数理解析研究所講究録
第 1794 巻 2012 年 14-25

On Harrington's conservation theorem

聖徳大学児童学部　池田一磨 (Kazuma Ikeda)
Faculty of Child Studies, Seitoku University

1 序

Harrington は 1997 年に次の Harrington's conservation theorem を示した.

定理 1 任意の 1 階論理式 σ に対して, $\mathrm{WKL_0} \vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{RCA_0} \vdash \sigma$

この定理の証明は, 最初にモデル理論的な手法によって与えられた. (モデル理論的な証明は [4, 5] などにある.) その後, 証明論的な手法による証明を与えられることが試みられてきた. 例えば, Avigad([1]) による証明などがある. しかし, cut elimination theorem の応用としての証明は, 2008 年に F. Ferreira と G. Ferreira ([2]) によって初めて与えられた. Ferreira 達は, 弱ケーニッヒの補題を Fan theorem の形に置き換えることによって, Harrington の定理の証明を与えた.

本稿では, まず F. Ferreira と G. Ferreira の主補題を紹介する. そして, 弱ケーニッヒの補題を Σ^0_1-分離公理に置き換え, それに主補題を適用して Harrington の定理の証明を与える.

2 $\mathrm{RCA_0^-}$, $\mathrm{RCA_0}$, $\mathrm{WKL_0}$, Σ^0_1-SP

ここでは, 各体系について定義を確認する.

定義 2 $\mathrm{RCA_0^-}$, $\mathrm{RCA_0}$, $\mathrm{WKL_0}$, Σ^0_1-SP の言語は共通で, 定数記号として 0, 関数記号として原始帰納的関数の定義に対応する記号, 述語記号として $=$ と $\leq$ をもつものとする.

定義 3 公理図式を定義する.

1. $\mathbf{\Sigma^0_n}$**-帰納法** $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x)$$

ここで, $\varphi(x)$ は Σ^0_n-論理式.

2. **$\mathbf{\Delta^0_n}$-内包公理** ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

ここで，$\varphi(x)$ は Σ^0_n-論理式，$\psi(x)$ は Π^0_n- 論理式.

3. **$\mathbf{\Sigma^0_n}$-分離公理** ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \exists X \forall x[(\varphi(x) \to x \in X) \land (x \in X \to \psi(x))]$$

ここで，$\varphi(x)$ は Σ^0_n-論理式，$\psi(x)$ は Π^0_n- 論理式.

4. **弱ケーニッヒの補題**
任意の無限 2 分木は無限の path を持つ (ということを WKL_0 の言語で書いたもの).

定義 4 RCA_0^- の公理は，原始帰納的関数の定義に対応する公理と，$=$ および $\leq$ に関する標準的な公理と，Σ^0_1-帰納法および Δ^0_0-内包公理である.

定義 5 RCA_0，WKL_0，Σ^0_1-SP を次のように定義する.

1. $RCA_0 := RCA_0^- + \Delta^0_1$-内包公理
2. $WKL_0 := RCA_0 +$ 弱ケーニッヒの補題
3. $\Sigma^0_1\text{-SP} := RCA_0 + \Sigma^0_1$-分離公理

次の定理が成り立つことが知られている.

定理 6 $WKL_0 \equiv \Sigma^0_1\text{-SP}$

証明. [4]，[5] を参照. □

3 RCA_0^-

この節では，後で必要になる RCA_0^- で成り立つ定理を与える．次の定理はよく知られている.

定理 7 (bounded collection $B\Sigma^0_1$) 任意の Δ^0_0-論理式 (=*bounded formula*) $\varphi(x,y)$ に対して，

$$RCA_0^- \vdash \forall x \leq a \exists y \varphi(x,y) \to \exists z \forall x \leq a \exists y \leq z \varphi(x,y).$$

証明. 実際は RCA_0^- より弱い $I\Sigma^0_1$ で成り立つ．(cf. [3]) □

つぎに，RCA_0^- においては，$\varphi(X)$ が Δ^0_0-論理式であるとき，$\forall X \varphi(X)$ も Δ^0_0-論理式とみなせることを示す.

定義 8 p_x を，x に x 番目の素数を対応させる，原始帰納的関数とする．このとき，次の原始帰納的関数 $(a)_x$，$\ln(a)$ と，原始帰納的関係 $s \in \{0,1\}^a$ を次のように定義する．

$$\begin{array}{rcl} (a)_x & = & \mu z \leq a(p_x^z | a \wedge p_x^{z+1} \not| a) \\ \ln(a) & = & \mu z \leq a(p_z \not| a) \\ s \in \{0,1\}^a & \Leftrightarrow & s \leq \prod_{x<a} p_x^{1+1} \wedge \ln(s) = a \end{array}$$

これらは，RCA_0^- の言語の記号としてもそのまま用いることにする．$\varphi(x)$ が Δ_0^0-論理式のとき，$\forall s \in \{0,1\}^a \varphi(s)$ および $\exists s \in \{0,1\}^a \varphi(s)$ も Δ_0^0-論理式である．

補題 9 $\mathrm{RCA}_0^- \vdash \forall y \exists s \in \{0,1\}^y \forall x < y[x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$

証明. 以下，RCA_0^- において議論する．次の Δ_0^0-論理式を，a についての Σ_1^0-帰納法により示す．

$$\exists s \in \{0,1\}^a \forall x < a[x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$$

$a = 0$ のときは明らかである．よって，a の場合を仮定し，$a+1$ の場合を示す．帰納法の仮定より，$\forall x < a[x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$ となる $s \in \{0,1\}^a$ が存在する．

$a \in A$ と仮定する．このとき，$s' = (\prod_{x<a} p_x^{(s)_x}) \cdot p_a^{0+1}$ とおく．すると，$s' \in \{0,1\}^{a+1} \wedge \forall x < a+1[x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$．よって，$\exists s' \in \{0,1\}^{a+1} \forall x < a+1[x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$．

$a \notin A$ と仮定する．このとき，$s' = (\prod_{x<a} p_x^{(s)_x}) \cdot p_a^{1+1}$ とおく．すると，$a \in A$ と仮定したときと同様に，$\exists s' \in \{0,1\}^{a+1} \forall x < a+1[x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$ となる．

従って，$\exists s' \in \{0,1\}^{a+1} \forall x < a+1[x \in A \leftrightarrow (s')_x = 0]$ が RCA_0^- で証明できる．□

補題 10 $\varphi(\bar{a}, A)$ を Δ_0^0-論理式とする．ここで，$\bar{a}$ は1階の自由変数の列，A は2階の自由変数．このとき，

$$\forall s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})}[\forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \rightarrow (\varphi(\bar{a}, A) \leftrightarrow \varphi^*(\bar{a}, s))]$$

となる項 $t_\varphi(\bar{a})$ を見つけることができる．ここで，$\varphi^*(\bar{a}, s)$ は，$\varphi(\bar{a}, A)$ に現れる $r \in A$ という形の原始論理式を $(s)_r = 0$ という形の論理式に置き換えたものである．

証明. $\varphi(\bar{a}, A)$ の構造に関する帰納法により $t_\varphi(\bar{a})$ を次のように構成する．

(1) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $t(\bar{a}) \in A$ の場合．このとき，$t_\varphi(\bar{a}) := t(\bar{a}) + 1$．

(2) $\varphi(\bar{a}, A)$ が A を含まない原始論理式の場合．このとき，$t_\varphi(\bar{a}) := 0$．

(3) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $\neg\psi(\bar{a}, A)$ の場合．このとき，$t_\varphi(\bar{a}) := t_\psi(\bar{a})$．

(4) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $\psi_1(\bar{a}, A) \circ \psi_2(\bar{a}, A)$ の場合．ここで，$\circ$ は $\wedge, \vee$ または $\rightarrow$．
このとき，$t_\varphi(\bar{a}) := t_{\psi_1}(\bar{a}) + t_{\psi_2}(\bar{a})$．

(5) $\varphi(\bar{a}, A)$ が $Qy \le s\psi(y, \bar{a}, A)$ の場合．ここで，Q は $\forall$ または $\exists$．

このとき，$t_\varphi(\bar{a}) := \sum_{y \le s} t_\psi(y, \bar{a})$．

(5) においては，$\mathrm{RCA}_0^- \vdash y \le s \to t_\psi(y, \bar{a}) \le t_\varphi(\bar{a})$ であることから，次のことがわかる．

$$\mathrm{RCA}_0^- \vdash \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \land y \le s \to \forall x < t_\psi(y, \bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0)$$

この論理式より，求める論理式が得られる． □

命題 11 $\varphi(\bar{a}, A)$ を Δ_0^0-論理式とする．ここで，$\bar{a}$ は 1 階の自由変数の列，A は 2 階の自由変数．このとき，

$$\mathrm{RCA}_0^- \vdash \forall X \varphi(\bar{a}, X) \leftrightarrow \forall s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s)$$

ここで，$t_\varphi(\bar{a})$ は補題 *10* によって $\varphi(\bar{a}, A)$ から決まる項とする．

証明. 以下，RCA_0^- において議論する．$\forall s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s) \to \varphi(\bar{a}, A)$ が成り立つことは，補題 10 から論理式

$$s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \land \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \land \varphi^*(\bar{a}, s) \to \varphi(\bar{a}, A)$$

成り立つことと，補題 9 から $\exists s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \forall x < t_\varphi(\bar{a})[x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0]$ が成り立つことからわかる．

一方，$\forall X \varphi(\bar{a}, A) \to \forall s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \varphi^*(\bar{a}, s)$ が成り立つことは，補題 10 から論理式

$$s \in \{0,1\}^{t_\varphi(\bar{a})} \land \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in A \leftrightarrow (s)_x = 0) \land \varphi(\bar{a}, A) \to \varphi^*(\bar{a}, s)$$

が成り立つことと，Δ_0^0-内包公理から $\exists X \forall x < t_\varphi(\bar{a})(x \in X \leftrightarrow (s)_x = 0)$ が成り立つことからわかる． □

4 F. Ferreira と G. Ferreira の主補題

定義 12 one-side で表された LK に次の公理と推論図を加えた体系を $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で表すことにする．

1. 公理：RCA_0^- の Σ_1^0-帰納法と Δ_0^0-内包公理を除く公理を原始論理式の列の形で表現したもの．

2. 推論図：

$$\frac{\Gamma, \varphi(V)}{\Gamma, \exists X \varphi(X)} (\exists^2) \qquad \frac{\Gamma, \varphi(A)}{\Gamma, \forall X \varphi(X)} (\forall^2)$$

(V は Δ_0^0-論理式)　　(A は下式に現れない)

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi(a), \varphi(S(a))}{\Gamma, \neg\varphi(0), \varphi(t)} \text{ (Ind)}$$

(a は下式に現れない，S は後者関数，$\varphi(a)$ は Σ^0_1-論理式)

定義 13 $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ に次の推論図 $(\Sigma^0_1 - \mathrm{SP})^R$ を加えたものを $\mathrm{LK}_{\Sigma^0_1-\mathrm{SP}}$ で表す.

$$\frac{\Gamma, \varphi(a) \to \psi(a) \quad \Gamma, \neg\forall x[(\varphi(x) \to x \in A) \wedge (x \in A \to \psi(x))]}{\Gamma} \ (\Sigma^0_1 - \mathrm{SP})^R$$

ここで，$\varphi(x)$ は Σ^0_1-論理式で，$\psi(x)$ は Π^0_1-論理式である．a は Γ に現れない．また，A は Γ，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ に現れない.

このとき，次の定理が成り立つ.

定理 14 (Cut elimination theorem) $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ $(\mathrm{LK}_{\Sigma^0_1-\mathrm{SP}})$ の証明図は，その証明図と同じ終式 を持ち，かつその 2 つの *cut*-論理式の一方が Σ^0_1-論理式である *cut* しか現れない $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ $(\mathrm{LK}_{\Sigma^0_1-\mathrm{SP}})$ の証明図に変形することができる.

補題 15 (F. Ferreira と G. Ferreira の主補題) $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ において，次の形 $(*)$ をした論理式が証明できたと仮定する.

$$\Gamma, \forall w_1\varphi(w_1, \bar{A}), \ldots, \forall w_n\varphi(w_n, \bar{A}), \exists y_1\psi(y_1, \bar{A}), \ldots, \exists y_m\psi(y_m, \bar{A}) \ldots (*)$$

ここで，$(*)$ は下の条件 (1)〜(4) を満たすとする.

(1) この *sequent* に現れる論理式は全て冠頭標準形である.

(2) $\varphi_1(w_1, \bar{A}), \ldots, \varphi_n(w_n, \bar{A})$ と $\psi_1(y_1, \bar{A}), \ldots, \psi_m(y_m, \bar{A})$ は Σ^0_0-論理式である.

(3) Γ は Σ^0_1-論理式でも，Π^0_1-論理式でもない 1 階の論理式の列.

(4) $\bar{A}$ は，Γ には現れない 2 階の変数記号の列で，*special parameter* と呼ばれる.

このとき，次の *sequent* も $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ において証明できる.

$$\Gamma, \forall w_i \exists v \forall \bar{X}[\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i(w_i, \bar{X}) \vee \bigvee_{j=1}^{m} \exists y_j \leq v\psi_j(y_j, \bar{X})].$$

証明. $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ における

$$\Gamma, \forall w_1\varphi(w_1, \bar{A}), \ldots, \forall w_n\varphi(w_n, \bar{A}), \exists y_1\psi(y_1, \bar{A}), \ldots, \exists y_m\psi(y_m, \bar{A})$$

の証明図を一つとる．これに Cut-elimination theorem を適用する．すると，その証明図と同じ終式を持ち，かつその 2 つの cut-論理式の一方が Σ^0_1-論理式である cut しか現れない証明図を得る．しかもその証明図に現れる sequent はすべて $(*)$ の形をした sequent である．このとき，2 階の推論図は現れないことに注意する.

以下，この証明図に現れる sequent の高さに関する帰納法により示す．initial sequent のときは，それに現れる論理式はすべて原始論理式であるから成り立つ．次に，各推論図 I に対して，上式に対して補題が成り立つと仮定して，下式に対して補題が成り立つことを示す.

(1) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \theta_1(\bar{A}) \quad \Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \theta_2(\bar{A})}{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), (\theta_1 \wedge \theta_2)(\bar{A})}$$

ここで，$\bar{A}$ は下式の special parameter.

このとき，$\theta_1(\bar{A})$ と $\theta_2(\bar{A})$ は Σ^0_0-論理式であることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y,\bar{X}) \vee \theta_i(\bar{X})]$$

ここで，$i=1,2$. よって，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y,\bar{X}) \vee (\theta_1(\bar{X}) \wedge \theta_2(\bar{X}))]$$

(2) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \theta_1(\bar{A})}{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), (\theta_1 \vee \theta_2)(\bar{A})}$$

ここで，$\bar{A}$ は下式の special parameter.

このとき，$\theta_1(\bar{A})$ は Σ^0_0-論理式であることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y,\bar{X}) \vee \theta_1(\bar{X})]$$

よって，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y,\bar{X}) \vee (\theta_1(\bar{X}) \vee \theta_2(\bar{X}))]$$

(3) I が次の形をしている場合:

$$\frac{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \theta(a)}{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \forall x\theta(x)}$$

ここで，$\bar{A}$ は下式の special parameter.

$\theta(x)$ が Σ^0_1-論理式でない場合は明らかである．よって，$\theta(x)$ は Σ^0_1-論理式であると仮定する．

[Case 1] $\forall x\theta(x,\bar{A})$ が Δ^0_0-論理式で，$\forall x \leq t\theta_0(x,\bar{A})$，すなわち $\forall x(x \not\leq t \vee \theta_0(x,\bar{A}))$ という形の場合．このとき，$\theta_0(x,\bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y,\bar{X}) \vee a \not\leq t \vee \theta_0(a,\bar{X})]$$

従って，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall x \leq t \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

命題 11 から $\forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$ は Δ^0_0-論理式である．ゆえに，定理 7 から $\mathrm{B}\Sigma^0_1$ が成り立つので，次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \exists u \forall x \leq t \exists v \leq u \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

この sequent から，下の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall x \leq t \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta_0(x, \bar{X})]$$

従って，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \forall x \leq t\theta_0(x, \bar{X})]$$

[Case 2] $\forall x\theta(x, \bar{A})$ が Π^0_1-論理式で，$\theta(x, \bar{A})$ が Δ^0_0-論理式である場合．このとき，$\theta(x, \bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れることに注意．帰納法の仮定から，$\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ において次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta(a, \bar{X})]$$

よって，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall x \forall w \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}) \vee \theta(x, \bar{X})]$$

[Case 3] $\theta(x)$ が $\exists z\theta_1(z, x, \bar{B})$ という形の場合．ただし，$\theta_1(z, x, \bar{B})$ は Δ^0_0-論理式．このとき，$\theta_1(z, x, \bar{B})$ は $\bar{A}$ を含んでいないが，上式の special parameter ではあるが，下式の special parameter ではない 2 階の変数の列 $\bar{B}$ を一般には含んでいることに注意．帰納法の仮定にから，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X} \forall \bar{Y}[\varphi(w, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}, \bar{Y}) \vee \exists z \leq v\theta_1(z, a, \bar{Y})]$$

この sequent から次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}, \bar{B}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}, \bar{B})], \exists z\theta_1(z, a, \bar{B})$$

従って，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists v \forall \bar{X}[\varphi(w, \bar{X}, \bar{B}) \vee \exists y \leq v\psi(y, \bar{X}, \bar{B})], \forall x \exists z\theta_1(z, x, \bar{B})$$

(4) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w\varphi(w, \bar{A}), \exists y\psi(y, \bar{A}), \theta(t)}{\Gamma_1, \forall w\varphi(w, \bar{A}), \exists y\psi(y, \bar{A}), \exists x\theta(x)}$$

ここで，$\bar{A}$ は下式の special parameter.

$\theta(x)$ が Π^0_1-論理式でない場合は明らかである．よって，$\theta(x)$ は Π^0_1-論理式であると仮定する．

[Case 1] $\exists x\theta(x,\bar{A})$ が Δ^0_0-論理式で，$\exists x \le s\theta_0(x,\bar{A})$，すなわち $\exists x(x \le s \wedge \theta_0(x,\bar{A}))$ という形である場合．このとき，$\theta_0(x,\bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れていることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee (t \le s \wedge \theta_0(t,\bar{X}))]$$

この sequent より直ちに次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x(x \le s \wedge \theta_0(x,\bar{X}))]$$

[Case 2] $\exists x\theta(x,\bar{A})$ が Σ^0_1-論理式で，$\theta(x,\bar{A})$ が Δ^0_0-論理式である場合．このとき，$\theta(x,\bar{A})$ には一般に $\bar{A}$ が現れていることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \theta(t,\bar{X})]$$

ここで，

$$\exists y \le v\psi(y,\bar{A}) \vee \theta(t,\bar{A}) \to \exists y \le \max(v,t)\psi(y,\bar{A}) \vee \exists x \le \max(v,t)\theta(x,\bar{A})$$

が証明できるので，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,\bar{X})]$$

[Case 3] $\theta(x)$ が $\forall z\theta_1(z,x,\bar{B})$ という形の場合．ただし，$\theta_1(z,x,\bar{B})$ は Δ^0_0-論理式．このとき，$\theta_1(z,x,\bar{B})$ は $\bar{A}$ を含んでいないが，上式の special parameter ではあるが，下式の special parameter ではない 2 階の変数の列 $\bar{B}$ を一般には含んでいることに注意．帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall z\forall w\exists v\forall\bar{X}\forall\bar{Y}[\varphi(w,\bar{X},\bar{Y}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X},\bar{Y}) \vee \theta_1(z,t,\bar{Y})]$$

$\theta_1(z,t,\bar{B})$ には v も $\bar{A}$ も現れないので，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w\exists v\forall\bar{X}[\varphi(w,\bar{X},\bar{B}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X},\bar{B})], \exists x\forall z\theta_1(z,x,\bar{B})$$

(5) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \exists x\theta(x,\bar{A},\bar{B}) \quad \Gamma_2, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A}), \neg\exists x\theta(x,\bar{A},\bar{B})}{\Gamma_1, \Gamma_2, \forall w\varphi(w,\bar{A}), \exists y\psi(y,\bar{A})}$$

ここで，θ は Δ^0_0-論理式，$\bar{A}$ は下式の special parameter，$\bar{B}$ は下式には現れない上式の special parameter.

帰納法の仮定から，次の 2 つの sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \exists u \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{Y})] \quad \cdots (a)$$
$$\Gamma_2, \forall w \forall x \exists v \forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, \bar{X}, \bar{Y})] \quad \cdots (b)$$

(b) の sequent から，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_2, \forall x \leq u \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

ここで，$\forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$ が Δ_0^0-論理式であることに注意．従って，この sequent に $\mathrm{B}\Sigma_1^0$ を適用できて，次の sequent を得る．

$$\Gamma_2, \exists z \forall x \leq u \exists v \leq z \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

よって，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma_2, \exists v \forall x \leq u \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, \bar{X}, \bar{B})]$$

ゆえに，次の sequent を得る．

$$\Gamma_2, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{B})] \cdots (c)$$

一般に次の sequent が証明できる．

$$\begin{aligned}&\neg\forall \bar{X} \forall \bar{Y} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq u \psi(y, \bar{X}) \vee \exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{Y})],\\ &\quad \neg\forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\exists x \leq u \theta(x, \bar{X}, \bar{B})],\\ &\quad\quad \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq \max(u, v) \psi(y, \bar{X})]\end{aligned}$$

この sequent と (a) および (c) の sequent から次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X})]$$

(6) I が次の形をしている場合：

$$\frac{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \neg\exists x \theta(x, a, \bar{A}), \exists x \theta(x, S(a), \bar{A})}{\Gamma_1, \forall w \varphi(w, \bar{A}), \exists y \psi(y, \bar{A}), \neg\exists x \theta(x, 0, \bar{A}), \exists x \theta(x, t, \bar{A})}$$

ここで，θ は Δ_0^0-論理式，$\bar{A}$ は下式の special parameter．
帰納法の仮定から，次の sequent が $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できる．

$$\Gamma_1, \forall w \forall x \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, a, \bar{X}) \vee \exists x \leq v \theta(x, S(a), \bar{X})]$$

この sequent から次の sequent が得られる．

$$\Gamma_1, \forall x \leq u \exists v \forall \bar{X} [\varphi(w, \bar{X}) \vee \exists y \leq v \psi(y, \bar{X}) \vee \neg\theta(x, a, \bar{A}) \vee \exists x \leq v \theta(x, S(a), \bar{X})]$$

ここで，$\forall \bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \neg\theta(x,a,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})]$ は Δ^0_0-論理式であるから，$\mathrm{B}\Sigma^0_1$ を適用できる．よって，次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \exists v\forall x \le u\forall \bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \neg\theta(x,a,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})]$$

ゆえに，次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \exists v\forall \bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \neg\exists x \le u\theta(x,a,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})] \cdots (d)$$

また，一般に次の sequent が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\neg\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le u\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le u\theta(x,a,\bar{X})],\\ &\quad \neg\forall \bar{X}[\varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \neg\exists x \le u\theta(x,a,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})],\\ &\quad\quad \forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le \max(u,v)\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})]\end{aligned}$$

この sequent と (d) の sequent から次の sequent を得る．

$$\begin{aligned}&\Gamma_1, \neg\exists u\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le u\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le u\theta(x,a,\bar{X})],\\ &\quad \exists v\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,S(a),\bar{X})]\end{aligned}$$

$\exists u\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le u\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le u\theta(x,a,\bar{X})]$ が Σ^0_1-論理式であることに注意して，この sequent に Σ^0_1-帰納法を適用すると，次の sequent を得る．

$$\begin{aligned}&\Gamma_1, \neg\exists u\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le u\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le u\theta(x,0,\bar{X})],\\ &\quad \exists v\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,t,\bar{X})]\end{aligned}$$

$\exists u\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le u\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le u\theta(x,0,\bar{X})]$ は証明可能であるから，次の sequent が成り立つ．

$$\Gamma_1, \exists v\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,t,\bar{X})]$$

この sequent から求める次の sequent を得る．

$$\Gamma_1, \forall w\forall x\exists v\forall \bar{X}[\neg\theta(x,0,\bar{X}) \vee \varphi(w,\bar{X}) \vee \exists y \le v\psi(y,\bar{X}) \vee \exists x \le v\theta(x,t,\bar{X})]$$

□

5 Harrington's conservation theorem

定理 16 (Harrington) 任意の 1 階論理式 σ に対して，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{RCA}_0 \vdash \sigma$

証明. 1 階論理式 σ が RCA_0^- で証明可能であると仮定する．このとき，$\mathrm{LK}_{\Sigma^0_1\text{-SP}}$ で sequent $\to \sigma$ が証明図が存在する．この証明図に対して，Cut-elimination theorem を使うと，得られた証明図には命題 15 における $(*)$ の形をした sequent のみが現れる．この証明図に推論図 $(\Sigma^0_1-\mathrm{SP})^R$ が現れないならば証明は終わりである．よって，$(\Sigma^0_1-\mathrm{SP})^R$ が現れると仮定する．一番上の $(\Sigma^0_1-\mathrm{SP})^R$ が次の形をしていたとする．この推論図を I とする．

$$\frac{\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \varphi(a) \to \psi(a) \quad \Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \neg\forall x(\varphi(x) \to x \in A \to \psi(x))}{\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y)}$$

ここで，Γ は一階論理式の列で，$\varphi(x) \to x \in A \to \psi(x)$ は $(\varphi(x) \to x \in A) \wedge (x \in A \to \psi(x))$ の略記とする．簡単のため，Γ には Σ^0_1-論理式も Π^0_1-論理式も含まれないとする．また，$\varphi(x)$ は $\exists z\varphi_0(x,z)$，$\psi(x)$ は $\forall v\psi_0(x,v)$ という形をしているとする．ただし，$\varphi_0(x,z)$ と $\psi(x,v)_0$ は Δ^0_0-論理式とする．このとき，$\neg\forall x(\varphi(x) \to x \in A \to \psi(x))$ は，$\exists x\exists z\exists v\neg(\varphi_0(x,z) \to x \in A \to \psi_0(x,v))$ という形の Σ^0_1-論理式であることに注意.

この推論図 I の上式は $\mathrm{LK}_{\mathrm{RCA}_0^-}$ で証明できるので，右側の sequent に主補題を適用すると，次の sequent を得る．

$$\Gamma, \forall w\exists u\forall X[\theta(w) \vee \exists y \le u\chi(y) \vee \exists x \le u\exists z \le u\exists v \le u\neg(\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \psi_0(x,v))]$$

従って，次の sequent が証明できる．

$$\Gamma, \forall w\exists u\forall X[\theta(w) \vee \exists y \le u\chi(y) \vee \neg\forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \forall v \le u\psi_0(x,v))]$$

$\theta(w)$ と $\chi(y)$ には X が現れないので，上の sequent から次の sequent が証明できる．

$$\Gamma, \forall w\exists u[\theta(w) \vee \exists y \le u\chi(y) \vee \neg\exists X\forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \forall v \le u\psi_0(x,v))]$$

この sequent から次の sequent が証明できることはすぐにわかる．

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \neg\forall u\exists X\forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \forall v \le u\psi_0(x,v)) \cdots (e)$$

一方，I の左側の上式から次の sequent が証明できることは明らかである．

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to \forall v \le u\psi_0(x,v))$$

従って，次の sequent を得る．

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to \exists z \le u\varphi_0(x,z) \to \forall v \le u\psi_0(x,v))$$

$\exists z \le u\varphi_0(x,z)$ は Δ^0_0-論理式であるから，推論図 $(\exists^2)$ によって，

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \exists X\forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \forall v \le u\psi_0(x,v))$$

従って，次の sequent を得る．

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y), \forall u\exists X\forall x \le u(\exists z \le u\varphi_0(x,z) \to x \in X \to \forall v \le u\psi_0(x,v)) \cdots (f)$$

(e) と (f) から，推論図 I の下式が証明できる．

$$\Gamma, \forall w\theta(w), \exists y\chi(y)$$

同様の操作を繰り返して，証明図より推論図 $(\Sigma^0_1-\mathrm{SP})^R$ を消去できる． □

参考文献

[1] AVIGAD, J, Formalizing forcing arguments in subsystems of second-order arithmetic, Ann. Pure Appl. Logic **82**(1996), 165–191.

[2] FERNANDO FERREIRA AND GILDA FERREIRA, Harrington's conservation theorem redone. Arch. Math. Logic **47** (2008), 91–100.

[3] RICHARD KAYE, Models of Peano Arithmetic, Oxford, 1991.

[4] STEPHEN G. SIMPSON, Subsystems of Second Order Arithmetic, 2nd ed, Perspectives in Mathematical Logic, Cambridge UP, 2009.

[5] 田中一之, 逆数学と 2 階算術，河合文化教育研究所，1997.