数理解析研究所講究録
第1787巻 2012年 156-168

『淇澳集』における解法の構造について*

小川束†

2011年8月23日

1 はじめに

近世日本における数学において平面幾何および立体幾何の占める位置は極めて大きい．それは幾何を含む多数の教科書，膨大な量の算額が残存していることを考えれば自明のことである．また，関流をはじめとする各流派における門人の主たる活動が平面幾何，立体幾何の問題作成とその解答作成にあったことを考えても，疑いをはさむ余地はない．

このような近世日本数学における幾何の意義は，まず第一に当時の人々に「数学」(当時の言葉で言えばたとえば算術) の心象，すなわちイメージを確立したことである．当時のごく一般の人々が「算術」と聞いてまず思い浮かべるのは『塵劫記』および平面幾何の図形であった．第二に当時の幾何学が量的な幾何学——図形の構成要素の量的関係を重視する幾何学[*1]——であり，珠算による算術計算に馴れた人々にとって学びやすかったことである．これらのことが算額のような日本独自の伝統を継続させる基盤となった．

このように近世日本の幾何学は数学文化として一翼を担うものとして大きな意義を有している．しかしながら現在，それに相応しい研究がなされているかという，必ずしもそうとはいえまい．たとえば当時の問題の現代的解法を考えてみよう．これは当時の解答が正しいか誤っているかを判定することにおいて一定の意義を有する．しかしながら，解答すること自体にも歴史体験的な楽しみが存在するように思われる．この意味では現代的解法の数学史としての意義は薄いと言わざるを得ない．

それならば，数学史としての意義ある研究とは何であろうか．この点についてはもちろん諸種の主張があろうが，ここでは二点のみを挙げておきたい．まず，近世日本の幾何学の本質は何かという問題に対する研究である．この問題に対しては，たとえば近世日本の幾何学を西洋の幾何学と比

* On a Structure of Methods used in the *Kioushu.*

† 四日市大学 / 関孝和数学研究所.

*1 戸坂潤もこの量的幾何学という言葉を用いている．戸坂は「計量を含む幾何学——所謂計量幾何学即ち座標幾何学は少くともその一部分である——を一般に量的幾何学と名づけ，之に反して計量を含まぬ幾何学を一般に質的幾何学と名づける．かくて私は始めて本質的な分類を得ると思う．何となれば幾何学が質的であるか量的であるかはそれが本質的であるか本質的でないかの問題となることをやがて吾々は知るであろうから」と述べている (「幾何学と空間」『戸坂潤全集』第一巻，勁草書房，1966年).

較したり，日本人が明治になって西洋の幾何学をどのように評価したかを明らかにすることが考えられよう．このような考察によって近世日本の幾何学の本質の一端を明らかになる．もう一つは近世日本の幾何学の水準を評価する研究である．これにはいろいろな基準を設定しなければならないが，それらの基準はどれも独自の意義をもつものである．

本稿ではこれらの課題に関して，近世日本の幾何学を支えた諸計算の背後にある図形の諸性質——相似関係，三角形の面積と内接円の半径との関係など——に注目して，解の導出構造の解明を進めることを提案したい．

以下，近世日本の幾何学とエウクレイデスの『原論』と簡単に比較したあと，至誠賛化流の年報というべき『淇澳集』の平面幾何の問題について，その解法を支える図形の諸性質，および解の導出構造について一例を提示する．

2　近世日本幾何学と西洋幾何学

ここでは近世日本幾何学と西洋幾何学——といってもエウクレイデスの『原論』における平面幾何学——をいくつかの座標軸を設定して，両者の特徴を対比してみたい．

まず，それぞれの幾何学の目的について考える．近世日本の数学は明らかに図形を構成する要素——線分，円周，楕円周，平面，球面，楕円面など——の量（長さ，面積，体積）を求めることに主眼がある．幾何の問題とは図形とその構成要素のいくつかについてその長さ，面積，体積などが与えられたときに，未知の要素の量を求めることである．問題のおいて構成要素の量を一般に文字で表すことも可能であったが，そのような場合であっても量が与えられたことには変わりがない．このように近世日本の幾何学は「量的な」幾何学である*2．これにたいしてエウクレイデスの『原論』における平面幾何学では図形の性質による体系化がなされている．これを量的幾何学に対比して言えば，質的幾何学と規程することもできよう．

問題，例題，あるいは定理の提出という観点から言えば，近世日本の幾何学はまず即物的である．たとえば三角形に円を内接させ，その間隙にまた円を内接させるというような問題の作り方であるから，容易に問題を作ることができる．これに対してエウクレイデス流の幾何学では，たとえば重心，垂心，外心が一直線上にあるというような性質でさえ，これを新たに思いつくことは誰にでも容易という訳にはゆかない．量的幾何では計算に大きな比重が置かれているのに対して，質的幾何では積極的な発見的活動が必要である．たとえば，すでに得られた結果の条件を弱くするとか，条件を減らすとか，あるいは命題を拡張するといった思考が必要である．このような観点は近世日本の数学には見られない．

解法について言えば，近世日本の数学は計算により解決される．そのために必要な，相似であるとか，三角形の面積と内接円の半径との関係というような図形の性質は計算の基礎としての意義を有するのみで，それ以上のことを意味していない．そのような図形の性質は計算に役立つという観点からのみ評価されるのである．これに対してエウクレイデス流の幾何学ではあくまでも論証が主

*2 戸坂によればこのような量的幾何学は本質的ではないのだが，ここではその議論はしない．

体で，計算はその論証を成り立たせるために用いられるのである．これらの相違は双方の幾何学の目的が異なることから当然の帰結である．

また鑑賞ということで言えば，近世日本の幾何学では問題を鑑賞するのである．たとえば，図形が洗練されているということがまず重要であって，その次に解法が難易度ということがくる．これに対してエウクレイデス流の幾何学ではそこに述べられた図形の性質を鑑賞――この言葉が相応しいがどうかはともかく――するのである．もちろん図形の対称性といったような図形そのものへの美的感覚も発揮されるが，それよりは図形の性質が上位に位置する．

これらのことを一言で言えば，幾何学の目的の相違を本質として，近世日本と西洋では幾何学の理解の仕方が異なったということである．両者の優劣を論じることもできようが，そのことに格段の学問的意義があるようにも思われない．

3 解の構造研究――『淇澳集』の場合

ここでは『淇澳集』から冒頭の数題を観察してみたい．『淇澳集』には問題と答（術文）のみが記載され，詳細な計算過程は記載されていない．そのため，以下の解法ではその方針，計算が当時の解法を正しく復元しているとは限らない．『淇澳集』に計算過程が記載されていないことは，一般論として珍しいことではない．そしてそのことは当時，至誠賛化流において計算の方針，方法にある程度の共有された数学的感覚が存在し，さらにそれが暗黙のうちに基盤として了解されていたことを示す．その基盤の一つはもちろん当時刊行されていた教科書である．

以下ではごく初等的な性質と，当時刊行されていた数学書に見られる公式――公式に類するもの――とを用いることにする．この方法論上の仮定に蓋然性があるかどうかは議論を要するところであろうが，さしあたりこのごく素朴な仮定から復元してみたい．なお，具体的な計算は煩雑であるから，第 1 問のみ若干詳細に検討する．

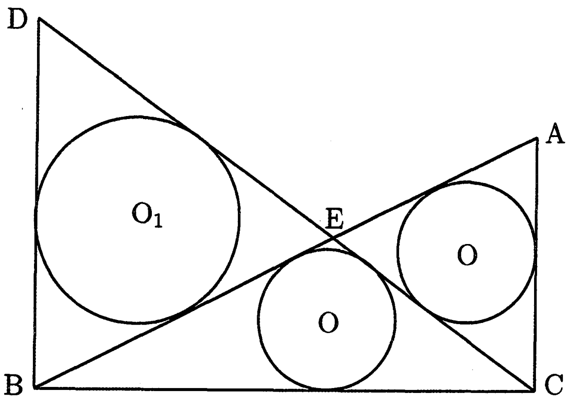
3.1 第 1 問

まず『淇澳集』巻之一の第 1 問を考察する．これは文化五年[*3]にまとめられた問題群の劈頭を飾る問題である．

> 今，有如図勾股相交，挟円．只云，小勾若干，亦云，股若干．問得白径術．
> 松本夫子　　　　三浦要人
> (図のように直角三角形が重なり，円を挟んでいる．ただし小勾（$\mathrm{AC} = b$）が与えられ，さらに股（$\mathrm{BC} = a$）が与えられているとする．このとき白円（O_1）の直径（r_1）を得る術を問う．
> 松本夫子　　　　三浦要人)

---

*3 1808 年．



会日，如左.

術日（別永小弦），置只（云数二字，略之），乗亦，半之（名天），開平方（名地），倍之，加小弦，併減只亦，余乗天亦冪差，為実．置只云差，加地，乗小弦，以除実，得白径，合問．松本重幾

術文は

$$r_1 = \frac{(\mathrm{AB} + 2\mathrm{CE} - (a+b))(b^2 - \mathrm{CE}^2)}{\mathrm{AB}(\mathrm{CE} + b - a)}$$

によって白径（r_1）を得て「問に合う」とする．

解法のポイントは AE と EB の比を求めることがあるが，この比は CE で表せる．『精要算法』巻下第 11 問にはこの CE を求める問題が載せられているから，この問題の解答者，松本重幾もこれを用いた可能性がある．そこで，ここでは直接その比を求めるかわりに，まず EC の長さを求める方針で考える事にする．

この解に用いられる幾何知識を列挙すると

1. 三平方の定理
2. 相似三角形の内接円の直径の比の関係
3. 三角形の面積と内接円の直径の関係
4. 相似三角形の相似比
5. 『精要算法』巻下第 11 問
6. 三角形の面積

の 5 項目である．

股 BC $= a$，小勾 CA $= b$ であるから，まず

$$AB = b^2 + c^2 \tag{1}$$

である．等円 O の直径を r，白円 O_1 の直径を r_1 とすると，$r_1 : \mathrm{EB} = r : \mathrm{AE}$ より

$$r_1 = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}} r \tag{2}$$

である．また

$$\Delta\mathrm{AEC} : \Delta\mathrm{EBC} = (b + \mathrm{AE} + \mathrm{CE}) : (a + \mathrm{EB} + \mathrm{CE}) = \mathrm{AE} : \mathrm{EB} \tag{3}$$

より

$$\mathrm{AE}(a + \mathrm{EB} + \mathrm{CE}) = \mathrm{EB}(b + \mathrm{AE} + \mathrm{CE}) \tag{4}$$

であるから

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}} = \frac{a + \mathrm{CE}}{b + \mathrm{CE}} \tag{5}$$

である．よって

$$r_1 = \frac{a + \mathrm{CE}}{b + \mathrm{CE}} r \tag{6}$$

となる．

ここで『精要算法』巻下第 11 問の結果 (10) と (1) とより

$$\mathrm{CE}^2 = \frac{(a+b)^2 - \mathrm{AB}^2}{4} = \frac{ab}{2} \tag{7}$$

であり，また $\Delta\mathrm{AEC} + \Delta\mathrm{EBC} = \Delta\mathrm{ABC}$ より

$$r(b + \mathrm{CE} + \mathrm{AE}) + r(a + \mathrm{CE} + \mathrm{EB}) = 2ab \tag{8}$$

である．よって (1) に注意すれば

$$\begin{aligned} r &= \frac{2ab}{a + b + \mathrm{AB} + 2\mathrm{CE}} = \frac{2ab}{a + b + \mathrm{AB} + 2\mathrm{CE}} \times \frac{(2\mathrm{CE} + \mathrm{AB}) - (a+b)}{(2\mathrm{CE} + \mathrm{AB}) - (a+b)} \\ &= \frac{\mathrm{CE}\{\mathrm{AB} + 2\mathrm{CE} - (a+b)\}}{\mathrm{AB}} \end{aligned} \tag{9}$$

となる．したがって，(6)，(7)，(9) より

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(a + \mathrm{CE})(a - \mathrm{CE})}{(b + \mathrm{CE})(a - \mathrm{CE})} \times \frac{\mathrm{CE}\{\mathrm{AB} + 2\mathrm{CE} - (a+b)\}}{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{(\mathrm{AB} + 2\mathrm{CE} - (a+b))(b^2 - \mathrm{CE}^2)}{(\mathrm{CE} + b - a)\mathrm{AB}} \end{aligned}$$

が得られる．これは術文に与えられた式である．

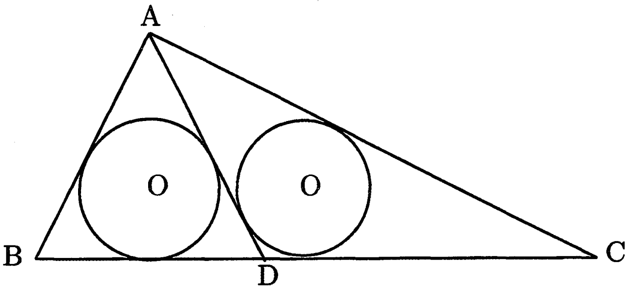
『精要算法』巻下第 11 問

上に列挙したうち 4 の『精要算法』巻下第 11 問というのは次の公式である．

次図において $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$，円 O の直径を r，$\mathrm{AD} = l$ とすると，

$$l^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \tag{10}$$

である．



この公式の証明に用いられる幾何知識は次の 4 項目である（番号は上の番号に続けた）．

7. 三角形の内接円の中心と頂点を結ぶ直線が頂点を二等分すること
4. 相似三角形の相似比
8. 三角形の内接円の中心から三辺に下ろした垂線が二つずつ合同な三つの三角形を作ること
9. 『精要算法解義』員外 (乃第一十二及第一十三) 助術*4

である．

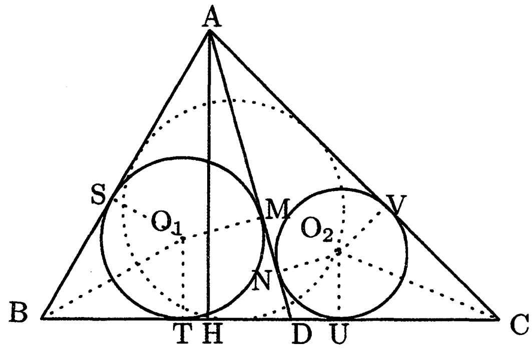
『精要算法解義』の公式

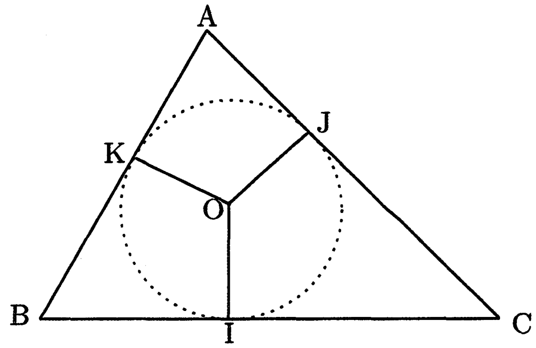
上に上げたうち 9 の『精要算法解義』員外 (乃第一十二及第一十三) 助術とは次の公式である．

図において BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，円 O_1 の直径を r_1，円 O_2 の直径を r_2，円 O の直径を R，AH $= h$ とするとき，

$$(a+b+c)(r_1+r_2)R - 2ar_1r_2 - 2ahR = 0 \tag{11}$$

が成り立つ．





この公式は『精要算法解義』の

員外（乃第一十二及第一十三）助術

今有如図三斜内隔斜容甲乙二円．只云中勾（八寸）全円径（七寸）甲円径（六寸）．問乙

*4 東北大林集書 0162 を用いた．また証明の詳細は付録として最後に記しておいた．

円径幾何.

の解義中にある. ここには証明も詳しく記されている. それに従えば, この証明に用いられる幾何知識は

3. 三角形の面積と内接円の直径の関係
6. 三角形の面積
7. 三角形の内接円の中心と頂点を結ぶ直線が頂点を二等分すること
4. 相似三角形の相似比
8. 三角形の内接円の中心から三辺に下ろした垂線が二つずつ合同な三つの三角形を作ること

である*5.

3.2 第2問

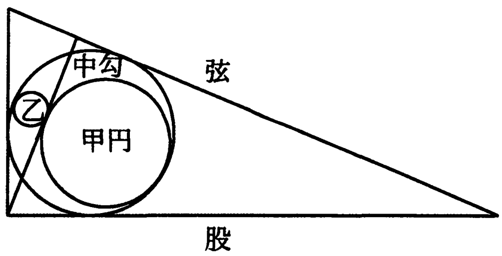
今, 有如図鉤股, 全円内隔中勾入甲乙円. 只云, 甲円径三寸, 乙円径二寸. 問中勾.

松本夫子　　　　永井充房

戊辰春

答曰, 中勾六寸

術曰, 甲乙径相乗, 四之, 加甲乙径和冪, 開平方, 加甲乙径和, 半之, 得中勾, 合問. 松本重幾



図のように直角三角形があり, これに内接する全円の中に, 中勾 (すなわち, 直角をなす頂点から斜辺に下ろした垂線) を隔てて甲, 乙の二円を入れる. 甲円の直径が3寸, 乙円の直径が2寸のとき, 中勾の長さ求める問題である. これは題意が必ずしも明確ではないが, 甲円, 乙円とも直径が最大になるように取ることが図より暗黙に仮定されていると考えることにする. そうすると, この解に用いられる幾何知識は

1. 三平方の定理
10. 線分を分割したときの長さの関係

である.

---

*5 参考までに証明を付録に述べておく.

3.3 第3問

今，有如図大菱之内容等円二個，其円心ヨリ小菱．只云大菱面一十〇寸．問小菱面及術．

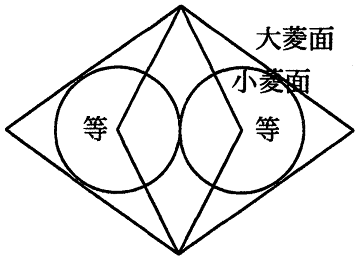
志村夫子　池谷常冨

此題意ヲ按スルニ等三角二ツ合スルモノヲ菱ト見込矣．大菱面ヲ云テ小菱面ヲ問ナルベシ．菱内円（二個）ヲ容ルモノ二辞ナケレハ題動テ術施サレス．故ニ一辞ヲ補ヒ而術ヲ施コト左ノ如シ．

答曰術如左．

術日，置菱面，倍之，加菱濶，以除菱面，開平方，乗菱濶，得小菱面，合問．

辰春　志村昌義



図のように菱形の中に内接する等円が二箇と，それぞれの円の中心を通る小菱形があるとき，小菱形の一辺の長さを求める問題である．この解に用いられる幾何知識は

1. 三平方の定理
6. 三角形の面積

である．

3.4 第4問

今，有如図鈎股内容三角及甲乙二円．只云，鈎若干．問得乙円径術如何．

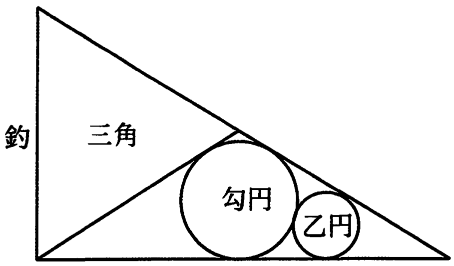
永井君

答曰；如左．

術日，置三個，開平方，名天，減一個，余乗斜率（二段），加六個，減天，余以除鈎，乗天，得乙円径，合問．

永井充房

図のように，直角三角形の中に正三角形と甲，乙二円を入れる．鈎が与えられたとき，乙円の直径を求めることが問題である．



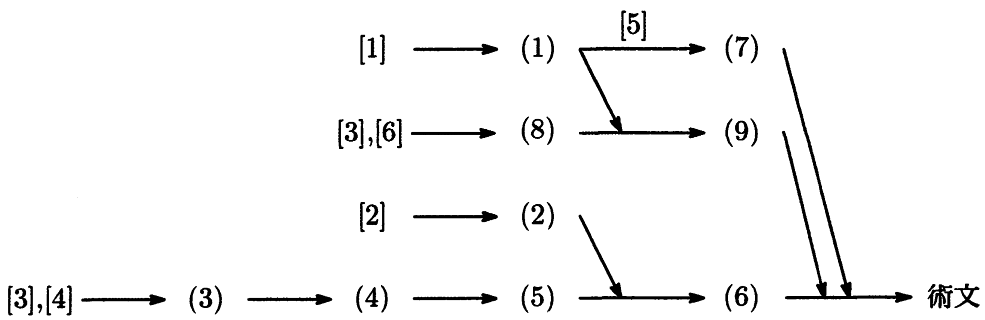
この解に用いられる幾何知識は

3. 三角形の面積と内接円の直径の関係
7. 三角形の内接円の中心と頂点を結ぶ直線が頂点を二等分すること
4. 相似（直角）三角形の相似比
10. 線分を分割したときの長さの関係

である．

4 『淇澳集』第 1 問の解の導出構造

以上，『淇澳集』の冒頭の 4 題について利用される図形の性質を取り出してみた．ここでは第 1 問について，その解の導出過程を構造図式としてまとめると次のようになる（鍵括弧は幾何知識として列挙した番号を示し，丸括弧は式の番号を示す）．



上に述べたように『淇澳集』冒頭の 4 題を全体としてみても，そこに用いられている幾何知識の数は必ずしも多くはない．これらの中で第 1 問は用いる幾何知識の数が他のものよりも多い．また，第 1 問の式の導出過程は上に採り上げた（ここでは記さなかったが）残りの 3 問に比較して複雑である．問題の複雑性を定量的に定義することは難しいが，さしあたり，必要とされる幾何知識の数および導出線（矢印）の数が増えれば，それだけ問題が難しいということは言えよう．

このような構造の分析が至誠賛化流の門人による数学の活動の水準，すなわち近世日本の数学の水準の一例を示すのに適しているかどうか結論を出すには，さらにこのような構造図式の蓄積が必要である．またそれに伴い，幾何知識の整理も必要である．

今回は第 1 問についてのみ構造図式を示しただけに過ぎないが，このような図式の蓄積が至誠賛化流の門人による数学活動の実体を明らかにするのに何らかの意義を有することは言えるであ

ろう.

5 おわりに——研究対象としての至誠賛化流と三木流

『淇澳集』,『続淇澳集』『増続淇澳集』は至誠賛化流の門人等の算題集である.ここには文化5年から文政11年*6までの21年間に総勢158名によって作成された問題と答およびコメントが記されている([1]).『淇澳集』冒頭に門人の活動時の作法があり,門人の日常の数学活動の様子を窺い知ることができる.また門人の活動した期間が明確で,出題および解答を与えた門人の氏名および年月も確定でき,さらに出題された問題への評価——題意が明確でないなど——も記録されていることから,これらの問題の研究は流派における数学活動の全体を知るには最適である.しかしながら,その幾何知識の論理構造を把握しようとすると,問題も生じる.それはいわゆる術文が与えられておらず,術はあくまでも推測の域を出ないからである.たとえば第1問では『精要算法』巻下第11問を予備知識として仮定したが,実際には相似関係や別の幾何知識——角の二等分線を巡る性質など——を用いたかも知れないのである.

この点から言えば三木流を対象として研究を進めた方が的確に幾何知識の論理構造を把握できる*7.というのも三木流の算書は詳細な傍書法による解が付されており,実際の解法を確定することが容易だからである.また史料が主として京都大学数学教室に集中しておりその概要はほぼ明らかにすることができる.一方,三木流の算書群は師匠によって著されたもので,三木流の研究よってては門人の活動の生き生きとした実体を捉えることはできない.このように幾何知識の論理構造の確実な理解という点に限れば三木流が至誠賛化流よりも適した対象であり,一方,門人の活動という点に重点を置けば,至誠賛化流が適した対象となる.

いずれにせよ,この種の解の構造分析研究が広範に進められることを期待したい.

最後になりましたが,藤井康生先生,土倉保先生からいろいろご教示いただきました.ここに記して謝意を表します.

文献

1. 小川束「至誠賛化流と『起元解』について」『数理解析研究所講究録』1739 (2010), 1-9.
2. 小川束「近世日本数学の方法と論理に関する諸問題」『数理解析研究所講究録』1739 (2011), 245-250.

---

*6 1828年.

*7 『三木流算書』全31巻のうち,28巻以降の4巻が幾何の問題に当てられている([2]).

6 付録『精要算法』の公式の証明

参考までに『淇澳集』巻之一の第 1 問の解答に必要な『精要算法』巻下第 11 問，またそれに必要な『精要算法解義』の公式の証明を述べておく．

6.1 『精要算法』巻下第 11 問

ΔABC の内接円の直径を R，その中心から BC に下ろした垂線の足を I，等円と辺 BC との接点を左から順に T，U とすると，

$$\frac{R}{\mathrm{CI}} = \frac{r}{CU}, \quad \frac{R}{\mathrm{BI}} = \frac{r}{BT} \tag{12}$$

より

$$CU = \frac{rCI}{R}, \quad BT = \frac{rBI}{R} \tag{13}$$

である．ここで

$$(a+b+c) - 2(CU+BT) = 2l \tag{14}$$

だから

$$-2ar + \{(a+b+c) - 2l\}R = 0 \tag{15}$$

となる．一方，『精要算法解義』の公式 (11) において $r_1 = r_2 = r$ とすると

$$-2ar^2 + 2(a+b+c)rR - (a+b+c)R^2 = 0 \tag{16}$$

である．よって (15) と (16) とより

$$\{2lr + (a+b+c)r\}R - (a+b+c)R^2 = 0 \tag{17}$$

すなわち

$$\{2lr + (a+b+c)r\} - (a+b+c)R = 0 \tag{18}$$

が得られる．したがって (15) と (18) とより

$$-a^2 + b^2 + 2bc + c^2 - 4l^2 = 0 \tag{19}$$

すなわち

$$l^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \tag{20}$$

が得られる．

7 『精要算法解義』員外（乃第一十二及第一十三）助術の証明

まず ΔABC において

$$a - b + c = 2\mathrm{BI} \tag{21}$$

である．また $\Delta\mathrm{BTO_1} \sim \Delta\mathrm{BIO}$，$\Delta\mathrm{CUO_1} \sim \Delta\mathrm{CIO}$ より

$$\mathrm{BT} = \frac{r_1\mathrm{BI}}{R}, \quad \mathrm{CU} = \frac{r_2\mathrm{CI}}{R} \tag{22}$$

が成り立つ．よって

$$\mathrm{TU} = a - \mathrm{BT} - \mathrm{CU} = a - \frac{r_1\mathrm{BI}}{R} - \frac{r_2\mathrm{CI}}{R} \tag{23}$$

である．一方，

$$MN = AV - AS = b - CU - c + BT = b - \frac{r_2CI}{R} - c + \frac{r_1BI}{R} \tag{24}$$

であるから，

$$2DU = TU - MN = a - b + c - \frac{2r_1BI}{R} = 2BI - \frac{2r_1BI}{R} \tag{25}$$

が成り立つ．よって

$$DU = BI - \frac{r_1BI}{R} \tag{26}$$

であり，

$$\mathrm{TD} = TU - DU = a - BI - \frac{r_2CI}{R} \tag{27}$$

である．以上より

$$\begin{aligned} 4\Delta\mathrm{ABD} &= (2TD + 2AM + 2SB)r_1 = 2ar_1 - 2BIr_1 - 2\frac{r_2CI}{R}r_1 + 2cr_1 \\ &= (a+b+c)r_1 - 2\frac{r_2CI}{R}r_1 \end{aligned} \tag{28}$$

であることがわかった．

また

$$\begin{aligned} 4\Delta\mathrm{ACD} &= (2DU + 2CV + 2AN)r_2 = 2DUr_2 + 2br_2 \\ &= 2BIr_2 - \frac{2r_1BI}{R}r_2 + 2br_2 = (a+b+c)r_2 - \frac{2r_1BI}{R}r_2 \end{aligned} \tag{29}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned} 4\Delta\mathrm{ABC} &= (a+b+c)(r_1+r_2) - \frac{2(BI+CI)r_1r_2}{R} \\ &= (a+b+c)(r_1+r_2) - \frac{2ar_1r_2}{R} \end{aligned} \tag{30}$$

が成り立つ．ここで

$$4\Delta\mathrm{ABC} = 2ah \tag{31}$$

であるから，

$$(a+b+c)(r_1+r_2) - \frac{2ar_1r_2}{R} - 2ah = 0 \tag{32}$$

すなわち

$$(a+b+c)(r_1+r_2)R - 2ar_1r_2 - 2ahR = 0 \tag{33}$$

が得られる．