

# SDP と QE を用いた非線形システムのゲイン解析

市原裕之  
明治大学\*

HIROYUKI ICHIHARA  
MEIJI UNIVERSITY

穴井宏和  
(株)富士通研究所/九州大学†

HIROKAZU ANAI  
FUJITSU LABORATORIES LTD/KYUSHU UNIVERSITY

## Abstract

本論文では、動的なシステムの非線形ゲイン解析問題に対し、半正定値計画と限量記号消去の組み合わせによる計算手法を提案する。数値的手法である半正定値計画によってゲイン関数の一つの構造を決め、数式的手法である限量記号消去によってその構造をもつすべてのゲイン関数を決定する。この結果から、すべての入力に対するゲイン関数の最小化を行う。提案する手法は、多項式非線形システムに対し、ゲイン関数の構造に関する不必要な探索を排除することができる。二つの例によって、提案手法の有効性を確認する。

## 1 はじめに

数式的な計算手法は、制御工学において近年注目を集めている。とくに限量記号消去 (Quantifier Elimination, QE) [3, 16] は、ロバスト制御 [5, 6, 15] やマルチパラメトリック最適化 [14] にもとづくモデル予測制御 [1] へ応用されている。QE はその名が示すように、実閉体に関する一階述語論理式から限量記号を消去する計算手法である。強力な計算アルゴリズムとして CAD (Cylindrical Algebraic Decomposition) 法 [3] が知られている。ただし、QE の計算量はしばしば非常に多くなるため、特別なクラスの QE 問題に対する高速な計算手法も開発されている。

制御に限らず多くの工学分野において、問題を解く際のヒューリスティックな部分を取り除く計算手法の開発が続けられている。そのための実用的なアプローチの一つが数値的な計算手法と数式的な計算手法を融合させることである。一つの成功例として、二乗和 (Sum of squares, SOS) [10, 4] に着目する。この方法は多項式に関する不等式に全称記号をもつ条件を含む問題を解く方法と見なすことができる。全称記号を消去すれば、解くべき問題は半正定値計画 (Semidefinite Programming, SDP) [2] に帰着される。SOS は、SDP を解くことに大きく依存しているため、しばしば数値的な手法と見なされる。QE も SOS も実代数幾何を取り扱う計算ツールであるが、非線形最適化問題における解の厳密性など、SOS には QE がもつ性質が欠けている。

本論文では、多項式非線形システムに関する非線形ゲイン関数 [13, 8] の計算問題を考える。非線形ゲイン関数は、入力状態安定性 (Input-to-State Stability, ISS) と深い関係がある。あるシステムが ISS であれば、そのシステムには非線形ゲイン関数が存在する。多項式非線形システムが ISS であることは、SOS にもとづいて SDP を解くことで確認できる [7]。最適な線形ゲイン関数については、SDP を解くこと求めることができるが、非線形ゲイン関数を最適化することは難しい。実際、そのような関数は最適化を要求する複数のパラメータを含み、SDP で最適化することは難しい。

---

\*ichihara@messe.meiji.ac.jp

†anai@jp.fujitsu.com

工学的には、ゲイン関数は存在することがわかるだけでなく、最適化されることが望ましい。線形システムであれば、線形ゲイン関数の傾きに相当するシステムの  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムは、周波数応答における振幅のピーク値を表す [12]。  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムは  $\mathcal{L}_2$  ゲインともよばれ、入力信号の  $2$  ノルムに対する出力信号の  $2$  ノルムの大きさの比を上から抑えている。その見積りがタイトであるほど、システムの性能を正確に表すことになる。そのために最適化が必要となる。線形システムと見なせる機器や建造物に対する受動的あるいは能動的な振動制御系では、しばしば外乱入力から評価出力までのシステムの  $\mathcal{L}_2$  ゲインを制振性能とし、大地震などによる外乱の影響を評価することがある [11]。一方、非線形性が強いシステムでは、ゲインは入力大きさに対する非線形関数となる。その関数が最適化されるのであれば、さきに述べたような評価に対し、非線形ゲイン関数はシステムの性能評価になることが期待できる。そのためには、非線形でパラメトリックな関数を最適化する必要がある。SDP を用いる SOS アプローチは多項式非線形システムに対して、現実的な計算時間でゲイン関数の一つを与えることができる。しかし、その最小化は一般に難しい。もしゲイン関数の集合がすべて与えていければ、QE でゲイン関数の最小化ができる可能性がある。つまり、ゲイン関数に現れる各々の単項式の係数のすべての関係が与えられていければ、QE で最適なゲイン関数を探すことができる。また、計算時間が長いという QE の欠点を補うには、存在するゲイン関数の構造が事前にわかっていることが望ましい。そのような構造を探すために、SOS アプローチは適している。この点が SDP と QE を組み合わせるポイントとなる。

本論文の構成はつぎのとおりである。2 章では、非線形ゲイン解析について簡単に述べる。3 章では、SOS アプローチによる非線形ゲイン解析について述べる。4 章では、QE アプローチによりすべての非線形ゲイン関数を計算する方法を述べる。5 章では、二つのアプローチを組み合わせた計算手順を述べる。また、例を用いて最小ゲイン関数を計算する。最後に 6 章で、論文をまとめる。

論文を通して以下の記号を用いる。  $\|x\|$  は  $x \in \mathbb{R}^n$  のユークリッドノルムを表す。“ $\circ$ ” は二つの写像の合成を表す。例えば、  $\alpha_1 \circ \alpha_2(r) = \alpha_1(\alpha_2(r))$  となる。また、  $\alpha_1$  の逆写像を  $\alpha_1^{-1}$  と表す。すべての  $y (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$  に対して  $y^T Q y > 0$  ならば、対称行列  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は正定である。  $Q \succ 0$  と表すこともある。同様に、すべての  $y (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$  に対して  $y^T Q y \geq 0$  ならば、対称行列  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は半正定である。  $Q \succeq 0$  と表すこともある。

また、論文を通して、関数の各クラス  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\mathcal{KL}$  をつぎのように定義する。

**定義 1** [9] 連続関数  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が単調増加し  $\alpha(0) = 0$  を満たすならば、  $\alpha$  はクラス  $\mathcal{K}$  に属するという。さらに、  $r \rightarrow \infty$  において、  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  を満たすならば、  $\alpha$  はクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属するという。

**定義 2** [9] 連続関数  $\beta: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が各々の  $s$  に対して  $r$  に関する写像  $\beta(r, s)$  がクラス  $\mathcal{K}$  に属し、固定された  $r$  に対して  $s \rightarrow \infty$  において  $\beta(r, s)$  が減少し  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  を満たすならば、  $\beta$  はクラス  $\mathcal{KL}$  に属するという。

つぎの補題はクラス  $\mathcal{K}_\infty$  関数に関する性質を述べている。

**補題 1** [9] 関数  $\alpha$  および  $\beta$  は  $\mathcal{K}_\infty$  に属するとする。このとき、  $\alpha^{-1}$  は  $[0, \infty)$  で定義されクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属する。また、  $\alpha \circ \beta$  もクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属する。

## 2 非線形ゲイン解析

つぎの非線形システムについて考える。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

ここで,  $x \in \mathbb{R}^n$  は状態,  $w \in \mathbb{R}^p$  は入力,  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $f(0,0) = 0$  を満たす連続微分可能な関数とする. また,  $w(t)$  は区分連続で  $t \geq 0$  を満たす  $t$  上で有界と仮定する.

入力がないシステム  $\dot{x}(t) = f(x(t), 0)$  に対して, 大域的漸近安定 (Global Asymptotic Stability, GAS) には, その定義から二つの要素がある. 一つは, リアプノフ安定であること, もう一つは解軌道の吸引力である. とくに, 入力がゼロであることを強調する場合, 大域的漸近安定は 0-GAS とよばれる.

**定義 3** [13] システム (1) の任意の初期状態  $x(0)$  および任意の有界な入力  $w(t)$  に対し, 解  $x(t)$  が  $t \geq 0$  で存在して

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\sup_{\tau \in [0, t]} \|w(\tau)\|\right) \quad (2)$$

を満たす  $\beta \in \mathcal{KL}$  および  $\gamma \in \mathcal{K}$  が存在するとしよう. このとき, システム (1) は入力状態安定であり,  $\gamma$  は非線形ゲイン関数とよばれる.

**定義 4** [13] システム (1) について

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) \leq -\mu(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|w\|) \quad (4)$$

を満たす  $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mu \in \mathcal{K}$ ,  $\rho \in \mathcal{K}$ , 連続微分可能関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が存在するとしよう. このとき,  $V$  はシステム (1) の ISS リアプノフ関数とよばれる.

**補題 2** [13] システム (1) が入力安定であるための必要十分条件は, すべての  $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  について, (3) および

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) \leq \alpha_4(\|w\|) - \alpha_3(\|x\|) \quad (5)$$

が成り立つ連続微分可能関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\alpha_4 \in \mathcal{K}$  が存在することである. このとき, 非線形ゲイン関数は  $\gamma(r) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ k \alpha_4(r)$  と表される. ただし,  $k > 1$  とする.

**系 1** システム (1) が入力状態安定であるための十分条件は, すべての  $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  に対して, (5) を満たす連続微分可能かつクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属する関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  が存在することである. このとき, 非線形ゲイン関数は  $\gamma(r) = \alpha_3^{-1} \circ k \alpha_4(r)$  と表される. ただし,  $k > 1$  とする.

本論文では, 系 1 にもとづいて, 非線形ゲイン解析を行う. ゲイン関数の最小化をつぎのように定義する.

$$\underline{\gamma}(r) = \min_{\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty, \alpha_4 \in \mathcal{K}} \alpha_3^{-1} \circ \alpha_4(r) \text{ for each } r > 0 \text{ s.t. } (\forall x \forall w)[(5)] \quad (6)$$

このとき,  $r > 0$  において  $\gamma(r) > \underline{\gamma}(r)$  を満たすすべての関数は, 非線形ゲインである. とくに, 各々の  $r$  に対する  $\gamma$  の最小な関数を  $\underline{\gamma}$  と表し, 最小ゲイン関数とよぶ.

### 3 SOS アプローチ

システム (1) における  $f$  は多項式と仮定する. 系 1 の条件を数値的に可解なものに書き換えるためには,  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  がそれぞれクラス  $\mathcal{K}_\infty$  および  $\mathcal{K}$  に属することが要求される. ここで, 1 変数の偶多項式は非負の領域において単調増加するので, クラス  $\mathcal{K}$  に属することを要求しても, 実際はクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属することになる [7]. ゆえに, 系 1 の  $\alpha_4$  は, クラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属する. 以上にもとづいて, システム (1) の非線形ゲイン関数を与える数値計算による条件を述べる.

補題 3 システム (1) が入力状態安定であるための十分条件は、偶多項式  $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$  ( $i = 3, 4$ ), 多項式  $V(x) \in \mathcal{K}_\infty$ , 二乗和多項式  $s_0(x, w)$  が存在して、すべての  $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  に対して、

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) - \alpha_4(\|w\|) + \alpha_3(\|x\|) = -s_0(x, w) \quad (7)$$

を満たすことである。このとき、非線形ゲインは  $\gamma(r) = \alpha_3^{-1} \circ k \alpha_4(r)$  である。ただし、 $k > 1$  とする。

証明: (7) は、つぎの式に帰着される。

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) - \alpha_4(\|w\|) + \alpha_3(\|x\|) \leq 0$$

これは (5) であるので、系 1 が成り立ち、証明された。

補題 3 は、 $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  から成る非線形ゲインの可解な構造を探すのに都合がよい。多項式  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  の係数を少なくとも一組は求めることができるので、SDP を解くことで、そのゲイン構造が存在するかどうか判断することができる。SDP が可解であれば、その構造で非線形ゲイン関数が存在することになる。 $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  に関して、例えば、つぎのような構造を仮定することができる。

$$\alpha_3(r) = b_1 r^2 + b_2 r^4 + \cdots + b_s r^{2s}, \quad \alpha_4(r) = c_1 r^2 + c_2 r^4 + \cdots + c_t r^{2t} \quad (8)$$

ここで、 $b_i (i = 1, 2, \dots, s)$  および  $c_j (j = 1, 2, \dots, t)$  は非負の未知係数である。一般に、 $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  がクラス  $\mathcal{K}_\infty$  に属するためには、これらの係数が  $r \cdot d\alpha_3(r)/dr \geq 0$  および  $r \cdot d\alpha_4(r)/dr \geq 0$  を満たせばよい。また、そのような条件は、二乗和の条件になることが知られている [7]。一方で、 $\alpha_3(\|x\|)$  および  $\alpha_4(\|w\|)$  は多項式である必要があるため、 $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  は奇関数項をもつことはできない。

注意 1 補題 3 は、多項式関数の構造の存在を確認するために使うことができる。そのような構造は、QE アプローチでも有用であり、ゲイン関数  $\gamma(r)$  の最小化を行うことができる。工学的な観点から、最小ゲイン関数を求めることは重要である。

## 4 QE アプローチ

SOS アプローチでは、系 1 の条件 (5) を補題 3 の条件 (7) に帰着させ、数値的に解けるものにした。補題 3 を使えば、与えられた多項式関数族に対して、ゲイン関数が存在するかどうか確認できる。しかし一般に、ゲイン関数とその多項式関数族に対して存在しないことを SOS アプローチで言うことは難しい。実際、(5) および (7) の各条件の間にはギャップがある。

$V, f, \alpha_3, \alpha_4$  の代数的な構造が与えられるならば、条件 (5) は直接 QE を使って直接解くこともできる。つまり、この条件は、つぎの QE 問題と見なすことができる。

$$(\forall x \forall w) \left[ \frac{\partial V}{\partial x} f(x, w) - \alpha_4(\|w\|) + \alpha_3(\|x\|) \leq 0 \right]. \quad (9)$$

式 (9) に QE を施すことで、与えられた多項式関数族に対するゲイン関数の存在を厳密に確認することができる。さらに、実効可能解が存在すれば、QE は  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  (つまり  $\gamma$ ) に対するすべての実効可能解を与える。これによって、最小ゲイン関数を見つけることができる。

式 (8) を満たす関数  $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  について考えよう。 $\alpha_3, \alpha_4$  には、未知の係数  $b_i$  および  $c_j$  が含まれている。いま、もしこれらの関数による構造で、あるゲイン関数の存在がわかっているならば、QE の実行に失敗することなく、 $b_i$  および  $c_j$  の集合を得ることができる。 $\phi(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)$  を  $b_i$  および  $c_j$  に関する

半代数集合としよう。この集合のもとで、つぎの QE 問題を解くことで、 $r > 0$  に対する  $\alpha_4(r)$  のすべての値を得ることができる。

$$(\exists b_1 \cdots \exists b_s \exists c_1 \cdots \exists c_t) [\alpha_3(z) = \alpha_4(r) \wedge \phi(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)]. \quad (10)$$

この問題を解いた結果を  $r$  および  $z$  上の集合  $\psi(r, z)$  とする。さらに、 $z^* = z^*(r)$  を  $\psi(r, z)$  で与えられる可解な集合の境界上の多項式を  $z^* = z^*(r)$  とする。このとき、この多項式を  $\psi(r, z)$  上の bottom curve とよぶ。 $\gamma(r) = z^*$  は  $\psi(r, z)$  の bottom curve である。

**注意 2** 問題 (10) において、 $\alpha_3(z) = \alpha_4(r)$  は、 $z = \alpha_3^{-1} \circ \alpha_4(r)$  に書き換えることができる。ここで、 $z$  は最小化された関数である。 $\alpha_3$  の逆写像の陽な表現が一意でない場合、(10) を解くことは難しくなる。ただし、未知の  $\alpha_3$  が偶関数の単項式であれば、 $\alpha_3$  の逆写像の陽な表現がつねに存在する。この場合について、次章で例を示す。

**注意 3** QE アプローチは問題の解をその存在性も含めて厳密に求めることができるという意味で強力であるが、計算量が非常に多くなる [3]。ゆに、QE 問題 (9) および (10) では、QE の実行時に *false* となることは望ましくない。そのようになれば、関数  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  の構造を再び選び直す必要が生じる。すなわち、計算時間がさらに必要になる。一方で、QE 問題 (9) が解  $\phi(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)$  をもつならば、QE 問題 (10) はつねに実行可能集合  $\psi(r, z)$  をもつ。

## 5 SOS-QE アプローチ

この章では、非線形ゲイン関数を解析するための SOS-QE の組み合わせによる計算手順を提案する。また、その計算手順をあるシステムに適用した例を示す。提案する計算手順は、以下のとおりである。

**Step 1** リアプノフ関数の候補  $V \in \mathcal{K}_\infty$ 、偶多項式  $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  を選ぶ。ここで、 $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  は、それぞれ未知係数  $b_i (i = 1, 2, \dots, s)$  および  $c_j (j = 1, 2, \dots, t)$  をもつ。

**Step 2** SOS 問題 (7) を解く。実行可能解がなければ、Step 1 へ戻る。

**Step 3** QE 問題 (9) を解き、集合  $\phi(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)$  を得る。

**Step 4** QE 問題 (10) を解き、集合  $\psi(r, z)$  を得る。 $r (> 0)$  に対して  $z$  を最小にする bottom curve  $z^* = z^*(r)$  を取り出し、 $\gamma(r) = z^*$  とする。

**注意 4** QE を実行するときの計算の複雑さを減らすために、特定の問題の構造に関する情報は大切である。Step 2 で必要な計算時間は Step 3 よりも一般に少ないので、Step 2 を実行し問題の可解性を確かめておくことには大きな意味がある。

**注意 5**  $\alpha_3(r)$  が与えられている場合、固定された  $r$  に対する  $\alpha_4(r)$  の最小化については、SOS 問題 (7) の枠組みで扱うことができる。例えば、つぎのような SOS 最適化問題を考えればよい。

$$\begin{aligned} \min & \alpha_4(r)|_{r=1} \text{ s.t. } (\forall x \forall w) [(7)] \\ & c_1 \geq 0, \dots, c_t \geq 0 \\ & s_0 \text{ (is SOS)} \end{aligned} \quad (11)$$

しかしながら、この問題は本来の目的とは少し異なる。問題 (11) は、 $r = 1$  に対してのみ  $\alpha_4(r)$  を最小化しているに過ぎないので、本来の目的は  $r > 0$  の各々で  $\alpha_4(r)$  を最小化することであった。 $\alpha_3(r)$  および  $\alpha_4(r)$  がともに未知な場合、同様な最適化を SOS の枠組みで直ちに定式化することは難しい。

例を用いて提案する計算手順を試そう。ある多項式非線形システムを考える。

$$\dot{x} = -x^3 + (x^2 + 1)w. \quad (12)$$

準備したハードウェアは、Intel Core 2 CPU U7700 (1.33GHz) およびメモリ 2.00 GB を搭載する PC である。また、SOS 問題を解くために、MATLAB R200b, YALMIP(R20080415), SeDuMi(ver.1.21) を用いる。一方、QE 問題を解くために、Mathematica 6 を使う。

いま、提案する計算手順 Step 1 のために、リアプノフ関数の候補を  $V(x) = x^4/4 \in \mathcal{K}_\infty$  として、以下の二つの場合について計算する: 1)  $\alpha_3$  が与えられ  $\alpha_4$  が未知の場合, 2)  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  の両方が未知の場合。

## 5.1 Case 1

$\alpha_3(\|x\|)$  を  $x^6/8 \in \mathcal{K}_\infty$  としよう。Step 1 において、 $\alpha_4$  の構造を

$$\alpha_4(r) = c_1 r^2 + c_3 r^6$$

とする。ただし、 $c_1$  および  $c_3$  は未知な非負数である。このとき、Step 2 の SOS 問題はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} & \text{find } c_1 \geq 0, c_3 \geq 0 \text{ and } s_0 \text{ (is SOS),} \\ & \text{s.t. } (\forall x \forall w) [-x^3 [-x^3 + (x^2 + 1)w] + x^6/8 - (c_1 w^2 + c_3 w^6) = -s_0(x, w)] \end{aligned}$$

この SOS 問題は可解であり、計算時間は 4.1 [s] である。実行可能解の組は  $(c_1, c_3) = (2.8868, 2.8230)$ 、二乗和多項式  $s_0$  は式 (13) のようになった。

$$\begin{aligned} s_0(x, w) = & \begin{bmatrix} w^2 \\ xw \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1.3222 & -0.3395 \\ -0.3395 & 0.9187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^2 \\ xw \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} w \\ w^3 \\ xw^2 \\ x^2w \\ x^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2.8868 & -0.6611 & 0.3395 & -0.4593 & -0.5000 \\ -0.6611 & 2.8230 & 0.0000 & -0.8604 & 0.0536 \\ 0.3395 & 0.0000 & 1.7207 & -0.0536 & -0.7642 \\ -0.4593 & -0.8604 & -0.0536 & 1.5284 & -0.5000 \\ -0.5000 & 0.0536 & -0.7642 & -0.5000 & 0.8750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w^3 \\ xw^2 \\ x^2w \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、注意 5 について考え、提案する計算手順と比較しよう。SOS 最適化問題 (11) を解くことで、組  $(c_1, c_3)$  は最適化され  $(1.0828, 0.6041)$  となる。このとき、 $\alpha_4(1) = 1.6869$  である。このことについては、あとで触れる。

提案する計算手順に戻る。Step 3 において、 $w$  および  $w$  を

$$(\forall x \forall w) [-x^3 [-x^3 + (x^2 + 1)w] + x^6/8 - (c_1 w^2 + c_3 w^6) \leq 0],$$

から消去することで、実行可能解  $c_1$  および  $c_3$  のすべての集合をつぎのように得る。

$$\begin{aligned} \phi(c_1, c_3) = & \{c_1 > 2/7 \wedge c_3 \geq 1600000c_1^5 / (-23328 + 408240c_1 - 10001880c_1^2 \\ & - 2857680c_1^3 + -17503290c_1^4 + 12252303c_1^5)\} \end{aligned}$$

計算時間は 819.7 [s] であった。集合  $\phi(c_1, c_3)$  を図 1 に示す。Step 1 の実行可能解の組  $(c_1, c_3)$  と注意 5 の最適解の組  $(c_1, c_3)$  が両方とも  $\phi(c_1, c_3)$  に含まれていることがわかる。

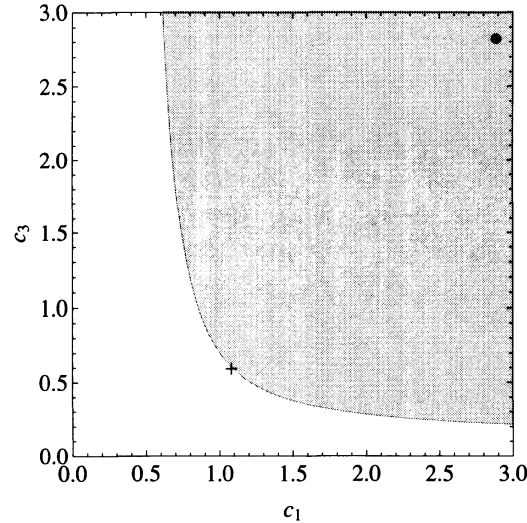


図 1: Set  $\phi(c_1, c_3)$ : “•” represents  $(c_1, c_3) = (2.8868, 2.8230)$ , and “+” represents  $(c_1, c_3) = (1.08278, 0.604133)$ .

$\phi(c_1, c_3)$  に基づいて, Step 4 の QE 問題

$$(\exists c_1 \exists c_3) [z^6/8 = c_1 r^2 + c_3 r^6 \wedge \phi(c_1, c_3)],$$

を解き, 実行可能集合  $\psi(r, z)$  を得る. ここで,

$$\psi(r, z) = \{r > 0 \wedge \theta(r, z) \leq 0\}$$

である. ただし,

$$\begin{aligned} \theta(r, z) = & -146313216r^6 - 28311552r^8 + (192036096r^4 + 38707200r^6)z^6 \\ & + (-84015792r^2 - 84672000r^4 - 12800000r^6)z^{12} + 12252303z^{18}. \end{aligned}$$

とする. 計算時間は, 6.2 [s] であった. 集合  $\psi(r, z)$  を図 2 に示す.  $z$  は  $z^* = z^*(r)$  のことで, 最小の曲線を表す. ただし,  $z^*(r)$  の陽な表現については, 付録を参照せよ. 最小ゲイン関数を図 3 に示す. 図には, Step 1 や注意 5 によるゲイン関数も示した. すべての曲線は原点付近で強い非線形性をもつが, 入力信号が大きくなるにつれ, 線形関数に漸近していく. 図より明らかなように, 提案する計算手順によるゲイン関数が最も小さい.

**注意 6** 注意 5 のゲイン関数は, 最小ゲイン関数と  $r = 1$  で一致しており,  $\gamma(1) = \alpha_3^{-1}(\alpha_4(1)) = 1.5430$  である. なぜならば, 問題 (11) は  $r = 1$  のみでゲインを最小化しているからである. 提案する計算手順による非線形ゲイン関数  $\gamma(r)$  はすべての  $r (> 0)$  で最小化されているのに対して, 注意 5 による SOS 最適化では, 固定された  $r$  に対してのみ最小のゲイン値を与える. 一般に, 有限個の SOS 問題を解くだけでは, 最小ゲイン関数を求めることはできない.

## 5.2 Case 2

Step 1 において,  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  の構造を

$$\alpha_3(r) = b_3 r^6, \quad \alpha_4(r) = r^2 + c_3 r^6$$

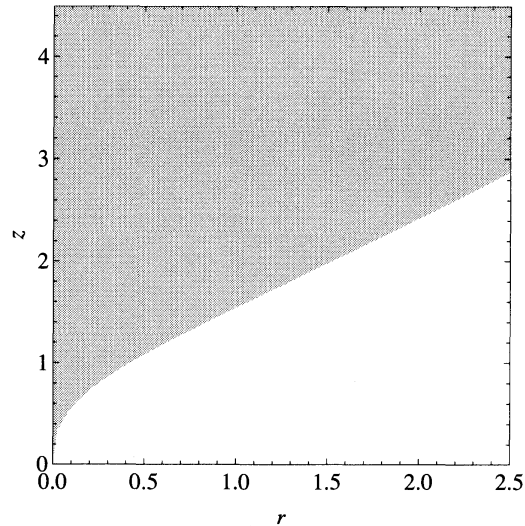


図 2: Set defined by  $\psi(r, z)$

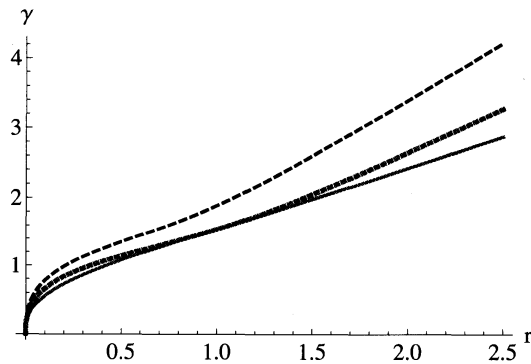


図 3: Nonlinear gain functions: The solid curve represents the minimum function; the dashed curve, the feasible one at Step 2; and the dotted curve, the optimized one by SOS.

のように選ぶ. ここで,  $b_3$  および  $c_3$  は非負数である. このとき, Step 2 の SOS 問題は, つぎのように書ける.

$$\begin{aligned} & \text{find } b_3 \geq 0, c_3 \geq 0 \text{ and } s_0 \text{ (is SOS),} \\ & \text{s.t. } (\forall x \forall w) [-x^3 [-x^3 + (x^2 + 1)w] + b_3 x^6 - (w^2 + c_3 w^6) = -s_0(x, w)] \end{aligned}$$

この SOS 問題は可解であり, 計算時間は 3.6 [s] であった. 一つの実行可能解の組は,  $(b_3, c_3) = (0.0866, 1.7859)$  と求まる. Step 3 において, QE 問題

$$(\forall x \forall w) [-x^3 [-x^3 + (x^2 + 1)w] + b_3 x^6 - (w^2 + c_3 w^6) \leq 0]$$

を解き,  $b_3$  および  $c_3$  に関する実行可能集合をつぎのように得る.

$$\phi(b_3, c_3) = \{0 \leq b_3 < 3/4 \wedge c_3 \geq -50000 / (-177147 + 1180980b_3 - 3149280b_3^2 + 4199040b_3^3 - 2799360b_3^4 + 746496b_3^5)\}.$$



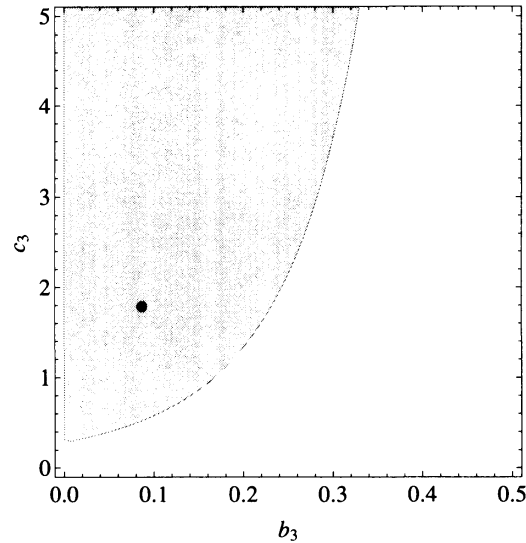


図 4: Set defined by  $\phi(b_3, c_3)$ : “•” represents  $(b_3, c_3) = (0.0866, 1.7859)$

このときの計算時間は、5.3 [s] であった。  $\phi(b_3, c_3)$  で与えられる集合を図 4 に示す。さらに、Step 4 では QE 問題

$$(\exists b_3 \exists c_3) [b_3 z^6 = r^2 + c_3 r^6 \wedge \phi(b_3, c_3)]$$

を解き、実行可能集合

$$\psi(r, z) = \left\{ z > 0 \wedge 2r \leq -z^5 + (3z^6 + z^{10})^{\frac{1}{2}} \right\}$$

を得る。計算時間は、10.6 [s] であった。  $\psi(r, z)$  で与えられる集合を図 5 に示す。図において最小な曲線が  $z^* = z^*(r)$  で、  $\gamma(r) = z^*(r)$  である。この場合、  $z^*$  についての陽な表現を得ることはできない。得られた最小ゲイン関数および Spte 2 における SOS 問題の解によるゲイン関数を図 6 に示す。最小ゲイン関数は、タイトな関数を与えていることがわかる。

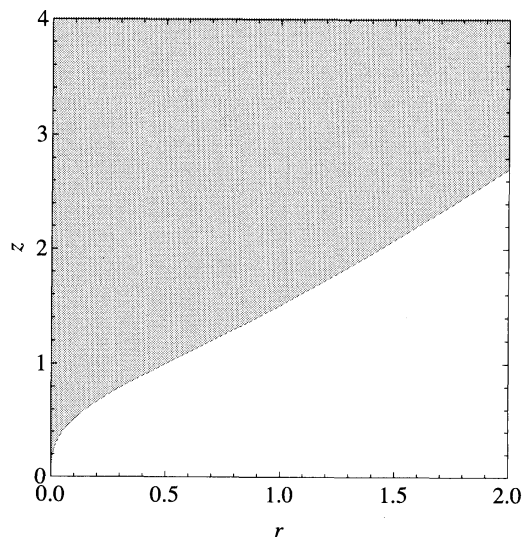
## 6 おわりに

本論文では、非線形多項式システムの非線形ゲイン関数を計算するための手順を SOS にもとづく SDP と QE を使って与えた。SOS アプローチはゲイン関数の一つの構造を与え、QE アプローチはそのゲイン関数の構造をもつすべての可能なゲイン関数を与え最小化できる。ただしこの方法は、SOS アプローチで少なくとも一つのゲイン関数を求めることができなければ適用できない。

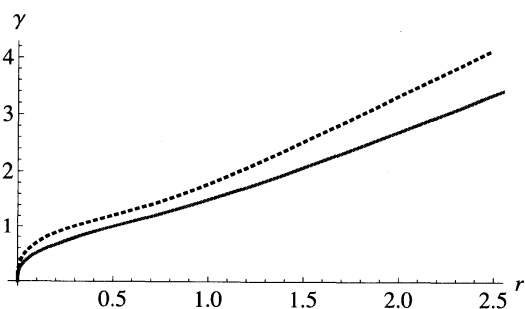
今後の課題としては、この方法で得られる最小ゲイン関数が構造制約がない場合のすべてのゲイン関数に対して、どの程度小さく見積もることができるかなどが挙げられる。

## 参考文献

- [1] H. Anai. A symbolic-numeric approach to multi-parametric programming for control design. In *Proc. ICROS-SICE International Conference*, pages 3525–3530, 2009.



⊠ 5: Set defined by  $\psi(r, z)$



⊠ 6: Nonlinear gain functions: The solid curve represents the minimum function; the dashed curve, the feasible one at Step 2.

- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [3] B. F. Caviness and J. R. Johnson, editors. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. Texts and monographs in symbolic computation. Springer-Verlag, 1998.
- [4] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Solving quadratic distance problems: an LMI-based approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(2):200–212, 2003.
- [5] P. Dorato, W. Yang, and C. Abdallah. Robust multi-objective feedback design by quantifier elimination. *J. Symb. Comput.*, 24(2):153–159, 1997.
- [6] N. Hyodo, M. Hong, H. Yanami, S. Hara, and H. Anai. Solving and visualizing nonlinear parametric constraints in control based on quantifier elimination. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.*, 18(6):497–512, 2007.
- [7] H. Ichihara. Computational approach to input-to-state stability analysis of a class of nonlinear systems. In *Proc. ICROS-SICE International Conference*, pages 3914–3918, 2009.

- [8] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. Springer, 1999.
- [9] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems, 3rd edition*. Prentice Hall, 2001.
- [10] P. A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, may 2000.
- [11] A. Preumont. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction, Third Edition*. Springer, 2011.
- [12] L. Qiu and K. Zhou. *Introduction to Feedback Control*. Prentice Hall, 2009.
- [13] E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(4):351–359, 1995.
- [14] H. Yanami. *Quantifier Elimination and Its Application to Optimization Problems in Engineering*. PhD thesis, Kyushu University, 2010.
- [15] H. Yanami and H. Anai. The maple package SyNRAC and its application to robust control design. *Future Generation Comp. Syst.*, 23(5):721–726, 2007.
- [16] 穴井宏和, 横山和弘. *QEの計算アルゴリズムとその応用—数式処理による最適化*. 東京大学出版会, 2011.