ で表す。

Scott 加群に対しては、次が成立する。

Proposition 2.3 ([6] 参照) $H, H' \leq G, P \in \text{Syl}_p(H), P' \in \text{Syl}_p(H')$ とする。

- (1) $\text{Scott}(G, H)$ は vertex P をもつ。
- (2) 次が成立する。

$$\text{Scott}(G, H) \cong \text{Scott}(G, H') \iff P = x^{-1}P'x (\exists x \in G)$$

とくに、 $\text{Scott}(G, H) \cong \text{Scott}(G, P)$ である。

したがって、 G の p -部分群に関する Scott 加群のみを考えればよい。

次に fusion system に関する定義などを述べる。

Definition 2.4 G の p -部分群 P 上の fusion system $F_P(G)$ とは P の部分群を object としてもち、 $\text{Hom}(Q, R) = \{c_x : Q \rightarrow R; u \mapsto u^x | x \in G\}$ を Q から R の morphism の集合とする category である。

G における P 上の fusion system について、次のことはよく知られている。

Lemma 2.5 $P \leq H \leq G$ とする。 P は G の p -部分群とする。次は同値である。

- (1) $F_P(G) = F_P(H)$
- (2) 任意の P の部分群 Q に対し、 $t \in G$ が $Q^t \leq P$ を満たすなら、 $t \in C_G(Q)H$
- (3) 任意の P の部分群 Q に対し、 $N_G(Q) = C_G(Q)N_H(Q)$ が成立する。

Fusion system の中で重要なものに、saturated fusion system というものがある。Sylow の定理をまねた2つの公理 (extension axiom と Sylow axiom) を満たす fusion system である。詳しくは述べないが、例えば、 P が G の Sylow p -部分群であるときは、 $F_P(G)$ は saturated fusion system である。また、 P が abelian p -部分群であれば、次のように言い換えられる。

Lemma 2.6 P が G の abelian p -部分群のとき、次は同値である。

- (1) $F_P(G)$ が saturated fusion system である。
- (2) 次の2条件が成立する。
 - (S) $N_G(P)/C_G(P)$ が p' -群

$$(E) \quad F_P(G) = F_P(N_G(P))$$

3 Scott 加群の Brauer 直既約性

この節では, Scott 加群の Brauer 直既約性について, Kessar-K-Mitsuhashi [4] の結果, および 外山 [9] の結果を紹介する。

Definition 3.1 ([4]) M を kG -加群とする。すべての p -部分群 Q に対して, $M(Q)$ が $k[QC_G(Q)]$ -加群として直既約 (または 0) となるとき, M を Brauer 直既約という。

まず, 置換加群の Brauer 直既約性に関しては, 次の定理が得られている。

Theorem 3.2 ([4, Theorem 1.1]) G を有限群とし, P を G の p -部分群とする。 M を vertex P の直既約な置換加群の直和因子とする。 M が Brauer 直既約なら, $F_P(G)$ は saturated fusion system である。

この定理の逆は一般には成立しないが, M を Scott 加群, P を可換群とするとき, 次の定理が成立する。

Theorem 3.3 ([4, Theorem 1.2]) G を有限群とし, P を G の可換な p -部分群とする。 $F_P(G)$ が saturated fusion system であるとき, $M = \text{Scott}(G, P)$ は Brauer 直既約である。

したがって, P が可換なら $F_P(G)$ が saturated fusion system であることと Scott 加群が Brauer 直既約であることが同値であることがわかる。

2 つの有限群 G_1, G_2 が共通の Sylow p -部分群 P をもち, $F_P(G_1) = F_P(G_2)$ のとき, $F_{\Delta(P)}(G_1 \times G_2) = F_P(G_1) = F_P(G_2)$ となり, とくに $F_{\Delta(P)}(G_1 \times G_2)$ は saturated となるから, 次の定理を得ることができる。

Theorem 3.4 ([4, Corollary 1.3]) G_1, G_2 を有限群とし, 共通の可換な Sylow p -部分群 P をもつとし, $F_P(G_1) = F_P(G_2)$ であるとする。このとき, $M = \text{Scott}(G_1 \times G_2, \Delta(P))$ は Brauer 直既約である。

この定理は例えば, 共通の Sylow p -部分群 P が可換となるとき (すなわち Broué 予想の設定となるとき), 主ブロック $B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ の安定同値の構成に役に立つ。まず, もととなる次の定理を紹介する。

Theorem 3.5 (Broué [3]) $M = \text{Scott}(G_1 \times G_2, \Delta(P))$ とする。 M を誘導加群 $k_{\Delta(P)}^{G_1 \times G_2}$ の直既約因子とする。 $1 \neq \forall Q \leq P$ に対し, M の $\Delta(Q)$ に関する Brauer construction $M(\Delta(Q))$ が $B_0(C_{G_1}(Q))$ と $B_0(C_{G_2}(Q))$ の間の森田同値を誘導するなら, M は $B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ の森田型の安定同値を誘導する。

これまでも、各 Q に対して、中心化群 $C_{G_1}(Q)$ と $C_{G_2}(Q)$ の主ブロック間の森田同値が Scott 加群で与えられること確認できることはあり、その Scott 加群が $M(\Delta(Q))$ の形で与えられているかを個別に確認することで、 $B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ の安定同値を得ていた。しかし一般に、 $M(\Delta(Q))$ は $k[C_{G_1}(Q) \times C_{G_2}(Q)]$ -加群として Scott 加群を直和因子にもつことは容易にわかるので、Theorem 3.4 を使えば、安定同値が得られることになる。

これで、可換な vertex をもつ Scott 加群の Brauer 直既約性と fusion system の関係が明らかになったが、一方、非可換な vertex をもつ Scott 加群ではどうなのかという問題が生じる。可換の場合に比べて、状況が複雑になり、まったく同じようにはいかないようである。特別な場合のみであるが、[9] において次のことが示されている。

Theorem 3.6 ([9, 主定理 2]) G を有限群、 P を G の D_8 と同型な 2-部分群、 M を G の P に関する Scott 加群、 $F_P(G)$ は saturated であるとする。また、 P の位数 4 の各部分群 Q に対し、

$$\begin{aligned} \exists H_Q \leq N_G(Q) \quad \text{s.t.} \quad \text{Syl}_2(H_Q) \ni P, \\ |N_G(Q) : H_Q| = 2^a, a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

が成り立つとすると、 M は Brauer 直既約である。

参考文献

- [1] C. Broto, R. Levi, R. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc 16 (2003) 779–856
- [2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* 181-182 (1990), 61–92.
- [3] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Finite Dimensional Algebras and Related Topics, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, pp.1–26.
- [4] R. Kessar, N. Kunugi, N. Mitsuhashi, On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules, J. Algebra 340 (2011), 90–103
- [5] M. Linckelmann, An introduction to fusion systems, Group representation theory 79–113, EPFL Press, Lausanne, 2007
- [6] 永尾汎-津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987
- [7] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101–146, de Gruyter, Berlin, 2001
- [8] J. Thévenaz, G -algebras and modular representation theory. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995
- [9] 外山菜保子, 非可換群を vertex にもつ Scott 加群の Brauer 直既約性, 平成 22 年度東京理科大学修士論文