数理解析研究所講究録
第 1786 巻 2012 年 32-44

Positive entire solutions of higher order semilinear elliptic equations

尾道大学・経済情報学部 寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)
Faculty of Economics, Management & Information Science,
Onomichi University

1. 序

次の高階半線形楕円型方程式の正値全域解の存在・非存在について考える:

$$\sigma\Delta^{m}u=p(|x|)u^{\alpha}, \quad x\in \mathbf{R}^{N}, \tag{1}$$

ここで, $\sigma=+1$ または $\sigma=-1$, $m\geq 2$, $N\geq 3$, $\alpha>1$ は定数. $p(r)>0$, $r=|x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

u が (1) の全域解であるとは, $u\in C^{2m}(\boldsymbol{R}^{N})$ で $\boldsymbol{R}^{N}$ で (1) を満たすときをいう. また解として球対称なものを考える.

高階楕円型方程式 (1) の正値全域解については文献 [1, 2] 等多くの研究結果がある. 一般に, 高階の微分方程式は 1 階または 2 階の微分方程式系に変形できることが知られている. 本研究では高階楕円型方程式 (1) を 2 階楕円型方程式系に変形して正値全域解の存在・非存在について考える.

2. 高階方程式の 2 階方程式系への変形

この節では, 高階楕円型方程式 (1) を 2 階楕円型方程式系に変形することを考える.

$$u_{1}=\tau_{1}u,\ u_{2}=\tau_{2}\Delta u,\ u_{3}=\tau_{3}\Delta^{2}u, \cdots, u_{m}=\tau_{m}\Delta^{m-1}u$$

とおく, ここで τ_{i} は $+1$ または -1 である. この置き方により高階楕円型方程式 (1) は形式的に次の 2 階楕円型方程式系に変形される：

$$\left\{\begin{array}{rl}
\sigma_{1}\Delta u_{1}= & u_{2},\\
\sigma_{2}\Delta u_{2}= & u_{3},\\
 & \vdots\\
\sigma_{m-1}\Delta u_{m-1}= & u_{m},\\
\sigma_{m}\Delta u_{m}= & p(|x|)u_{1}^{\alpha}.
\end{array}\right. \tag{2}$$

ここで, $\sigma_{i}=+1$ または $\sigma_{i}=-1$. $\sigma=+1$ のとき $\sigma_{i}=-1$ の数は偶数, $\sigma=-1$ のとき, $\sigma_{i}=-1$ の数は奇数である.

本研究では正値全域解を考えているので, 方程式系 (2) で

$$-\Delta u_i = u_{i+1}, \quad \Delta u_{i+1} = u_{i+2}$$

となる $i \in \{1, 2, \cdots, m-2\}$ が存在するか, または

$$-\Delta u_{m-1} = u_m, \ \Delta u_m = p(|x|)u_1^\alpha$$

となる場合, 方程式系 (2) の正値全域解が存在しないことがわかる.

証明. $i = 1$ の場合を示す (他の場合も同様). (2) で

$$-\Delta u_1 = u_2, \ \Delta u_2 = u_3$$

となっているとする. $(u_1, \cdots, u_m)$ を (2) の正値全域解とする. $\Delta u_2 = u_3$ を 2 回積分して

$$\begin{aligned} u_2(r) = & \ u_2(0) + \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_3(t) dt ds \\ \geq & \ u_2(0) > 0. \end{aligned}$$

同様に $-\Delta u_1 = u_2$ を 2 回積分して

$$u_1(r) = u_1(0) - \int_0^r s^{1-N} \int_0^t t^{N-1} u_2(t) dt ds$$

となる. ここで $u_2(r) \geq u_2(0)$ より

$$\begin{aligned} \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_2(t) dt ds \geq & \ u_2(0) \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} dt ds \\ = & \ \frac{u_2(0)}{2N} r^2 \to \infty (r \to \infty). \end{aligned}$$

よって $u_1(r) \to -\infty$ となるから u_1 が正値全域解であることに矛盾する.

以上より, (2) で正値全域解を考える場合, 次の形の方程式系を考えればよいことになる:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = & u_2, \\ & \vdots \\ \Delta u_j = & u_{j+1}, \\ -\Delta u_{j+1} = & u_{j+2}, \\ & \vdots \\ -\Delta u_m = & p(|x|) u_1^\alpha. \end{cases}$$

次に高階方程式 (1) の正値全域解がどのような方程式系を満たすかを考える.

u を (1) の正値全域解とする. このとき次を満たす $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$, $r_* \geq 0$ が存在する (文献 [1](Theorem 2.1) 参照):

$$(1)_j \qquad \begin{cases} (\Delta^i u)(r) > 0, \quad r \geq r_*, \quad i = 1, 2, \cdots, j-1, \\ (-1)^{i-j} (\Delta^i u)(r) \geq 0, \quad r \geq 0, \quad i = j, j+1, \cdots, m. \end{cases}$$

注意 1. $\Delta^i u$ は増加または減少である.

方程式 (1) の正値全域解の全体を $\mathcal{K}$, (1) の正値全域解で $(1)_j$ を満たすものの全体を $\mathcal{K}_j$ とする：

$$\mathcal{K} = \{u \in C^{2m}[0,\infty); u \text{ は } (1) \text{ の正値全域解}\},$$
$$\mathcal{K}_j = \{u \in \mathcal{K}; u \text{ は } (1)_j \text{を満たす}\}.$$

この $\mathcal{K}_j$ は j 次の Kiguradze クラスとよばれている.

m が偶数か奇数か, σ が $+1$ か -1 かにより $\mathcal{K}$ は次のように分類される：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_m, && m \text{ は奇数}, \ \sigma = +1,\\
&\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{m-1}, && m \text{ は奇数}, \ \sigma = -1,\\
&\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_m, && m \text{ は偶数}, \ \sigma = +1,\\
&\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{m-1}, && m \text{ は偶数}, \ \sigma = -1.
\end{aligned}$$

u を (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解とする. このとき

$$\begin{cases} u_i = \Delta^{i-1}u, & i = 1, 2, \cdots, j,\\ u_i = (-1)^{i-j+1}\Delta^{i-1}u, & i = j+1, \cdots, m, \end{cases}$$

とおくと $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ は次の方程式系を満たす：

$$(3)_j \qquad \begin{cases} \Delta u_1 = & u_2,\\ & \vdots\\ \Delta u_j = & u_{j+1},\\ -\Delta u_{j+1} = & u_{j+2},\\ & \vdots\\ -\Delta u_m = & p(|x|)u_1^{\alpha}. \end{cases}$$

よって $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解を考える場合, 方程式系 $(3)_j$ を考えればよい.

3. 2階楕円型方程式系

前節では, 高階楕円型方程式 (1) を2階楕円型方程式系 $(3)_j$ に変形した. この節では方程式系 $(3)_j$ ではなく, $(3)_j$ の一般的な形の方程式系の正値全域解の存在・非存在について考える.

次の2階楕円型方程式系について考える：

$$\text{(S)} \qquad \sigma_i \Delta u_i = P_i(|x|)u_{i+1}^{\alpha_i}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで, $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$, $\alpha_i > 0$ は定数で $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m > 1$ を満たすとする. 係数関数 $P_i(r) > 0$, $r = |x|$ は $[0,\infty)$ で連続とする.

A, ξ_i を次のように定義する：

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m,$$
$$\xi_i = \begin{cases} 0 & (\sigma_i = +1 \text{ のとき}), \\ 1 & (\sigma_i = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ に対し Λ_i を

$$\Lambda_i = \lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k}$$

で定義する. 方程式系 (S) の正値全域解の存在•非存在については次の Theorem, Conjecture がある：

Theorem A. P_i は

$$P_i(r) \geq \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たすとする, ここで, $C_i > 0$, λ_i は定数. このとき

$$\Lambda_i + (A-1)(N-2)\xi_i \leq 0$$

を満たす $i \in \{1, 2 \cdots, m\}$ が存在するか, または $\sigma_i = -1$ となる i に対し

$$\lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{\ell-1} (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k} + \xi_{i+\ell}(N-2) \prod_{k=0}^{\ell-1} \alpha_{i+k} \leq 0$$

を満たす $\ell \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ が存在すれば (S) の正値全域解は存在しない.

注意 2. Theorem A の結論「正値全域解は存在しない」を「終局的に増加する, または減少する正値解は存在しない」に変更しても成立する.

Theorem B. 少なくとも 1 つの σ_i は $+1$ とする. P_i は

$$P_i(r) \leq \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \geq r_0 > 0 \tag{3}$$

を満たすとする, ここで, $C_i > 0$, λ_i は定数. このとき

$$\sigma_i \Lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$
$$\Lambda_i + (A-1)(N-2)\xi_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

ならば (S) の正値全域解が存在する.

Conjecture. 少なくとも 1 つの σ_i は $+1$ とする. P_i は (3) を満たすとする.

$$\Lambda_i + (A-1)(N-2)\xi_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

かつ $\sigma_i = -1$ となる i に対し

$$\lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{\ell-1}(\lambda_{i+j} - 2)\prod_{k=0}^{j-1}\alpha_{i+k} + \xi_{i+\ell}(N-2)\prod_{k=0}^{\ell-1}\alpha_{i+k} > 0,\ \ell = 1, 2, \cdots, m-1,$$

ならば (S) の正値全域解が存在する.

4. 主結果

この節では, 前節の 2 階楕円型方程式系に対する結果を方程式系 $(3)_j$ に適用して, 高階方程式 (1) の正値全域解の存在・非存在について考える.

最初に, Theorem A, Theorem B, Conjecture を形式的に方程式系 $(3)_j$ に適用してみる. p は

$$\frac{C_1}{r^\lambda} \le p(r) \le \frac{C_2}{r^\lambda}, \quad r \ge r_0 \ge 0$$

を満たすとする. 今

$$\alpha_1 = \alpha_{m-1} = 1, \alpha_m = \alpha,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_{m-1} = 0,\ \lambda_m = \lambda$$

より Λ_i は簡単に計算できて,

$$\Lambda_i = \lambda - 2\alpha(i-1) - 2(m-i+1), \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

となる. よって Theorem A より $N \le 2(m-j)$ または

$$\lambda \le 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda \le 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解は存在しない.

Theorem B より

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) < \lambda < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 < \lambda < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解が存在する.

Conjecture より $N > 2(m-j)$ かつ

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解が存在する.

次に方程式系 $(3)_j$ に Theorem A をそのまま適用できるかどうか考えてみる.
$(3)_j$ と (S) では次のような違いがある：

$$\begin{array}{ll} \text{(S)}: & u_i > 0, \quad r \ge 0, \\ (3)_j: & u_i > 0, \quad r \ge r_* \ge 0, \end{array} \qquad i = 2, \cdots, j,$$

すなわち, 方程式系 $(3)_j$ では $u_2, \cdots, u_j$ が全域で正値でない可能性がある.

注意 1 から $\Delta^i u$, $i = 1, 2, \cdots, j$, は増加である. よって $u_2, \cdots, u_j$ は終局的には増加な正値解となる. よって 注意 2 から「終局的に増加な正値解は存在しない」として Theorem A を適用できる.

次に Conjecture について考える. 方程式系 (S) に対してはまだ Conjecture のままであるが, 方程式系 $(3)_j$ に対しては正しいことがわかった.

証明の概略. $\lambda \ge 2\alpha j + 2(m-j)$ の場合を考えればよい. $\tilde{\lambda} < \lambda$ に対して

$$p(r) \le \frac{C}{r^{\lambda}} \le \frac{C}{r^{\tilde{\lambda}}}, \quad r \ge r_0 \ge 1$$

が成立するので,

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) < \tilde{\lambda} < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 < \tilde{\lambda} < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

を満たすような $\tilde{\lambda}$ が存在することを示せばよい. 一方, このような $\tilde{\lambda}$ は必ず存在する. したがって Theorem B から正値全域解の存在が示される.

以上より高階楕円型方程式 (1) の正値全域解の存在・非存在について次の定理が得られた.

Theorem 1. p は

$$p(r) \ge \frac{C}{r^{\lambda}}, \quad r \ge r_0$$

を満たすとする, ここで, $C > 0$, λ は定数.

(i) $N \le 2(m-j)$ または λ が

$$\lambda \le 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda \le 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_j$ クラス $(1 \le j \le m)$ の正値全域解は存在しない.

(ii) $N \le 2m$ または λ が

$$\lambda \le 2\alpha(m-1) + 2 - (\alpha-1)(N-2)$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_0$ クラスの正値全域解は存在しない.

Theorem 2. p は

$$p(r) \le \frac{C}{r^\lambda}, \quad r \ge r_0$$

を満たすとする, ここで, $C > 0$, λ は定数. このとき, $N \ge 2(m-j)+1$ かつ λ が

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \ \ (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \ \ (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_j$ クラス $(1 \le j \le m)$ の正値全域解が存在する.

Example. 次の高階楕円型方程式を考える：

$$\sigma \Delta^m u = \frac{1}{(1+|x|)^\lambda} u^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}^N \tag{4}$$

を考える, ここで, $m \ge 2$, $N \ge 2m+1$, $\alpha > 1$, $\sigma = -1$ または $\sigma = +1$. Theorems 1,2 より次のことがわかる：

(i) $\{m$ は奇数, $\sigma = +1\}$, $\{m$ は偶数, $\sigma = -1\}$ のとき：

$$\lambda > 2m \implies \text{(4) の正値全域解が存在する.}$$
$$\lambda \le 2m \implies \text{(4) の正値全域解は存在しない.}$$

(ii) $\{m$ は奇数, $\sigma = -1\}$, $\{m$ は偶数, $\sigma = +1\}$ のとき：

$$\lambda \le 2\alpha(m-1) + 2 - (\alpha-1)(N-2) = N - \alpha(N-2m)$$
$$\implies \text{(4) の正値全域解は存在しない.}$$
$$\lambda > 2\alpha + 2(m-1) \implies \text{(4) の正値全域解が存在する.}$$

以上のことから, $N \ge 2m+1$ の場合, $\{m$ は奇数, $\sigma = +1\}$, $\{m$ は偶数, $\sigma = -1\}$ のとき, $\lambda = 2m$ が (4) の正値全域解の存在・非存在の境目になっていることがわかる. 一方, $\{m$ は奇数, $\sigma = -1\}$, $\{m$ は偶数, $\sigma = +1\}$ のとき, (4) の正値全域解の存在・非存在の境目はわからない ($\mathcal{K}_0$ クラスの解を除けば境目は $\lambda = 2\alpha + 2(m-1)$).

上記の例では簡単のため $N \ge 2m+1$ としたが, Theorems 1,2 より (4) の $\mathcal{K}_j$ クラス $(1 \le j \le m)$ の正値全域解の存在・非存在の境目は

$$\lambda = 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \ \ (N \ge 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda = 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \ \ (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

である.

5. 正値全域解の挙動

前節までは方程式 (1) の正値全域解の存在・非存在のみを考えたが, この節では (1) の正値全域解の挙動について考えてみる. なお, この節では (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解 u と方程式系 $(3)_j$ の正値全域解は同じものとみなすことにする.

方程式系 $(3)_j$ の正値全域解については次の Proposition が成立する.

Proposition. $(u_1, \cdots, u_m)$ を $(3)_j$ の正値全域解とする. このとき次のことが成立する.
(i) $N \geq 2(m-j)+3$ のとき:

$$u_i(r) \geq \begin{cases} Cr^{2(j-i)}, & i = 1, 2, \cdots, j, \\ Cr^{2(m-i+1)-N}, & i = j+1, \cdots, m. \end{cases}$$

(ii) $N = 2(m-j)+2$ のとき:

$$u_i(r) \geq \begin{cases} Cr^{2(j-i)} \log r, & i = 1, 2, \cdots, j, \\ Cr^{2(j-i)}, & i = j+1, \cdots, m. \end{cases}$$

(iii) $N = 2(m-j)+1$ のとき:

$$u_i(r) \geq Cr^{2(j-i)+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

<u>**証明の概略.**</u> 方程式系 $(3)_j$ の正値全域解に対して次のことが成立する.

$$(5) \qquad \begin{cases} u_i(r) \geq C_i \displaystyle\int^{r/2} s u_{i+1}(s) ds, & i = 1, 2, \cdots, j, \\ u_i(r) \geq C_i r^{2-N} \displaystyle\int^{r/2} s^{N-1} u_{i+1}(s) ds, & i = j+1, \cdots, m-1. \end{cases}$$

u_m は $\Delta u_m \leq 0$ を満たすから

$$u_m(r) \geq Cr^{2-N}$$

が成立する. この式を (5) に代入して順々に計算すると Proposition の結論が得られる.

注意 3. $N \leq 2(m-j)$ の場合, $u_i(r) \to -\infty$ $(r \to \infty)$ となる $i \in \{j+1, \cdots, m-1\}$ が存在する. これは u_i が正値全域解であることに矛盾する. よって $(3)_j$($\mathcal{K}_j$ クラス) の正値全域解を考える場合, 空間次元 N は $N \geq 2(m-j)+1$ でなければならない.

次に $N \geq 2(m-j)+3$ として, $u_1(r)/r^2$ の $r \to \infty$ のときの極限を考える. Proposition とロピタルの法則より

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{u_1(r)}{r^{2j}} &= \lim_{r\to\infty} \frac{u_1'(r)}{2jr^{2j-1}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r s^{N-1} u_2(s) ds}{2jr^{N+2(j-1)}} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{r^{N-1} u_2(r)}{2j(N+2(j-1))r^{N+2j-3}} = C \lim_{r\to\infty} \frac{u_2(r)}{r^{2(j-1)}}, \end{aligned}$$

ここで, $C>0$ は定数. 以下同様なことを繰り返して

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_1}{r^{2j}}=C\lim_{r\to\infty}\frac{u_2(r)}{r^{2(j-1)}}=\cdots=C\lim_{r\to\infty}\frac{u_j(r)}{r^2}$$

となる. $u_j(r)$ は正値で増加だから, 正定数に収束するか $+\infty$ に発散するかのどちらかである. $u_j(r)$ が定数に収束する場合は $u_j(r)/r^2$ は 0 に収束する. $u_j(r)$ が $+\infty$ に発散する場合はロピタルの法則より, $u_{j+1}(r)$ の極限に一致する. $u_{j+1}(r)$ は正値で減少するから, 正定数か 0 に収束する. よって最終的に $u_1(r)/r^{2j}$ の $r\to\infty$ のときの極限は

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_1(r)}{r^{2j}}=\begin{cases}\text{const}>0 & \text{または}\\ 0\end{cases}$$

となる. 同様にして $N=2(m-j)+2,\ N=2(m-j)+1$ の場合や, $u_1(r)/r^{2(j-1)}$ の極限に関して次のことがわかる：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_1(r)}{r^{2(j-1)}}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{r\to\infty}u_j(r)=\begin{cases}\text{const}>0,\\ +\infty,\end{cases} & N\geq 2(m-j)+3,\\[2em] +\infty, \qquad N=2(m-j)+1,\ N=2(m-j)+2.\end{cases}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_1(r)}{r^{2j}}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{u_j(r)}{r^2}=\begin{cases}0,\\ \displaystyle\lim_{r\to\infty}u_{j+1}(r),\end{cases} & N\geq 2(m-j)+3,\\[2em] \displaystyle\lim_{r\to\infty}u_{j+1}(r)=\begin{cases}\text{const}>0,\\ 0,\end{cases} & N=2(m-j)+1, N=2(m-j)+2.\end{cases}$$

以上より u が (1) の K_j クラスの正値全域解ならば次の 3 つのうちのどれか 1 つが起こる：

$$\begin{aligned}&\text{(i)} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{r^{2(j-1)}}=\text{const}>0,\\ &\text{(ii)} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{r^{2(j-1)}}=+\infty,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{r^{2j}}=0,\\ &\text{(iii)} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{r^{2j}}=\text{const}>0.\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_j$ クラスに属する正値全域解で上の (i),(ii),(iii) を満たすものの全体をそれぞれ,

$$\mathcal{K}_j[\text{min}],\ \mathcal{K}_j[\text{int}],\ \mathcal{K}_j[\text{max}]$$

とする：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_j[\text{min}]&=\{u\in\mathcal{K}_j; u\text{ は (i) を満たす.}\},\\ \mathcal{K}_j[\text{int}]&=\{u\in\mathcal{K}_j; u\text{ は (ii) を満たす.}\},\\ \mathcal{K}_j[\text{max}]&=\{u\in\mathcal{K}_j; u\text{ は (iii) を満たす.}\}.\end{aligned}$$

これにより, $\mathcal{K}_j$ は次のようにわけられる：

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{K}_j[\min] \cup \mathcal{K}_j[\mathrm{int}] \cup \mathcal{K}_j[\max].$$

注意 4. Proposition より $N = 2(m-j)+2,\ N = 2(m-j)+1$ のとき

$$\lim_{r\to\infty} \frac{u_1(r)}{r^{2(j-1)}} = \infty$$

である. よってこの2つの次元の場合 $\mathcal{K}_j[\min] = \phi$(空集合) である.

文献 [1](Kusano-Naito) では方程式 (1) よりも一般的な形で $\mathcal{K}_j[\min]$, $\mathcal{K}_j[\mathrm{int}]$, $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解についての研究がなされている. ここでは文献 [1] の結果を (1) に適用する. その結果を簡単にまとめると次のようになる.

$1 \le j \le m-1$ とする.

(i) (1) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \ge 2(m-j)+1,\ \int_0^\infty t^{2(m-j)-1+2\alpha j} p(t)dt < \infty.$$

(ii) (1) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \ge 2(m-j)+3,\ \int_0^\infty t^{2(m-j)+1+2\alpha(j-1)} p(t)dt < \infty.$$

(iii) $N \ge 2(m-j)+3$ とする. (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$\int_0^\infty t^{2(m-j)+1+2\alpha(j-1)} p(t)dt < \infty.$$

これらの結果を §4 の Example に適用してみる.

Example. 次の高階楕円型方程式を考える:

$$\sigma \Delta^m u = \frac{1}{(1+|x|)^\lambda} u^\alpha. \tag{4}$$

(i) (4) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \ge 2(m-j)+1,\ \lambda > 2\alpha j + 2(m-j).$$

(ii) (4) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \ge 2(m-j)+3,\ \lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1).$$

(iii) $N \geq 2(m-j)+3$ とする. (4) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$\lambda > 2\alpha(j-1)+2(m-j+1).$$

この結果では, 空間次元 N が, $N=2(m-j)+2$, $N=2(m-j)+1$ で λ が

$$\lambda \leq 2\alpha j + 2(m-j)$$

を満たすとき, (4) の正値全域解が存在・非存在はわからない. 一方, Theorems 1,2 からは

$$\lambda \leq 2\alpha(j-1)+2(m-j)+1 \quad (N=2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$\lambda \leq 2\alpha(j-1)+2(m-j+1)+\alpha-1 \quad (N=2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

のとき正値全域解は存在しない. また

$$2\alpha(j-1)+2(m-j)+1 < \lambda \leq 2\alpha j+2(m-j) \quad (N=2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$
$$2\alpha(j-1)+2(m-j+1)+\alpha-1 < \lambda \leq 2\alpha j+2(m-j) \quad (N=2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

のとき正値全域解が存在することがわかる.

Theorem 2 から (4) の正値全域解の存在はわかったが, その正値全域解はどのクラスに属する解だろうか？. 注意 4 からこの 2 つの次元の場合 $\mathcal{K}_j[\mathrm{int}]$ クラスか $\mathcal{K}_j[\mathrm{max}]$ クラスになることがわかる. また, 2 階楕円型方程式系 (S) の結果から $u_1(r)$ は

$$u_1(r) \leq Cr^{\frac{\lambda-2m}{\alpha-1}}$$

を満たすことがわかっている. よって

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{r^{2j}}=0$$

が成立する. すなわち $\mathcal{K}_j[\mathrm{int}]$ クラスの解となる.

注意 5. 今の議論で得られた正値全域解は, Theorem B を適用して得られた $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解である. Theorem B を適用して得られる正値全域解は

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_1(r)}{r^{2j}}=0$$

を満たすので, $\mathcal{K}_j[\mathrm{int}]$ クラスか $\mathcal{K}_j[\mathrm{min}]$ クラスの解となる.

$\mathcal{K}_j[\mathrm{min}]$, $\mathcal{K}_j[\mathrm{max}]$ クラスの正値全域解について次の定理が得られた:

Theorem 3. p は

(6) $$p(r) \leq \frac{C}{r^{\lambda}}$$

を満たすとする, ここで $C>0$, λ は定数.

(i) λ が

$$\lambda > 2\alpha j + 2(m-j)$$

を満たすならば (1) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスのの正値全域解が存在する.

(ii) λ が

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1)$$

を満たすならば (1) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラス の正値全域解が存在する.

証明の概略. 方程式系 $(3)_j$ の正値全域解を示せばよい. 証明には不動点定理を用いる.

(i) 集合 X と写像 $\mathcal{T}: X \to (C[0,\infty))^m$ を次のように定義する:

$$X = \{(u_1, \cdots, u_m);\quad u_i\text{は以下を満たす.}\}:$$

$$\begin{aligned}
&C_i \le u_i(r) \le \tilde{C}_i r^{2(j+i-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, j-1,\\
&C_j r^2 \le u_j(r) \le \tilde{C}_j r^2,\\
&C_{j+1} \le u_{j+1}(r) \le \tilde{C}_{j+1},\\
&C_i r^{2-N} \le u_i(r) \le \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{C}_i r^{2(m-i+1)-N} & \text{or} \\ \tilde{C}_i r^{2\alpha j + 2(m-i+1)-\lambda}, & \end{array} \right. \quad i = j+2, \cdots, m.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(u_1, \cdots, u_m) = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_m),$$

ここで

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(r) =&\ C_i + \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] u_{i+1}(s)ds, \quad i = 1, 2, \cdots, j,\\
\tilde{u}_{j+1}(r) =&\ \tilde{C}_{j+1} - \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] u_{j+2}(s)ds,\\
\tilde{u}_i(r) =&\ \int_r^\infty s^{1-N}\int_0^s t^{N-1} u_{i+1}(s)dtds, \quad i = j+2, \cdots, m-1,\\
\tilde{u}_m(r) =&\ \int_r^\infty s^{1-N}\int_0^s t^{N-1} p(t) u_1(s)^\alpha dtds.
\end{aligned}$$

容易に

(I) $\mathcal{T}(X) \subset X$, (II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(X)$ は相対コンパクト

を示すことができる. Schauder-Tychonoff の不動点定理から不動点の存在が示すことができ, この不動点が $(3)_j$ の正値全域解となる. 集合 X の定義より $u_1(r)/r^{2j}$ の $r\to\infty$ における極限は $u_{j+1}(r)$ の極限の定数倍である. $u_{j+1}(r)$ は減少で

$$0 < C_{j+1} \le u_{j+1}(r) \le \tilde{C}_{j+1}$$

だから正定数に収束する. よってこの不動点は $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解である.

(ii) 基本的に (i) と同じなので, 集合 X と 写像 $\mathcal{T}$ の定義を述べることにする:

$$X = \{(u_1, \cdots, u_m);\ u_i\text{は次を満たす.}\}:$$

$$C_1 \le u_1(r) \le \tilde{C}_1 r^{2(j-i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, j,$$

$$C_j \le u_j(r) \le \tilde{C}_j,$$

$$C_i r^{2-N} \le u_i(r) \le \begin{cases} \tilde{C}_i r^{2(m-i+1)-N} & \text{or} \\ \tilde{C}_i r^{2\alpha(j-1)+2(m-i+1)-\lambda}, & \end{cases} \quad i = j+1, \cdots, m.$$

$$\mathcal{T}(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u_m}),$$

ここで

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(r) = &\ C_i + \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] u_{i+1}(s)ds, \quad i = 1, \cdots, j, \\
\tilde{u}_i(r) = &\ \int_r^\infty s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}u_{i+1}(s)dtds, \quad i = j+1, \cdots, m-1, \\
\tilde{u}_m(r) = &\ \int_r^\infty s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)u_1(s)^\alpha dtds.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] T.Kusano and M.Naito, Kiguradze classes for radial entire solutions of higher order quasilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J, 22(1992), 301-363.

[2] T.Kusano, M.Naito, C.A.Swanson, Asymptotic properties of entire solutions of even order quasilinear elliptic equations, Japan J. Math, 14(1988), 275-308.

[3] T. Teramoto, On Nonnegative entire solutions of second-order semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eqns, No.94(2003).