数理解析研究所講究録
第 1793 巻 2012 年 50-53

D. Siersma, R. Pellikaan らの versal I-unfoldings と局所コホモロジー

田島慎一
筑波大学数理物質系数学域*

SHINICHI TAJIMA
FACULTY OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

R. Pellikaan, T. de Jong, D. van Straten, A. Zaharia, J. Fernández de Bobadilla らは, 1983 年に発表された D. Siersma の先駆的仕事を一般化し, 特異点集合が零次元でなく, 孤立していない特異点を持つ正則関数に対する relative な Morse 化, 即ち, versal I-unfoldings の理論を展開した. 本講では, 一点のみに台を持つような零次元代数的局所コホモロジーを用いることで, versal I-unfoldings において重要な諸量をアルゴリズミックに求めることが可能となることを報告する.

1 Versal I-unfoldings

この節では, Pellilaan [4] に従って, versal I-unfoldings に関する基本的事項を紹介する.

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層を表すとする. イデアル $I \subset \mathcal{O}_X$ に対し, I の primitive イデアル $\int I$ を, 次で定める.

$$\int I = \{g \in \mathcal{O}_X \mid (g) + J_g \subset I\}.$$

ただし, J_g は $g(z) = g(z_1, z_2, ..., z_n)$ のヤコビイデアル $(\frac{\partial g}{\partial z_1}, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial z_n})$ を表す.

正則関数係数の複素解析的ベクトル場全体のなす層を Θ_X で表し, $f \in \int I$ に対し $\tau_{I,e}(f)$ を

$$\tau_{I,e}(f) = \{v(f) \mid v \in \Theta_X,\ v(I) \subseteq I\}$$

で定める.

注 $\tau_{I,e}(f)$ は, イデアル I を保つような正則な automorphism 全体がなす pseudo 群 による $f \in \int I$ の軌道 $Orb_I(f) \subset (J_f) \cap (\int I)$ の接空間に相当する.

*tajima@math.tsukuba.ac.jp

与えられた $f \in \int I$ が Pellikaan の意味で I-有限確定的（Mather 理論における通常の有限確定的の概念の自然な拡張）であるとすると, $(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ は有限次元ベクトル空間となる. 以下,

$$c_{I,e}(f) = \dim_C((\int I)/\tau_{I,e}(f))$$

を, 単に $q = c_{I,e}(f)$ で表す.

T は, $\mathbb{C}^q$ の原点 O の開近傍, $\mathcal{O}_{X\times T}$ は $X \times T$ 上の正則関数のなす層を表すとする. 点 $(z,t) \in X \times T$ の座標を $(z_1, z_2, ..., z_n, t_1, t_2, ..., t_q)$ で表す. Pellikaan は次の結果を示した.

定理 (Pellikaan [4]) $f(z) \in \int I$ に対し, $F(z,t) \in \mathcal{O}_{X\times T}$ は,

$$F(z,0) = f(z), F \in (\int I)\mathcal{O}_{X\times T}$$

を満たすとする. この時, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\tau_{I,e}(f) + (\frac{\partial F}{\partial t_1}|_{t=0}, \frac{\partial F}{\partial t_2}|_{t=0}, ..., \frac{\partial F}{\partial t_q}|_{t=0})\mathcal{O}_X = \int I$

(ii) F は f の versal I-unfolding.

次の例は, Siersma が [6] において扱った非孤立特異点の中で最も簡単な特異点である.

例 ($J_{5,\infty}$ 特異点) X は $\mathbb{C}^3$ の原点の近傍とする. $I = (y,z)$ の primitive イデアルは $\int I = (y^2, yz, z^2)$ である. $f(x,y,z) = x^5y^2 + y^3 + z^2$ とする. この時, 定義より

$$\begin{aligned} \tau_{I,e}(f) &= (x^4y^2, 2x^5y^2 + 3y^3, 2x^5yz + 3y^2z, yz, z^2) \\ &= (x^4y^2, y^3, yz, z^2) \end{aligned}$$

を得る. これより, 剰余 $(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ の基底単項式として y^2, xy^2, x^2y^2, x^3y^2 を得る. 従って, f の versal I-unfolding は

$$F(x,y,z,t) = f(x,y,z) + t_1y^2 + t_2xy^2 + t_3x^2y^2 + t_4x^3y^2$$

で与えられる.

さて, F の退化点は, 4つの A_1 型特異点 (標準形は $x^2 + y^2 + z^2$) と, 5つの D_∞ 型特異点 (標準形は $xy^2 + z^2$) からなることを容易に確かめることができる. Pellikaan [5] によると, 一般にこれらの特異点の個数の和（いまの場合, $4 + 5 = 9$）は I/J_f の次元と一致する (Siersma [6, 7]) . ここで, ヤコビイデアル J_f の準素イデアル分解は,

$$(y,z), \quad (x^9, x^4y^2, 2x^5y + 3y^2, y^3, z)$$

から成ることから, $\dim_C(I/J_f) = 9$ を得る. 以上のことから, この例では, 実際に,

$$\dim_C(I/J_f) = \sharp A_1 + \sharp D_\infty$$

が成り立つことが分かる.

2 代数的局所コホモロジーの利用

I-有限確定的な非孤立特異点に対する versal I-unfoldings の理論では, $I, \int I, J_f, \tau_{I,e}(f)$ 等のイデアルが重要な役割をはたす. これらのイデアル自体は有限な colength を持つわけではないが,

$$\int I/\tau_{I,e}(f), \quad I/J_f$$

は有限次元ベクトル空間となる (cf, Gaffney [2]).

さて本稿の主張は以下のように述べることができる.

論文 [3, 10] 等に与えた計算法を拡張することで, 剰余 $(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ や I/J_f の双対に対応する代数的局所コホモロジーを求めることができる. この結果を利用すると, 剰余 $\int I/\tau_{I,e}(f)$, I/J_f 等の (冪級数環に予め指定された項順序に関する) 基底単項式をアルゴリズミックに構成できる.

以下に, 例として $Z_{5,\infty}$ 特異点の場合の計算結果を述べる.

X は $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍, $I = (y), f(x,y) = xy^3 + x^7y^2$ とする. この時,

$$\int I = (y^2), \ \tau_{I,e}(f) = (y^3 + 7x^6y^2, 3xy^3 + 2x^7y^2)$$

である.

$(\int I)/\tau_{I,e}(f)$ の双対ベクトル空間の基底として次の代数的局所コホモロジー類を得る.

$$[\frac{1}{xy^3}], [\frac{1}{x^2y^3}], [\frac{1}{x^3y^3}], [\frac{1}{x^4y^3}], [\frac{1}{x^5y^3}], [\frac{1}{x^6y^3}], [\frac{1}{x^7y^3}] - 7[\frac{1}{xy^4}]$$

対応する単項式 $y^2, xy^2, x^2y^2, x^3y^2, x^4y^2, x^5y^2$ および x^6y^2 (または y^3) を用いて, f の versal I-unfolding

$$F(x,y,t) = f + (t_1 + t_2x + t_3x^2 + t_4x^3 + t_5x^4 + t_6x^5 + t_7x^6)y^2$$

を得る.

剰余 I/J_f の双対ベクトル空間の基底代数的局所コホモロジー類として次を得る.

$$[\frac{1}{xy^2z}], [\frac{1}{xy^3z}], [\frac{1}{x^2y^2z}], [\frac{1}{x^3y^2z}], [\frac{1}{x^4y^2z}], [\frac{1}{x^5y^2z}], [\frac{1}{x^6y^2z}], [\frac{1}{x^7y^2z}]$$

$$[\frac{1}{x^8y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^2y^3z}], \ [\frac{1}{x^9y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^3y^3z}], \ [\frac{1}{x^{10}y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^4y^3z}],$$

$$[\frac{1}{x^{11}y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^5y^3z}], \ [\frac{1}{x^{12}y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^6y^3z}], \ [\frac{1}{x^{13}y^2z}] - \frac{2}{3}[\frac{1}{x^7y^3z}] + \frac{14}{3}[\frac{1}{xy^4z}]$$

之より, $\dim_C(I/J_f) = 14$ を得る.

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一 : 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1514**「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2006), 141–147.

[2] T. Gaffney : Polar methods, invariants of pairs of modules and equisingularity, Contempolary Math. **354** (2004), 113–135.

[3] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一 : 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナ基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1764**「実閉体上の幾何と特異点論への応用」(2011), 102–125.

[4] R. Pellikaan : Finite determinancy of functions with non-isolated singularities, Proc. London Math. Soc. (3) **57** 357–382 (1988).

[5] R. Pellikaan : Deformations of hypersurfaces with a one-dimensional singular locus, J. Pure and Applied Algebra **67** (1990), 49–71.

[6] D. Siersma : Isolated line singularities, Proc. Symposia in Pure Math. **40** (1983), Part 2, 485–496.

[7] D. Siersma : Singularities with critical locus a 1-dimensional complete intersection and transversal type A_1, Topology and its Appl. **27** (1987), 51–73.

[8] 田島慎一 : 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2005), 126–132.

[9] 田島慎一 : 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568**「Computer Algebra–Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2007), 74–80.

[10] S. Tajima, Y. Nakamura, K. Nabeshima : Standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, Adv. Studies in Math. **56** (2009), 341–361.