数理解析研究所講究録
第 1794 巻 2012 年 6-13

実閉体の順序極小構造上の構造定理について

川上智博

640-8510 和歌山市栄谷 930
和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,\ldots)$ において、軌道型が一つだけのデファイナブル C^rG 多様体等について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,<,\ldots)$ に限っても、[5] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関する性質が [1] などにまとめられている。また、[6] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,\ldots)$ で考えるものとする。

2. 準備と結果

順序 $<$ が稠密とは、$x<y$ となる任意の $x,y\in R$ に対して、$z\in R$ が存在して、$x<z<y$ となることである。順序 $<$ が線形または全順序とは、任意の $x,y\in R$ に対して、

2010 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 14P20, 57S15, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブル C^r 群, デファイナブル C^rG 多様体, デファイナブリーコンパクト.

$x < y, x = y, x > y$ の一つだけが成立することである。順序 $<$ が端点をもたないとは、任意の $x \in R$ に対して、$y, z \in R$ が存在して、$y < x < z$ となることである。

稠密線形で端点をもたない順序 $<$ をもった体 $(R, +, \cdot, <)$ が順序体とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) 任意の $x, y, z \in R$ に対して、$x < y$ ならば、$x + z < y + z$ である。

(2) 任意の $x, y, z \in R$ に対して、$x < y$ かつ $z > 0$ ならば、$xz < yz$ である。

稠密線形で端点をもたない順序 $<$ をもった順序体 $(R, +, \cdot, <)$ が実体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) R の元 $x_1, \ldots, x_n$ で、$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1$ となるものは存在しない。

(2) 任意の R の元 $y_1, \ldots, y_m$ に対して、$y_1^2 + \cdots + y_m^2 = 0$ ならば、$y_1 = \cdots = y_m = 0$ である。

実体 $(R, +, \cdot, <)$ が実閉体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) [多項式に関する中間値定理] 任意の $f(x) \in R[x]$ に対して、$a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f([a, b]_R)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。ただし、$[a, b]_R = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ とする。

(2) $R[i] = R[x]/(x^2 + 1)$ が代数閉体となる。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a, b)_R = \{x \in R | a < x < b\}, -\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

ここでは、特に断らない限り、実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \ldots)$ で考察する。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ ($\subset R^n \times R^m$) がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル関数 $f : (a,b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\lim_{x \to b-0} f(x)$ が X 内に存在することである。デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクトであるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクトとは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブリー連結であるが、デファイナブル連結集合は、連結とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \leq x \leq 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.3 ([4]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

位相空間論でよく知られている、コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.4. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* である。

デファイナブル関数に対して、中間値の定理が成り立つ。

定理 2.5 (中間値の定理). $[a,b]_R = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、$a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f([a,b]_R)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

$U \subset R^n, V \subset R^m$ をデファイナブル開集合とし、$1 \leq r < \infty$ とする。C^r 級写像 $f : U \to V$ がデファイナブル C^r 級写像とは、f のグラフがデファイナブル集合となることである。デファイナブル開集合間の C^r 級微分同相写像が、デファイナブル C^r 級微分同相写像とは、そのグラフがデファイナブルとなることである。

定義 2.6. $0 \leq r \leq \infty$ とする。

(1) ハウスドルフ空間 X が n 次元デファイナブル C^r 級多様体とは、X の有限開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$、$R^n$ の有限個の開集合 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と有限個の同相写像 $\{\phi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して、$U_\lambda \cap U_\nu \neq \emptyset$ となる λ, μ に対して、$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu)$ がデファイナブルかつ $\phi_\nu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu) \to \phi_\nu(U_\lambda \cap U_\nu)$ がデファイナブル C^r 級微分同相写像となることである。

これらの集合と同相写像の組 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ をデファイナブル C^r 級座標近傍系という。

(2) デファイナブル C^r 級多様体がアフィンとは、ある R^n のデファイナブル C^r 級部分多様体とデファイナブル C^r 級微分同相となることである。

例 2.7. *(1)* n 次元単位球面 $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ は、n 次元デファイナブル C^∞ 級多様体である。

(2) $T^2 = S^1 \times S^1$ は、 2 次元デファイナブル C^∞ 級多様体である。

定義 2.8. *(1)* R^n のデファイナブル部分集合 G がデファイナブル群とは、G が群であって、群演算 $G \times G \to G$ と $G \to G$ がデファイナブルとなることである。

(2) デファイナブル群 G がデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とは、G がデファイナブリーコンパクトとなることである。

定義 2.9. $1 \leq r \leq \infty$ とする。

(1) 群 G がデファイナブル C^r 群（アフィンデファイナブル C^r 群）とは、G がデファイナブル C^r 級多様体（アフィンデファイナブル C^r 級多様体）であって、群演算 $G \times G \to G$ と $G \to G$ がデファイナブル C^r 級写像となることである。

G をデファイナブル C^r 群とする。

(2) G の部分群 H がデファイナブル部分群とは、H が G のデファイナブル部分集合となることである。

(3) G の部分群 K がデファイナブル C^r 部分群とは、K が G のデファイナブル C^r 級部分多様体となることである。

(4) デファイナブル C^r 群の間の群準同形写像（群同型写像） がデファイナブル C^r 級群準同型写像（デファイナブル C^r 級群同型写像）とは、それがデファイナブル C^r 級写像（デファイナブル C^r 級微分同相写像）となることである。

定義 2.10. $0 \leq r \leq \infty$ とする。

(1) デファイナブル C^rG 級多様体とは、デファイナブル C^r 級多様体 X と G の X 上の群作用 θ の組 (X, θ) であって、$\theta : G \times X \to X$ がデファイナブル C^r 級写像となるものである。簡単のために、(X, θ) の代わりに、X と書く。

(2) デファイナブル C^r 級微分同相写像（デファイナブル同相写像）がデファイナブル C^rG 微分同相写像（デファイナブル G 同相写像）とは、G 写像となることである。

定義 2.11. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群とする。G から $O_n(R)$ への群準同型写像が表現とは、デファイナブル C^r 級写像となるであることである。ただし、$O_n(R)$ は、R の n 次直交群とする。G の表現空間とは、G の表現から誘導される直交作用をもった R^n のことである。デファイナブル C^rG 多様体がアフィンとは、ある G 表現空間の G 不変デファイナブル C^r 級部分多様体とデファイナブル C^rG 微分同相となることである。

定義 2.12. ファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がファイバー F、構造群 K をもった X 上のデファイナブルファイバー束とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(1) 全空間 E はデファイナブル空間であり、底空間 X はデファイナブル集合であり、構造群 K はデファイナブル群であり、ファイバー F は効果的デファイナブル K 作用ともったデファイナブル集合で、射影 $p : E \to X$ はデファイナブル写像である。

(2) η の有限個の局所自明性の族 $\{U_i, \phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_i$ が存在して、各 U_i は X のデファイナブル開集合であり、$\{U_i\}_i$ は X の有限開被覆である。各 $x \in U_i$ に対して、$\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \to F$ を $\phi_{i,x}(z) = \pi_i \circ \phi_i(z)$ と定義する。ただし、π_i は第二成分への射影 $U_i \times F \to F$ を表すとする。$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となる i, j に対して、はりあわせ写像 $\theta_{ij} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}^{-1} : U_i \cap U_j \to K$ がデファイナブル写像である。このとき、この局所自明性の族をデファイナブルという。

両立するデファイナブル局所自明性の族をもつデファイナブルファイバー束を同じものとみなす。

定義 2.13. $\eta = (E, p, X, F, K)$、$\zeta = (E', p', X', F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、それぞれのデファイナブル局所自明性の族を $\{U_i, \phi_i\}_i$、$\{V_j, \psi_j\}_j$ とする。デファイナブル写像 $\overline{f} : E \to E'$ がデファイナブル射とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(1) $\overline{f}$ はデファイナブル写像をカバーする。すなわち、デファイナブル写像 $f : X \to X'$ が存在して、$f \circ p = p' \circ \overline{f}$ となる。

(2) $x \in U_i \cap f^{-1}(V_j)$ に対して、写像 $f_{ij}(x) := \psi_{j,f(x)} \circ \overline{f} \circ \phi_{i,x}^{-1} : F \to F$ が K の元による作用となって、$f_{ij} : U_i \cap f^{-1}(V_j) \to K$ がデファイナブル写像である。

定義 2.14. *(1)* 全単射デファイナブル射 $\overline{f} : E \to E'$ がデファイナブル同値写像とは、$\overline{f}$ はデファイナブル同相写像 $f : X \to X'$ をカバーし、$(\overline{f})^{-1} : E' \to E$ がデファイナブル射で、$f^{-1} : X' \to X$ をカバーする。

(2) デファイナブル同値写像 $\overline{f}: E \to E'$ がデファイナブル同型写像とは、$X = X'$ かつ $f = id_X$ となることである。

(3) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ の連続切断 $s : X \to E$ がデファイナブル切断とは、各 i に対して、$\phi_i \circ s|U_i : U_i \to U_i \times F$ がデファイナブル写像となることである。

(4) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ が主デファイナブルファイバー束とは、$F = K$ であって、F 上の K 作用が K の積で定義されることである。このとき (E, p, X, F, K) の代わりに、(E, p, X, K) と書く。

定義 2.15. $1 \leq r < \infty$ とする。

(1) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がデファイナブル C^r 級ファイバー束とは、全空間 E と底空間 X がデファイナブル C^r 級多様体で、構造群 K がデファイナブル C^r 群で、ファイバー F が効果的作用をもったデファイナブル C^rK 多様体で、射影 p はデファイナブル C^r 級写像で、はりあわせ写像がデファイナブル C^r 級写像となることである。主デファイナブル C^r 級ファイバー束も同様に定義できる。

(2) デファイナブル C^r 級ファイバー束の間のデファイナブル C^r 級射、デファイナブル C^r 級同値写像、デファイナブル C^r 級同型写像も同様に定義できる。

定義 2.16. *(1)* デファイナブル C^r 級ベクトル束とは、ファイバーが R^n、構造群が $GL_n(R)$ となるデファイナブル C^r 級ファイバー束である。

(2) $\eta_1 = (E, p, X)$、$\eta_2 = (E', p', X)$ を X 上のデファイナブル C^rG ベクトル束とする。デファイナブル C^rG ベクトル束写像 $\eta_1 \to \eta_2$ とは、デファイナブル C^rG 写像 $f : E \to E'$ で、$p = p' \circ f$ かつ f は各ファイバー上で線形となるものである。

(3) デファイナブル C^rG ベクトル束写像 $h : \eta \to \eta'$ が、デファイナブル C^rG ベクトル束同型写像とは、デファイナブル C^rG ベクトル束写像 $\overline{h} : \eta' \to \eta$ が存在して、$h \circ \overline{h} = id$ かつ $\overline{h} \circ h = id$ となることである。

G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。ここでは、軌道型を定義する。一つの軌道からなるデファイナブル G 集合が同値とは、それらがデファイナブル G 同相となることである。(G/H) で G/H の同値類を表すとする。一つの軌道からなるデファイナブル G 集合の同値類全体の集合に対して、順序 $(X) \geq (Y)$ を、デファイナブル G 写像 $X \to Y$ が存在することと定義する。$(X) = (G/H)$、$(Y) = (G/K)$ のとき、$(X) \geq (Y)$ となるための必要十分条件は、H が K のデファイナブル部分群と共役となることである。反射律、推移律と反対称律が示されて、この関係が順序となることがわかる。

定理 2.17 ((構造定理 1) e.g [3]). G をコンパクトリー群、X を $C^\infty G$ 多様体、X の各軌道型 (G/H) とする。このとき、軌道空間 X/G は C^∞ 級多様体であって、$(X,\pi,X/G,G/H,N(H)/H)$ は C^∞ 級ファイバー束である。ただし、$\pi: X \to X/G$ は射影とし、$N(H)$ は H の G における正規化群とする。

定理 2.18 ((構造定理 2) e.g. [3]). G をコンパクトリー群、H を G の閉部分群、X を $C^\infty G$ 多様体とする。このとき、軌道型が (G/H) となる軌道全体の和集合 $X(H)$ は、X の $C^\infty G$ 部分多様体で、軌道空間 $X(H)/G$ は C^∞ 級多様体であり、$(X(H),\pi,X(H)/G,G/H,N(H)/H)$ は C^∞ 級ファイバー束である。

以下の結果は、上記の二つの定理のデファイナブル版である。

定理 2.19 ([2]). G をデファイナブリーコンパクトアフィンデファイナブル C^r 群、X をアフィンデファイナブル C^rG 多様体、$1 \le r < \infty$ とする。X の各軌道型が (G/H) ならば、軌道空間 X/G は、以下の条件を満たすただ一つのアフィンデファイナブル C^{r-1} 級多様体構造をもつ。

(1) 射影 $\pi: X \to X/G$ はデファイナブル C^{r-1} 級写像である。

(2) 任意のデファイナブル C^{r-1} 級多様体 Y と写像 $h: X/G \to Y$ に対して、h がデファイナブル C^{r-1} 級写像であることと $h\circ\pi$ がデファイナブル C^{r-1} 級写像であることが同値である。

さらに、$(X,\pi,X/G,G/H,N(H)/H)$ はデファイナブル C^{r-1} 級ファイバー束である。

定理 2.20 ([2]). G をデファイナブリーコンパクトアフィンデファイナブル C^r 群、H を G のデファイナブル C^r 部分群、X をアフィンデファイナブル C^rG 多様体、$2 \le r < \infty$ とする。このとき、軌道型が (G/H) となる軌道全体の和集合 $X(H)$ は、X のデファイナブル $C^{r-1}G$ 部分多様体で、軌道空間 $X(H)/G$ は、以下の条件を満たすただ一つのアフィンデファイナブル C^{r-2} 級多様体構造をもつ。

(1) 射影 $\pi: X(H) \to X(H)/G$ はデファイナブル C^{r-2} 級写像である。

(2) 任意のデファイナブル C^{r-2} 級多様体 Y と写像 $h: X(H)/G \to Y$ に対して、h がデファイナブル C^{r-2} 級写像であることと $h\circ\pi$ がデファイナブル C^{r-2} 級写像であることが同値である。

さらに、$(X(H),\pi,X(H)/G,G/H,N(H)/H)$ はデファイナブル C^{r-2} 級ファイバー束である。

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
[2] T. Kawakami, *Structure theorems in o-minimal structures*, to appear.
[3] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, 1991.
[4] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.
[5] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.
[6] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.